Інтегральне числення

1. **Первісна. Означення. Властивості**
2. **Невизначений інтеграл. Означення. Властивості**
3. **Таблиця інтегралів**
4. **Інтеграли, що не обчислюються в скінченому вигляді**
5. **Метод заміни змінної**
6. **Метод підведення під знак диференціала**
7. **Метод інтегрування частинами**
8. **Інтегрування раціональних дробів**
9. **Інтегрування деяких ірраціональних функцій**
10. **Інтегрування тригонометричних функцій**
11. **Тригонометричні підстановки.**

Короткі историчні відомості

- Поняття інтеграла та інтегрального числення виникли через необхідність обчислювати площі фігур і поверхонь та об'ємів довільних тіл.
- Символ   увів Лейбніц у 1686 році.
- Інтеграл - центральне поняття інтегрального числення, узагальнення поняття суми для функції, що визначена на континуумі.

Короткі історичні відомості

- Історія розвитку понять інтеграла й інтегрального числення пов’язана з потребою в обчисленні площ фігур, а також поверхонь і об’ємів довільних тіл. Передісторія інтегрального числення сягає глибокої давнини: ідеї інтегрального числення можна знайти в роботах давньогрецьких учених Евдокса Кнідського (бл.408-355 до н.е.) і Архімеда (бл.287-212 до н.е.).

Первісна. Означення. Властивості.

О. Функція $F(x)$ називається *первісною* («первообразной» рос.) для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо

$F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in (a,b)$

Мають місце властивості:

1^0. Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ - також первісна для $f(x)$ на (a,b).

2^0. Якщо $F_1(x), F_2(x)$ - дві первісні для функції $f(x)$ на (a,b), то $F_1(x)-F_2(x)=C$, тобто різниця двох первісних для функції $f(x)$ є константою.

Невизначений інтеграл. Означення.

<u>О.</u> *Невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку (a,b) називається сукупність первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ на цьому проміжку, де С – довільна стала, а функція $F(x)$ така, що $F'(x)=f(x)$.

Позначення невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$.

Отже, за означенням

$\int f(x)dx = F(x)+C$ (1), де $F'(x)=f(x)$. (2)

Тоді $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+C$, бо $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$;

$\int \cos dx = \sin x + C$, бо $(\sin x)' = \cos x$;

Властивості

$1^0.\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Д. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$

$2^0.\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Д. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int fF(x)dx\right)' \cdot dx = f(x)\cdot dx$

$3^0.\ \int f'(x)dx = f(x)+C$

$4^0.\ \int d(f(x)) = \int f'(x)dx = f(x)+C$

$5^0.\ \int af(x)dx = a\int f(x)dx$, a – число.

$6^0.\ \int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

$7^0.\ \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$, (*)

де $F(ax)$ - первісна для $f(ax)$, a – деяке число.

Властивості

$8^0.\quad \int f(x+b)dx = F(x+b)+C,$

де $F(x+b)$ первісна для $f(x+b)$, b - деяке число.

$9^0.\quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$

де $F(ax+b)$ первісна для $f(ax+b)$, a, b - деякі числа.

Таблиця інтегралів

- Показникова і степенева функції

$$
\mathrm{I}\begin{cases}
1. \quad \int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1 \\
1.a) \ \int 1\cdot dx = \int dx = x + C \qquad (\alpha = 0 \text{ в формулі 1.}) \\
2. \quad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
3. \quad \int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \\
4. \quad \int e^{x}dx = e^{x} + C
\end{cases}
$$

Таблиця інтегралів

Тригонометричні функції

$$\text{II}\begin{cases} 5.\ \int \sin x dx = -\cos x + C \\ 6.\ \int \cos x dx = \sin x + C \\ 7.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \\ 8.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \end{cases}$$

Гіперболічні функції

$$\text{III}\begin{cases} 9.\ \int shxdx = chx + C \\ 10.\ \int chxdx = shx + C \\ 11.\ \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C \\ 12.\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C \end{cases}$$

Таблиця інтегралів

Обернені тригонометричні функції

IV

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc}\,tgx + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arc}\,tg \frac{x}{a} + C$

Деякі часто вживані інтеграли

V

17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

Таблиця інтегралів

Деякі інтеграли від тригонометричних функцій

$$\text{VI}\begin{cases} 20.\ \int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C \\ 21.\ \int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C \\ 22.\ \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \\ 23.\ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \end{cases}$$

