

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
(продолжение)

**Экономическое приложение систем
уравнений**

§ 1. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Предположим, что некоторое предприятие выпускает три вида продукции, при этом, используя сырье трех видов.

Необходимые характеристики производства указаны в таблице 1.

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Задачи такого рода типичны при прогнозах и оценках функционирования предприятий, экспертных оценках проектов освоения месторождения полезных ископаемых, а также в планировании микроэкономики предприятий.

Таблица 1

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

- Решение. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1 , x_2 и x_3 . Тогда, при условии полного расхода запасов каждого вида сырья можно записать балансовое соотношение, которое образует систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составляют по каждому виду соответствие (в условных единицах):

- $x_1=150$, $x_2 = 250$, $x_3 =100$.

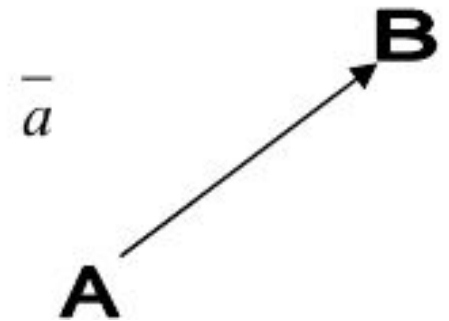
Лекция 7

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

• § 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

- Различают величины скалярные и векторные.
- Величина, которая полностью характеризуется одним числовым значением, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения, называется *скалярной величиной* или *скаляром*.
- Таковы, например, масса тела, температура среды и т.п.
- Величина, которая кроме числового значения характеризуется еще и направлением, называется *векторной величиной* или *вектором*.
- К числу их относятся сила, перемещение, скорость.
- Вектор определяется числом и направлением.
- Векторы будем обозначать \vec{a} или \mathbf{a} .

Геометрически вектор изображается направленным отрезком пространства; при этом используется обозначение $\vec{a} = \overline{AB}$



- Под *модулем* (длиной) вектора $|\vec{a}| = a$
- понимается его численное значение, без учета направления.
- Вектор, модуль которого равен нулю, называется *нулевым* или *нуль-вектором*. Направление нулевого вектора произвольно.
- Два вектора \vec{a} и \vec{b} считаются равными, если они расположены на параллельных или совпадающих прямых, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.
- Мы условимся не различать равные векторы и, таким образом, приходим к понятию *свободного вектора*. Иными словами, свободный вектор допускает перенос его в любую точку пространства, при условии сохранения длины и направления. В частности, для свободных векторов всегда можно обеспечить их общую начальную точку.

- § 2. **ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ**

- **Сумма векторов**

Суммой нескольких векторов, например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ называется вектор

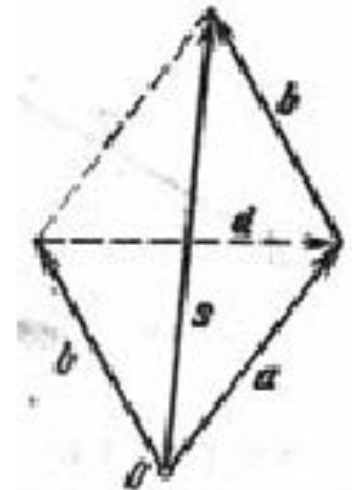
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

по величине и направлению равный замыкающей пространственной ломаной линии, построенной на данных векторах.

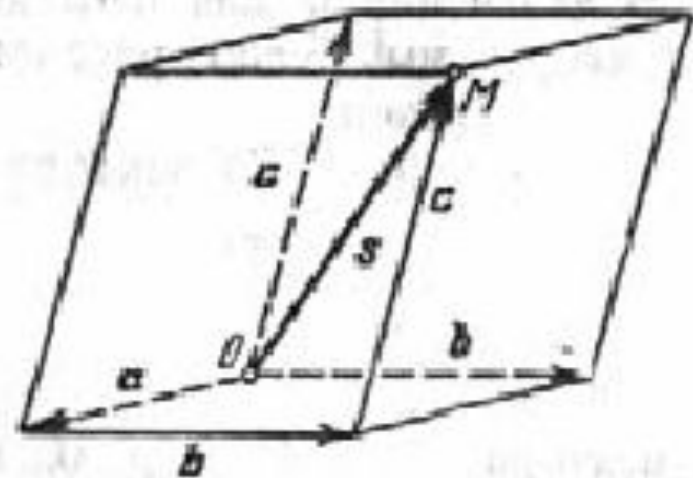
- Для случая двух векторов $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ их суммой является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения (правило параллелограмма).

Так как в любом треугольнике длина одной стороны не превышает суммы длин двух других сторон, то из рис. следует

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



- Для случая трех векторов $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ их суммой является диагональ OM параллелепипеда, построенного на этих векторах (**правило параллелепипеда**).



