

Раздел 1. Функции многих переменных

§ 1. Определение. Геометрический смысл.

Определение 1. Если каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ по некоторому закону f поставлено, в соответствие хотя бы одно действительное число $z \in E$, то говорят, что задана функция $z = f(x, y)$ - функция 2-х переменных, при этом
 D - область определения
 E - область изменения (значения) функции.

Рассмотрим 3-х мерное пространство. Если точкам области поставить в соответствие точки в пространстве то все точки будут образовывать поверхность, которая проектируется в область D .

Геометрический смысл – это поверхность в 3-х мерном пространстве.

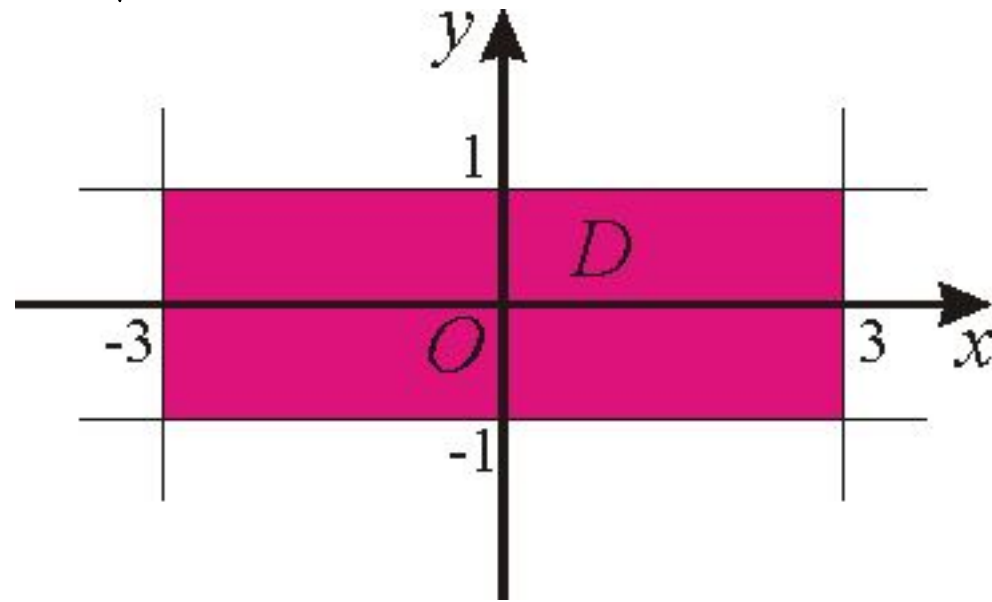
Определение 2. Если каждому упорядоченному набору действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ ставится по некоторому закону f в соответствие действительное число $z \in E$, то говорят, что задана функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция многих переменных (ФМП)

Замечание. Если ФМП задается аналитически, то под D понимают все те значения, при которых она имеет смысл.

Например: $z = \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{9 - x^2}$

$$\begin{cases} y^2 \leq 1 \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leq 1 \\ |x| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Для нахождения D ФМП придется решать системы неравенств.

Замечание. Для ФМП с числом переменных > 2 нет геометрического аналога.

§ 2. Предел функции многих переменных.

Непрерывность функции многих переменных.

Определение 3. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon \right)$$

При этом пишут:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

Замечание. Предел функций в точке не зависит от того, каким образом x и y стремятся к x_0 и y_0 .

Согласно этому замечанию при вычислении пределов поступают следующим образом:

если предел зависит от способа приближения к точке (x_0, y_0) , то в этом случае говорят, что предел не существует; если предел не зависит от способа стремления к точке (x_0, y_0) , то предел существует.

Определение 4. Функция $z = f(x, y)$ называется бесконечно малой при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon \right)$$

$$\exists \delta > 0 \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = 0$$

т.е. $\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{matrix}$

Определение 5. Функция $z = f(x, y)$ называется бесконечно большой при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| > \varepsilon \right)$$

$$\text{т.е. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$$

Определение 6. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \right)$

$$\text{т.е. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Если ввести приращение функции:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

то определение непрерывности можно записать следующим образом:

Определение 7. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) , если $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$.

Замечание. Все теоремы, доказанные для функции одной переменной переносятся и на случай функций многих переменных.

§ 3. Производные функций многих переменных. Их геометрический смысл.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D . Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in D$.

Дадим приращение Δx , такое, что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$.

Рассмотрим разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Назовём её частным приращением функции z и обозначим $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Рассмотрим отношение: $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$

Определение 8. Если существует конечный

предел отношения $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то этот

предел называется частной производной функции z по переменной x и обозначается:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ производится: частная производная функции z по переменной x .

Определение 9. Если существует конечный предел отношения $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ к Δy при $\Delta y \rightarrow 0$, то этот предел называется частной производной функции z по переменной y и обозначается:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$$

Замечание: из определения видно, что при нахождении частной производной по переменной x , переменная y – константа; при нахождении частной производной по переменной y , x – константа.

Геометрический смысл частной производной

$\frac{\partial z}{\partial x}$ - это тангенс угла наклона касательной,

проведенной к графику функции $z_1 = f(x, y_0)$, лежащему в плоскости $y = y_0$ с положительным направлением оси x .

$\frac{\partial z}{\partial y}$ - это тангенс угла наклона касательной,

проведенной к графику функции $z_1 = f(x_0, y)$, лежащему в плоскости $x = x_0$ с положительным направлением оси y .

§ 4. Дифференцируемость.

Дифференциал функции двух переменных.