Інтеграли, що не обчислюються в скінченому вигляді

1. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – інтегральний синус

2. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – інтегральний косинус

3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм

4. $\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл ймовірностей

5. $\int x^{\alpha} \sin x dx, \quad \int x^{\alpha} \cos x dx, \quad \int x^{\alpha} e^{x} dx, \quad (\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots)$

Метод заміни змінної

<u>Т.</u> Нехай

а) функція $f(x)$ неперервна на (a,b)

б) функція $x=\phi(t)$ неперервна і диференційовна на (c,d)

в) функція $x=\phi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi(x)$, яка є диференційовною.

Тоді має місце формула:

$$\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt, \qquad (1)$$

в якій після взяття інтеграла справа покласти $t=\varphi(x)$.

Метод заміни змінної

Приклад. Знайти інтеграл, використовуючи заміну змінної

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left| \begin{array}{l} x = a \cdot t \\ dx = adt \\ t = \dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \int \frac{adt}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} arctgt + C =$$

$$= \left| t = \frac{x}{a} \right| = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

Метод підведення під знак диференціала

Метод є частинним випадком методу заміни змінної і базується на властивості інваріантності (незмінності) формули інтегрування відносно змінної інтегрування. На прикладах це виглядає так:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C; \quad \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C; \quad \int \ln^2 d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Формула застосована одна й таж, а змінні різні.

Формула для методу підведення під знак диференціала:

$$\int f[\phi(x)]d(\phi(x)) = F[\phi(x)] + C, \qquad (3)$$

де $F[\phi(x)]$ - первісна для функції $f[\phi(x)]$.

Переваги методу: після взяття інтеграла не треба переходити до старої змінної.

Метод підведення під знак диференціала

Приклади.

1. $\int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| = \int \sin^4 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

2. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left| d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right| = \int \ln^3 x \, d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$

3. $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \left| \begin{matrix} d(x^2+1) = 2xdx \\ xdx = \frac{d(x^2+1)}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

4. $\int x(5x^2+7)^6 dx = \left| \begin{matrix} d(5x^2+7) = 10xdx \\ xdx = \frac{d(5x^2+7)}{10} \end{matrix} \right| = \frac{1}{10} \int (5x^2+7)^6 d(5x^2+7) =$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{(5x^2+7)^7}{7} + C.$

Інтегрування частинами

Т. Нехай функція $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовні, тоді має місце формула:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами.

Зауваження. Труднощі в застосуванні формули (1) полягають у тому, що як правило задається інтеграл для обчислення у вигляді $\int f(x)dx$, а не $\int u dv$.

Тому виникає дві задачі:

1. Звести $\int f(x)dx$ до вигляду $\int u dv$

2. Обчислити $\int u dv$ за формулою. (1)

Інтегрування частинами

Наведемо деякі такі класи функцій з вказанням, що приймається за u та dv.

1) $\int \underbrace{P_n(x)}_{u}\underbrace{\cos mx\,dx}_{dv}$, $\quad \int \underbrace{P_n(x)}_{u}\underbrace{\sin mx\,dx}_{dv}$, $\quad \int \underbrace{P_n(x)}_{u}\underbrace{e^{mx}\,dx}_{dv}$

Тут $P_n(x)$ - многочлен степеня n, n, m - задані числа.

2) $\int \underbrace{P_n(x)}\,\underbrace{arctg\,mx}_{u}\,\underbrace{dx}$, $\quad \int \underbrace{P_n(x)}\,\underbrace{\arcsin mx}_{u}\,\underbrace{dx}$, $\quad \int \underbrace{P_n(x)}\,\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}$

dv $\qquad$ dv $\qquad$ dv

3) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, $\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$.

Тут немає значення, що приймати за u, двічі застосовується метод інтегрування частинами, в результаті чого приходимо до рівняння відносно шуканого інтеграла.

Метод інтегрування частинами може застосовуватись повторно, наприклад для інтегралів $\int x^2 e^x dx$, $\int x^3 \sin x dx$ та інших.