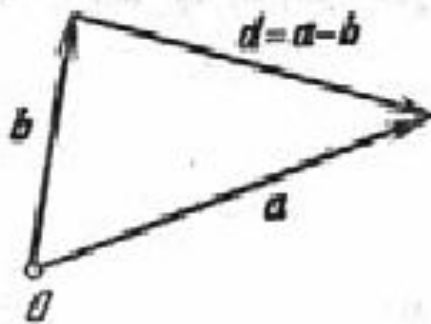
Легко проверить, что для векторного сложения справедливы следующие **свойства**:

- 1) переместительное свойство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 2) сочетательное свойство: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
- Для каждого вектора $\vec{a} = \overline{OA}$ существует противоположный вектор, $-\vec{a} = \overline{AO}$ имеющий ту же длину, но противоположное направление

По правилу параллелограмма имеем $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ где $\vec{0}$ - нуль-вектор. Легко проверить, что $a + (-a) = 0$

Разность векторов

Под разностью векторов a и b будем понимать вектор $d = a - b$, такой что $b + d = a$.



Отметим, что в параллелограмме, построенном на данных векторах a и b , их разностью является соответственно направленная вторая диагональ параллелограмма.

Легко проверить, что справедливо следующее правило вычитания:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Умножение вектора на скаляр.

• Определение. Произведением вектора \mathbf{a} на скаляр k называется вектор, имеющий длину $\mathbf{b} = |k| \mathbf{a}$, направление, которого:

- 1) совпадает с направлением вектора \mathbf{a} , если $k > 0$;
 - 2) противоположно ему, если $k < 0$;
 - 3) произвольно, если $k = 0$.
- Нетрудно убедиться, что данная векторная операция обладает следующими свойствами:

$$1) \quad (k + l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a},$$

$$2) \quad k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b},$$

$$3) \quad k(l\bar{a}) = (kl)\bar{a}$$

$$4) \quad 1^* \bar{a} = \bar{a}, \quad (-1)\bar{a} = -\bar{a}, \quad 0^* \bar{a} = 0,$$

(k, l - скаляры).

Пример 1. $(\bar{a} + 2\bar{b}) - (3\bar{a} - \bar{b}) = -2\bar{a} + 3\bar{b}$

Если ненулевой вектор \mathbf{a} разделить на его длину $a = |\mathbf{a}|$, то мы получим единичный вектор \mathbf{e} , так называемый *орт*, того же направления: $\mathbf{e} = \mathbf{a} / a$

Отсюда имеем стандартную формулу вектора: $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$.

§ 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} называются *коллинеарными*, если они расположены или на параллельных прямых, или же на одной и той же прямой.

Так как направление нулевого вектора произвольно, то можно считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Справедлива **Теорема 1.** Два ненулевых вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, где k — скаляр.

1) Пусть векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ($\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$) коллинеарны и \mathbf{e}, \mathbf{e}' — их орты. Имеем $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$ и $\mathbf{b} = b\mathbf{e}'$, где $\mathbf{e}' = \pm\mathbf{e}$.

Знак плюс соответствует векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} одинакового направления, а знак минус — векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} противоположного направления.

Тогда получаем, что $\mathbf{b} = \pm b\mathbf{e} = \pm b/a (a\mathbf{e}) = \pm (b/a) \mathbf{a}$

Отсюда вытекает формула $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ где $k = \pm b/a$.

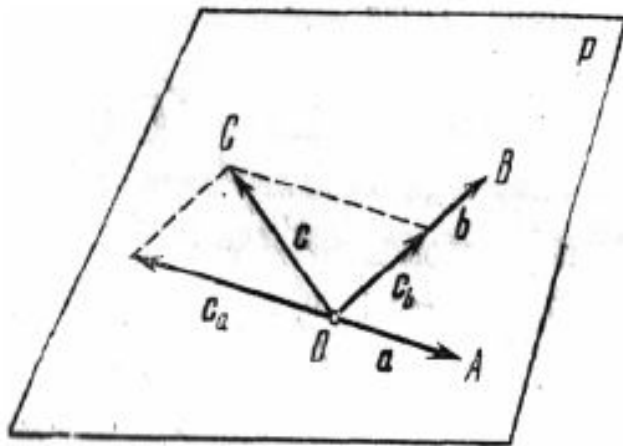
2) Если выполнено равенство, то коллинеарность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} непосредственно следует из смысла умножения вектора на скаляр.

Определение. Три вектора \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Тогда можно сказать также, что векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему началу они лежат в одной плоскости.

- По смыслу определения тройка векторов, среди которых имеется хотя бы один нулевой вектор, компланарна.
- **Теорема 2.** Три ненулевых вектора a , b и c компланарны тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других, т. е., например $c = ka + lb$.

- *Доказательство.* 1) Пусть векторы a , b и c компланарны, расположены в плоскости P и имеют общую точку приложения O .



Предположим сначала, что эти векторы не все попарно коллинеарны, например, векторы a и b неколлинеарны. Тогда, производя разложение вектора c в сумму векторов c_a и c_b коллинеарных, соответственно, векторам a и b , будем иметь, $c = c_a + c_b = ka + lb$ где k и l — соответствующие скаляры.

- Если же векторы a , b , c попарно коллинеарны, то можно написать
- $c = k a = k a + 0b$, и таким образом, снова выполнено условие теоремы
- 2) Обратно, если для векторов $a = OA$, $b = OB$ и $c = OC$ выполнено условие теоремы, то, на основании смысла соответствующих векторных операций, вектор c расположен в плоскости, содержащей векторы a и b , т. е. эти векторы компланарны.