Схема Бернулли

Проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых возможно 2 исхода, которые условно назовем Успех и Неудача.

Например, студент сдает 4 экзамена, в каждом из которых возможно 2 исхода Успех: студент сдал экзамен и Неудача: не сдал.

Вероятность Успеха в каждом испытании равна p. Вероятность Неудачи равна $q=1-p$.

Требуется найти вероятность того, что в серии из n испытаний успех наступит m раз

$P_n(m)$

$$B_m = \acute{O} \cdot \acute{O} \cdot \ldots \cdot \acute{O} \cdot \acute{I} \cdot \ldots \cdot \acute{I} +$$

$$+ \acute{I} \cdot \acute{O} \cdot \ldots \cdot \acute{O} \cdot \acute{I} \cdot \ldots \cdot \acute{I} + \ldots +$$

$$+ \acute{I} \cdot \acute{I} \cdot \ldots \cdot \acute{I} \cdot \acute{O} \cdot \ldots \cdot \acute{O}$$

В каждом случае Успех происходит m раз, а Неудача *(n-m)* раз.

Число всех комбинаций равно числу способов из n испытаний выбрать те *m*, в которых был Успех, т.е. C_n^m

Вероятность каждой такой комбинации по теореме об умножении вероятностей составит $p^m q^{n-m}$.

Так как эти комбинации несовместны, то искомая вероятность события B_m будет

$$P_n(m) = p^m \cdot q^{n-m} + \ldots + p^m \cdot q^{n-m} =$$

$$= \left\{ \text{âñåãî } C_n^m \text{ ñëàãàåì û õ} \right\} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Формула Бернулли

ПРИМЕР.

Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Какова вероятность, что

1) ***трое из них окажутся на лекции***
2) ***на лекции окажется не меньше 3 студентов***

2) хотя бы один из студентов попадет на лекцию?

Решение:

1) В данной задаче проводится серия из n=5 независимых испытаний. Назовем Успехом поход на лекцию (выпадение решки) и Неудачей – поход в кино (выпадение герба).

   p=q=1/2.

По формуле Бернулли находим вероятность того, что при 5 бросаниях монеты трижды случится успех:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{5!}{3!2!}\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = 10 \cdot \frac{1}{32} = 0,3125$$

Чтобы найти вероятность того, что при 5 бросаниях хотя бы один раз монета выпадет решкой, перейдем к вероятности противоположного события - монета все 5 раз выпадет гербом:

$P_5(0)$.

Тогда искомая вероятность будет: ***$P=1-P_5(0)$.***

По формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,03125$$

Тогда вероятность искомого события составит

$$P = 1 - 0.03125 = 0,96875$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

***<u>Пример</u>* Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?**

***<u>Пример</u>* Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?**

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Формула для ***наиболее вероятного числа успехов***

$$np - q \leq k \leq np + p$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Формула для ***наиболее вероятного числа успехов***

$$np - q \leq k \leq np + p$$

Если np-q– целое число, то в этом интервале лежит 2 целых числа. Оба равновероятны.

Если np-q – нецелое число, то в этом интервале лежит 1 целое число

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

__Пример__ **Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?**

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 5 \qquad p = q = \frac{1}{2}$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 5 \qquad p = q = \frac{1}{2}$$

$$np - q = 5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 \qquad np + p = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 5 \qquad p = q = \frac{1}{2}$$

$$np - q = 5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 \qquad np + p = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$2 \le k \le 3 \qquad k = 2, \quad k = 3$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

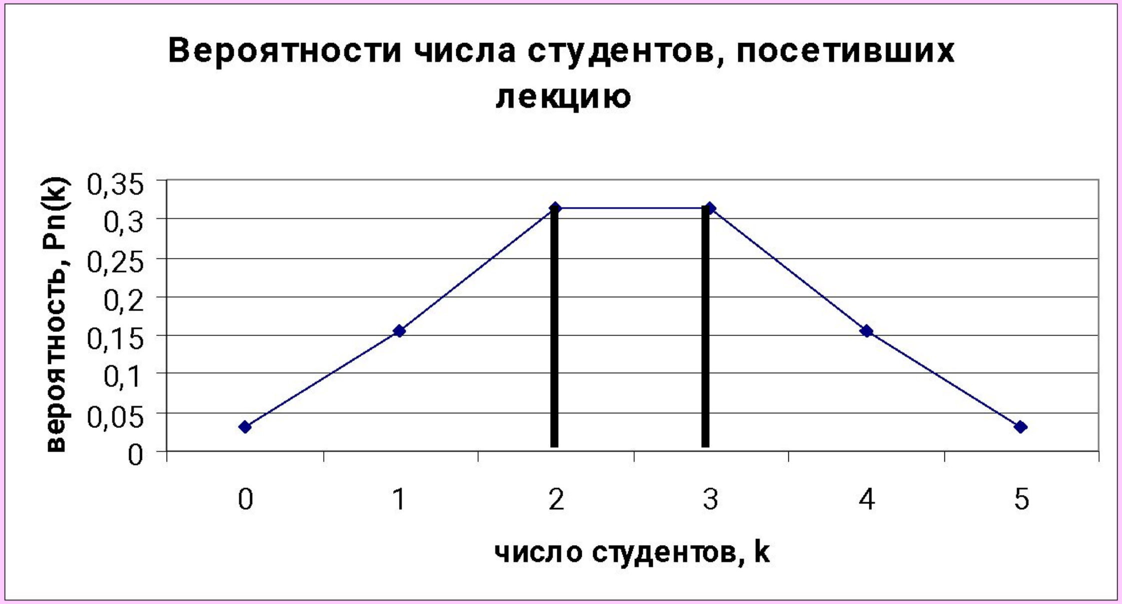
<u>Пример</u> Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?

