

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 5

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(продолжение)

МЕТОД ГАУССА

## § 1. МЕТОД ГАУССА

*Решить систему линейных уравнений* – значит получить равносильную ей систему, которая уже является разрешенной или несовместной. Это удобно сделать при помощи метода Гаусса, который позволяет привести систему к более простому виду, с помощью элементарных преобразований строк в расширенной матрице системы

Пусть дана система линейных уравнений. Поставим на первое место любое уравнение с ненулевым коэффициентом при  $x_1$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

- **Шаг 1**: умножим каждое уравнение, кроме первого, на множитель  $a_{11}/a_{i1}$ , где  $i$  -номер уравнения в системе (номер строки системы).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} + a_{22}x_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} + \dots + a_{2m}x_m \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} = b_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} + a_{n2}x_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} + \dots + a_{nm}x_m \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} = b_n \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} \end{array} \right.$$

- после этого все коэффициенты при переменной  $x_1$  во всех уравнениях равны  $a_{11}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{11}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2m}x_m = b'_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{11}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nm}x_m = b'_n \end{array} \right.$$

- **Шаг 2:** Вычтем из каждого уравнения системы, начиная со второго, первое уравнение. Получим систему, в которой все коэффициенты при  $x_1$  во всех уравнениях, кроме первого обратились в ноль.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \quad \quad \quad a''_{22}x_2 + \dots + a''_{2m}x_m = b''_2 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad a''_{n2}x_2 + \dots + a''_{nm}x_m = b''_n \end{array} \right.$$

- Повторить шаги 1-2 для второго столбца, начиная с третьего уравнения. И т.д.
- Рассмотрим частные случаи приведенных по методу Гаусса систем в случае с тремя неизвестными.

- **Случай 1.** Система методом Гаусса приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array} \right|$$

- В данном случае система имеет единственное решение, которое получается последовательным нахождением переменных, начиная с последнего уравнения:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \quad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}\frac{b_3}{a_{33}}\right)$$

- **Замечание:** в данном случае ранг основной матрицы равен 3, ранг расширенной матрицы также равен 3.

- **Случай 2.** Система методом Гаусса приведена к следующему

виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ 0 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array} \right|$$

- В данном случае система из-за последнего уравнения несовместна и, следовательно, не имеет решений.
- Ранг основной матрицы системы очевидно равен 2.
- Рассмотрим расширенную матрицу системы и минор из первого столбца, второго столбца и столбца свободных членов. Порядок полученного минора равен 3.
- Следовательно, ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы.
- В этом случае система решения не имеет.

- **Случай 3.** Система методом Гаусса приведена к следующему

виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

- Последнее уравнение системы обратилось в ноль, и система стала недоопределенной – два уравнения на три неизвестных. Запишем решение системы следующим образом:

$$x_3 = k \quad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3) = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}k)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}k) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}k\right)$$

- Задавая различные значения параметра  $k$ , мы получим различные решения системы. Следовательно, решений бесконечно много. Так как решение зависит от одного параметра, то размерность решения равна 1.

Рассмотрим ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Они, очевидно, совпадают (равны 2), но меньше размерности системы (количества неизвестных).

**Теорема Кронекера-Капелли:** Для того чтобы линейная система являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы.

**Следствие:** Если ранги основной и расширенной матриц линейной системы совпадают с количеством переменных, то система имеет единственное решение.

При применении метода Гаусса на практике следует производить преобразования над строками расширенной матрицы системы.



Пример. Решить методом Гаусса систему

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -13; \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &= 14; \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 9. \end{aligned} \right\}.$$

• Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 4 & -6 & 1 & -1 & 14 \\ 6 & -9 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & -3 & -2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

• Прибавив ко второй строке первую, умноженную на (-2), к третьей – первую, умноженную на (-3), к четвертой – первую, умноженную на (-1), получим

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

Разделим третью строку на 13 и поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-9), к четвертой – вторую, умноженную на (-2):

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \text{ Разделив вторую строку на } (-2), \text{ а третью на } (-7), \text{ имеем } \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Этой матрице соответствует система

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -13; \\ x_3 - x_4 &= 4; \\ x_4 &= -2; \\ x_4 &= -2. \end{aligned} \right\}$$

Осуществляя обратный ход, находим:  $x_4 = -2$ ,  $x_3 = 2$ ,

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -13; \\ x_3 - x_4 = 4; \\ x_4 = -2; \\ x_4 = -2. \end{array} \right\} x_1 = \frac{4x_3 - 5x_4 + 3x_2 - 13}{2} = \frac{3x_2 + 5}{2}.$$

Полагая  $x_2 = c$ , получаем общее решение:

$$\left\{ \left( \frac{3c + 5}{2}; c; 2; -2 \right) \mid \forall c \in R \right\}.$$