Інтегрування частинами

Приклади.

$$1.\ \int xe^{5x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \qquad du = dx \\ dv = e^{5x}dx;\ v = \int e^{5x}dx = \left|d(5x) = 5dx\right| = \\ = \frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C \end{array} \right| = \left|\int udv = u\cdot v - \int vdu\right| =$$

$= 0$ (завжди, бо шукаємо одну функцію v, а не сукупність)

$$= x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C$$

$$2.\ I = \int arctgx\ dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx; & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx; & v = \int dx = x \end{array} \right| = \left|\int udv = u\cdot v - \int vdu\right| =$$

Інтегрування частинами

$$= arctgx \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} d\left(1+x^2\right) = 2xdx \\ xdx = \dfrac{d\left(1+x^2\right)}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$I = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Інтегрування раціональних дробів

1. *Інтегрування найпростіших дробів.*

а) I тип: $\dfrac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

б) II тип: $\dfrac{A}{(x-a)k}$, $k>1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

Інтегрування раціональних дробів

в) III тип: $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D=p^2-4q<0 \Rightarrow \dfrac{p^2}{4}-q<0$.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx=\left|\begin{array}{l} q-\frac{p^2}{4}>0 \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|=$$

знаменник має комплексні корені позначення

виділяємо повний квадрат

$$=\int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx=\left|\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt=$$

заміна

розкрили дужки і на суму двох інтегралів

$$=A\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+\left(B-A\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(B-A\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(B-A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=\left|\begin{array}{l} t=x+\frac{p}{2} \\ t^2+a^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2= \\ =x^2+px+q \end{array}\right|=$$

Інтегрування раціональних дробів

г) IV тип

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

$k>1,\ p^2-4q<0$ – не наводимо через громіздкість виведення. Див. літературу.

2. Інтегрування правильного раціонального дробу.

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m<n.$$

Раціональний дріб розкладається на суму найпростіших дробів, кожний з яких інтегрується за наведеними в п 1. правилами.

3. Інтегрування неправильного раціонального дробу.

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m\geq n.$$

Інтегрування раціональних дробів

Приклад.

$$I=\int\frac{x}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{x}{(x-3)(x-2)}dx=\int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}\right)dx$$

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

$$x=A(x-2)+B(x-3)$$

$$\begin{array}{l|ll} x=3 & 3=A\cdot 1; & A=3 \\ x=2 & 2=B\cdot(-1); & B=-2 \end{array}$$

$$I=\int\left(\frac{3}{x-3}+\frac{-2}{x-2}\right)dx=3\int\frac{dx}{x-3}-2\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3\int\frac{d(x-3)}{x-3}-2\int\frac{d(x-2)}{x-2}=3\ln|x-3|-2\ln|x-2|+C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx = \left|\begin{array}{c} x = t^k \\ dx = kt^{k-1}dt \\ x^{\frac{r_i}{s_i}} = t^{k_i} \\ t = x^{\frac{1}{k}} \end{array}\right| = \int \underbrace{R\left(t^k, t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_n}\right)kt^{k-1}dt}_{\substack{\text{це раціональна функція} \\ \text{однієї змінної } t:r(t)}} = \int r(t)\,dt$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, поклавши $t = x^{\frac{1}{k}}$.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Отже $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx=\left|\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}=t^k\\ x=r(t)\\ dx=r'(t)dt\\ t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}\end{array}\right|=$

$$=\int\underbrace{R\left(r(t),t^{k_1},t^{k_2},\ldots,t^{k_n}\right)r'(t)}_{\substack{\text{раціональна функція}\\ \text{однієї змінної } t:r_1(t)}}dt=\int r_1(t)\,dt,$$

після взяття інтеграла треба повернутись до старої змінної, наклавши $t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Приклад. Обчислити інтеграл:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\left|\begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ \sqrt[3]{x}=t^2 \\ \sqrt{x}=t^3 \\ t=x^{\frac{1}{6}} \end{array}\right|=\int\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt=6\int\frac{t^8}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+arctgt\right)+C,$$ де $t=x^{\frac{1}{6}}$.

$$\frac{t^8}{t^2+1}=t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

Для отримання цього виразу виконуємо ділення «кутом».

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

$$
\begin{array}{l|l}
t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\
-t^6 & \\
-\underline{-t^6-t^4} & \\
\qquad t^4 & \\
\quad -\underline{t^4+t^2} & \\
\qquad\quad -t^2 & \\
\qquad -\underline{-t^2-1} & \\
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

Інтегрування тригонометричних функцій Універсальна підстановка

Відомо, що функції $\sin x$ та $\cos x$ виражаються через $tg\frac{x}{2}$, а саме:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Тому універсальною підстановкою є підстановка $t = tg\frac{x}{2}$, за допомогою якої беруться інтеграли зазначеного нижче вигляду.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = arctgt \\ x = 2arctgt \\ dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)\,dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = tg\frac{x}{2}$.