Определение 10. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0)$, если в некоторой окрестности точки M приращение этой функции представимо в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y.$$

где A, B – зависят только от значений (x_0, y_0) ; и

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Определение 11. Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ называется главная линейная часть приращения функции. При этом вводится обозначение:

$dz = A\Delta x + B\Delta y$ – дифференциал функции двух переменных.

Необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных.

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Без доказательства.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M(x_0, y_0)$, то в точке $M(x_0, y_0)$ существуют частные производные:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$$

Без доказательства.

Замечание. Так как дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ выражается в виде:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y,$$

То, в соответствии с теоремой 2:

$$dz = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta y$$

Замечание. Встречается обозначение:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial z}{\partial y}(M)$$

где: $M = M(x_0, y_0)$.

Если для функции одной переменной существование производной являлось достаточным условием дифференцируемости функции в точке, то для функции двух переменных это не так. Из существования производной не следует дифференцируемость функции. Функция будет дифференцируемой в точке, если выполняется условие следующей теоремы:

Теорема 3. (Достаточное условие дифференцируемости) Для того, чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, достаточно, чтобы в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ и в самой точке существовали непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Без доказательства.

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функций двух переменных.

Вспомним, что общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ задаётся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где: A, B, C – направляющие косинусы нормали к плоскости, т.е. $\vec{n} = (A, B, C)$.

Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ задаётся формулой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

где: m, n, p – косинусы направляющего вектора прямой, т.е. $\vec{l} = (m, n, p)$.

Определение 12. Плоскость называется касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$, если поверхность и плоскость имеют одну общую точку $M(x_0, y_0)$.

Определение 13. Нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$, называется прямая, проходящая через точку $M(x_0, y_0)$, перпендикулярно к плоскости, касательной к поверхности в этой точке.

Определение 14. Нормальным вектором к поверхности называется вектор нормали касательной плоскости или направляющий вектор нормали.

Теорема 4. (Существование плоскости, касательной к поверхности) Если $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то существует плоскость, касательная к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$, причём:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot (y - y_0)$$

Без доказательства.

Следствие 1. Так как координаты нормали к плоскости, касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$\vec{n} = \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(M), -\frac{\partial z}{\partial y}(M) \right)$$

то направляющий вектор нормали к поверхности имеет вид:

$$\vec{l} = \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(M), -\frac{\partial z}{\partial y}(M) \right)$$

Следствие 2. Так как дифференциал функции $z = f(x, y)$ выражается:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot (y - y_0)$$

и уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot (y - y_0)$$

то геометрический смысл дифференциала – приращение аппликаты касательной плоскости.

Ось z – это ось аппликат.

Обозначим: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, тогда:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

§ 6. Дифференцирование сложных функций.

§ 7. Инвариантность формы записи первого дифференциала.

§ 8. Неявные функции.

§ 9. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

§ 10. Неинвариантность формы записи второго дифференциала.

§ 11. Формула Тейлора ФНП.

§ 12. Экстремумы функции многих переменных.

Определение 1. Точка $M(x_0, y_0)$ называется тах (min) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M(x_0, y_0)$, что $\forall x \in$ этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ – для тах;}$$

$$(f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \text{ – для min}).$$

Определение 2. Точка $M(x_0, y_0)$ называется тах (min) функции $z = f(x, y)$, если существует $\exists \delta > 0$ (сколь угодно малое), что для $\forall x, y$ из того, что:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow$$

(немедленно следует) $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ – для тах²²;

Теорема 1. (Необходимое условие существования точки экстремума) Если точка $M(x_0, y_0)$, является точкой максимума или минимума функции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в окрестности точки $M(x_0, y_0)$, то частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = 0$$

Без доказательства.

Замечание. Может оказаться, что существуют точки, в которых есть максимум или минимум, но производная в которых не существует.

Теорема 2. (Достаточное условие существования экстремума) Если в точке $M(x_0, y_0)$ – критической точке для функции $z = f(x, y)$, функция z дважды дифференцируема, то если:

1) выражение

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$$

при $f''_{xx} > 0$ или $f''_{yy} > 0$, то $M(x_0, y_0)$ – точка минимума.

при $f''_{xx} < 0$ или $f''_{yy} < 0$, то $M(x_0, y_0)$ – точка максимума.

2) Если выражение $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то экстремума не существует.

3) Если выражение $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Без доказательства.

Понятие об условном экстремуме.

Определение 3. Точка $M(x_0, y_0)$ называется точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M , такая, что для $\forall x \in$ окрестности точки M и удовлетворяющего уравнению: $\phi(x, y) = 0$, выполняется неравенство:

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ – точка max;

$(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$ – точка min).

При решении задач на условный экстремум применяется метод множителей Лагранжа. Суть его в следующем: Лагранж предложил ввести новую независимую переменную λ - множитель Лагранжа и вместо решения исходной задачи, исследовать на экстремум:

$$z^* = f(x, y) - \lambda \cdot \phi(x, y).$$

Схема дальнейшего исследования такая, какая и для исследования обычной функции на экстремум:

1) Находим критические точки:

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z^*}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} = 0$$

2) Применяем достаточное условие экстремума и определяем характер критической точки.

Понятие о наибольшем и наименьшем значениях функции в области.

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в области D :

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = \varphi(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

То эта задача решается так:

1) Находим точки экстремума в области D .

2) На каждой границе области исследуем функцию на наибольшее и наименьшее значение. Для этого уравнение каждой границы подставляем в уравнение исходной функции и исследуем функцию одной переменной:

$$z_1 = f(x, f_1(x))$$

$$z_2 = f(x, \phi(x))$$

$$z_3 = f(x, 0).$$

3) Наибольшее и наименьшее значение функции z в области D будет находиться среди точек экстремума $\subset D$ и среди наибольших и наименьших значений, вычисленных на границе.