

Дифференциальные уравнения

Тема: *Уравнения 1-го порядка,
не разрешенные относительно y'*

2011 г.

§ 11. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

ДУ 1-го порядка, *разрешенное относительно производной* – уравнение, которое можно записать в виде

$$y' = f(x, y).$$

В общем случае ДУ 1-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Если из уравнения $F(x, y, y') = 0$ нельзя выразить y' , то уравнение называют *не разрешенным относительно производной*.

1. Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть $F(x, y, y') = 0$ таково, что его можно разрешить относительно y' неоднозначно.

Т.е. уравнение $F(x, y, y') = 0$ эквивалентно k различным уравнениям

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad y' = f_3(x, y), \quad \dots, \quad y' = f_k(x, y). \quad (15)$$

Предположим, что для каждого из уравнений (15) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, \quad \dots, \quad \Phi_k(x, y, C) = 0. \quad (16)$$

Совокупность общих интегралов (16) называется **общим интегралом уравнения разрешаемого относительно y' неоднозначно.**

Замечания.

1) Совокупность (16) можно записать в виде

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot \Phi_k(x, y, C) = 0 .$$

2) Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешается относительно y' неоднозначно, то через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ области, в которой рассматривается уравнение, будет проходить в общем случае k интегральных кривых.

Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в точке M_0 будут иметь общую касательную.

ПРИМЕР 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(y')^2 - 4 \cdot x^2 = 0.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию

$$\text{а) } y(1) = 1, \quad \text{б) } y(0) = 0 .$$

2. Неполные уравнения

a) Уравнения, содержащее только производную

Пусть ДУ имеет вид $F(y') = 0$.

Тогда y' не должна зависеть от x и y , т.е. быть постоянной.

Пусть $y' = k_i$ удовлетворяет уравнению $F(y') = 0$.

Тогда $y = k_i x + C$,

$$\Rightarrow k_i = \frac{y - C}{x}.$$

\Rightarrow Общий интеграл уравнения будет иметь вид

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

б) Уравнения, не содержащие искомой функции

Пусть ДУ имеет вид $F(x, y') = 0$, (17)

Возможны 2 случая:

- 1) (17) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
- 2) (17) неразрешимо относительно y' , но допускает параметрическое представление, т.е. может быть заменено двумя уравнениями вида $x = \phi(t)$, $y' = \psi(t)$.

Тогда решения уравнения (17) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx,$$

$$x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi' \cdot dt,$$

$$\Rightarrow dy = \psi(t) \cdot \phi' \cdot dt,$$

$$\Rightarrow y = \int \psi(t) \cdot \phi'(t) dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (17) имеют параметрические уравнения:

$$(18) \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + C. \end{cases}$$

Замечания.

- 1) Общий интеграл уравнения (17) получается исключением параметра t из системы (18) (если это возможно).
- 2) Если уравнение (17) можно разрешить относительно x , т.е. записать в виде $x = \phi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда общий интеграл уравнения (в параметрическом виде):

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t \cdot \varphi'(t) dt + C. \end{cases}$$

в) Уравнения, не содержащие независимой переменной

Пусть ДУ имеет вид $F(y, y') = 0$, (19)

Возможны 2 случая:

- 1) (19) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
- 2) (19) неразрешимо относительно y' , но допускает параметрическое представление, т.е. может быть заменено двумя уравнениями вида $y = \phi(t)$, $y' = \psi(t)$.

Тогда решения уравнения (19) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} & \Rightarrow dx &= \frac{dy}{y'}, \\ y &= \phi(t) & \Rightarrow dy &= \phi'(t) dt, \\ \left. \begin{aligned} dy &= \phi'(t) dt, \\ y' &= \psi(t) \end{aligned} \right\} & \Rightarrow dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt \\ & & \Rightarrow x &= \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt + C. \end{aligned}$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (19) имеют параметрические уравнения:

$$(20) \quad \begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Замечания.

- 1) Общий интеграл уравнения (19) получается исключением параметра t из системы (20) (если это возможно).
- 2) Если уравнение (19) можно разрешить относительно y , т.е. записать в виде $y = \phi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда общий интеграл уравнения (в параметрическом виде):

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

3. Уравнение Лагранжа

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ называется **уравнением Лагранжа**, если оно является линейным относительно x и y , т.е. имеет вид: $F_1(y') \cdot x + F_2(y') \cdot y = G(y')$.

Так как $F_2(y') \neq 0$ (иначе это будет неполное уравнение), то уравнение Лагранжа можно записать в виде

$$y = x \cdot \phi(y') + \psi(y'). \quad (21)$$

Общее решение уравнения Лагранжа можно найти в параметрическом виде.

Если $\phi(y') \neq y'$, то общее решение уравнения (21) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x = \mu(t, C), \\ y = \mu(t, C) \cdot \phi(t) + \psi(t) \end{cases}$$

4. Уравнение Клеро

Пусть в уравнении Лагранжа $\phi(y') \equiv y'$.

В этом случае, уравнение (21) называют уравнением Клеро.

\Rightarrow Уравнение $F(x, y, y') = 0$ называется **уравнением Клеро**, если оно может быть записано в виде

$$y = x \cdot y' + \psi(y'). \quad (22)$$

Общее решение уравнения Клеро имеет вид:

$$y = x \cdot C + \psi(C).$$

Кроме того, если $\psi'(t) \neq \text{const}$, то уравнение Клеро имеет особое решение

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t). \end{cases}$$