Інтегрування тригонометричних функцій

2. Нехай $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$.

Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cdot \underbrace{\cos x\,dx}_{d(\sin x)} =$$

$$= \int R_1\left(\sin x, \cos^2 x\right) d(\sin x) = \int R_1\left(\sin x, 1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) =$$

$$= \left|\sin x = t\right| = \int R_1\left(t, 1 - t^2\right) dt = \int r(t)\,dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = \sin x$.

Інтегрування тригонометричних функцій

3. Нехай $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$

Тобто підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$.
Тоді, аналогічно попередньому:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \cdot \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} =$$

$$= -\int R_1\left(\sin^2 x, \cos x\right) d(\cos x) = -\int R_1\left(1-\cos^2 x, \cos x\right) d(\cos x) =$$

$$= \left|\cos x = t\right| = -\int R_1\left(1-t^2, t\right) dt = \left|\begin{matrix} -R_1\left(1-t^2, t\right) = \\ = r(t) \end{matrix}\right| = \int r(t)\,dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = \cos x$.

<u>Зауваження.</u> Далі будуть потрібні формули, що виражають $\cos^2 x$ та $\sin^2 x$ через tgx.

Відомо, що $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x}$;

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x = 1 + \frac{1}{tg^2 x} = \frac{1+tg^2 x}{tg^2 x}; \Rightarrow \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}.$$

нтегрування тригонометричних функцій

4. Нехай $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, тобто підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ присутні в парних степенях в підінтегральній функції.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = tg\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{x}{2} = arctgt \\ dx = 2\dfrac{1}{1+t^2}dt \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)\,dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = tgx$.

Інтегрування тригонометричних функцій

5. Нехай підінтегральна функція є функцією від tgx, тобто $R(tgx)$

$$\int R(tgx)\,dx = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ x = arctgt \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt \end{array} \right| == \int R(t)\frac{1}{1+t^2}dt = \int r(t)\,dt.$$

Після взяття інтеграла треба покласти $t = tgx$.

Інтегрування тригонометричних функцій

6. Нехай задано інтеграли вигляду

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \quad \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \quad \int \cos\alpha x \cos\beta x dx.$$

У даному випадку підінтегральні функції перетворюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Інтегрування тригонометричних функцій

Приклади.

1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{x}{2} = arctgt \\ x = 2arctgt \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \left| t = tg\frac{x}{2} \right| = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C.$$

2. $$\int \cos^3 x dx = \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int \left(1 - \sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) =$$

$$= \int d\left(\sin x\right) - \int \sin^2 x \, d\left(\sin x\right) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Тут підінтегральна функція була непарна відносно $\cos x$, відокремили $\cos x$ і далі підведення під знак диференціала і тригонометричні формули.

Інтегрування тригонометричних функцій

$$3.\ \int \cos^2 x dx = \left| \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right| = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$4.\ \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 cos^2 x dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Тригонометричні підстановки

1. $$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\sin t \end{array}\right| = -\int R(a\cos t, a\sin t)\,a\sin t\,dt =$$

$$= \int R_1(\sin t,\cos t)\,dt.$$

2. $$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = a\,tg\,t \\ dx = a\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t} \end{array}\right| = \int R\left(a\,tg\,t, \frac{a}{\cos t}\right)a\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int R_1(\sin t,\cos t)\,dt.$$

3. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ dx = -\dfrac{a}{\cos^2 t}\cdot(\sin t)\,dt \\ \sqrt{a^2+x^2} = a\,tg\,t \end{array}\right| = \int R\left(\frac{a}{\cos t}, a\,tg\,t\right)\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int R_1(\sin t,\cos t)\,dt.$$

Тригонометричні підстановки. Приклад

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left| \begin{aligned} & x = \cos t \\ & dx = -\sin t\,dt \\ & \sqrt{1-x^2} = \sin t \end{aligned} \right| = -\int \frac{\sin t}{\sin^3 t}dt = -\int \frac{1}{\sin^2 t}dt =$$

$$= ctgt + C = \frac{\cos t}{\sin t} + C = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} + C = \left|\cos t = x\right| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$