$$P_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

$$P_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>**Пример**</u> **Известно, если монета упадет орлом, студент идет в кино, если монета упадет решкой – студент идет на лекцию. Монету бросило 5 студентов. Каково наиболее вероятное число студентов, идущих на лекцию?**



Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 10 \qquad p = 0,2 \quad q = 0,8$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 10 \qquad p = 0,2 \quad q = 0,8$$

$$np - q = 10 \cdot 0,2 - 0,8 = 1,2 \qquad np + p = 10 \cdot 0,2 + 0,2 = 2,2$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>**Пример**</u> **Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?**

$$np - q \le k \le np + p$$

$$n = 10 \qquad p = 0,2 \qquad q = 0,8$$

$$np - q = 10 \cdot 0,2 - 0,8 = 1,2 \qquad np + p = 10 \cdot 0,2 + 0,2 = 2,2$$

$$1,2 \le k \le 2,2 \qquad k = 2$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?

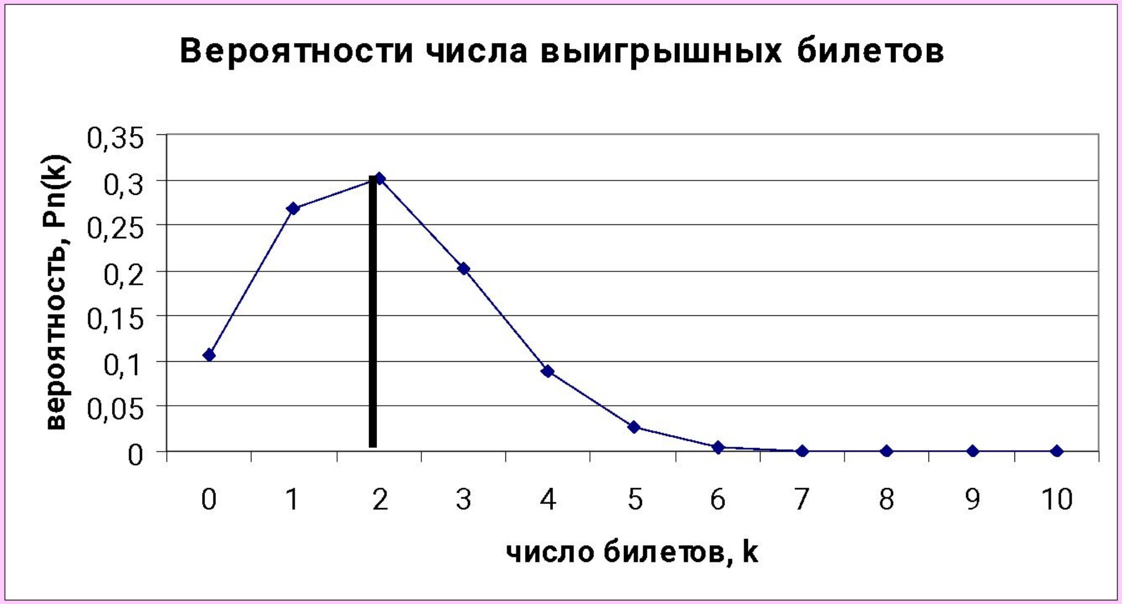
$$P_{10}(2) = C_{10}^{2} 0,2^{2} 0,8^{8} =$$

$$= 45 \cdot 0,04 \cdot 0,16777216 =$$

$$= 0,301989888$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по 1 билету равна 0,2. Каково наиболее вероятное число выигравших билетов?



Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Пример **В среднем по 20% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму.**
Заключено 10 договоров
а) Найти вероятность того, что по трем придется выплатить страховую сумму
б) Страховую сумму не придется выплачивать ни по одному из договоров
в) страховую сумму придется выплатить не более, чем по трем договорам
г) найти наиболее вероятное число договоров, по которым придется выплатить страховую сумму

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Пример ***В среднем по 20% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Заключено 10 договоров***
а) Найти вероятность того, что по трем придется выплатить страховую сумму

0,201327

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

<u>Пример</u> В среднем по 20% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Заключено 10 договоров
б) Страховую сумму не придется выплачивать ни по одному из договоров

0,107374

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Пример ***В среднем по 20% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Заключено 10 договоров***
в) страховую сумму придется выплатить не более, чем по трем договорам

0,753297

Схема Бернулли при больших n и малых p

Если n велико, то использование формулы

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

затруднительно

Поэтому применяются приближенные формулы

Схема Бернулли при больших n и малых p

<u>Теорема:</u> Если вероятность p наступления события A в каждом испытании близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность Pn(m) того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

где λ=np

Эта формула называется формулой Пуассона (закон редких событий)

Схема Бернулли при больших n и малых p

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Обычно приближенную формулу Пуассона применяют, когда $p<0,1$, а $npq<10$.

Схема Бернулли при больших n и малых p

Пример Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что серди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

Схема Бернулли при больших n и малых p

<u>Пример</u> Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что серди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

$$P_{1000}(3) = ?$$

Схема Бернулли при больших n и малых p

Пример Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что серди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

$$P_{1000}(3) = ?$$

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$$

$$P_{1000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} 0,135 = 0,18$$

Схема Бернулли при больших n и малых p

Пример В среднем по *1* % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 100 договоров с наступлением страхового случая будет связано не более 5 договоров.

Схема Бернулли при больших n и малых p

Пример В среднем по *1* % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 100 договоров с наступлением страхового случая будет связано не более 5 договоров.

0,631526