Лекция 2

1. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера
2. Вычисление функций с помощью степенных рядов
3. Многочленные приближения
4. Вычисление функций методом итераций

Вычисление значений различных математических функций иногда представляет собой самостоятельную задачу, а иногда необходимо при решении других задач. Функции, даже элементарные, не могут быть вычислены с помощью операций языка программирования, и поэтому вычисляются с помощью программ.

Некоторые элементарные функции (тригонометрические, логарифмические, гиперболические и ряд других) могут быть вычислены с помощью программ, входящих в состав систем программирования. Например, для вычисления функций при программировании на языке **Visual Basic** могут быть использованы многочисленные процедуры (методы) класса **System.Math**. Для использования этих функций в программе на **Visual Basic** необходимо в начале файла с программой поместить код **Imports System.Math**.

Еще большие возможности по вычислению функций дают математические пакеты прикладных программ (ППП), например, знакомые вам **MathCad** и **MatLab**. Но на практике может возникнуть необходимость вычисления функции, отсутствующей даже в ППП, а, следовательно, необходимость разработки собственной программы с использованием известных методов решения задачи. В любом случае необходимо знать методы вычисления различных функций и оценки вносимых ими погрешностей, чтобы грамотно

Вычисление значений многочлена. Постановка задачи

Пусть дан многочлен (полином) **n**-й степени:

$$\mathbf{P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$$

с действительными коэффициентами

$$\mathbf{a_i\ (i = 0, 1, \ldots n)}$$

и пусть требуется найти значение этого многочлена при $\mathbf{x = u}$:

$$\mathbf{P_n(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n}$$

Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Вычисление эффективнее всего выполнять, используя лишь операции сложения и умножения. Пусть, например, **n = 7**. Тогда

$$P_7(u) = a_0u^7 + a_1u^6 + a_2u^5 + a_3u^4 + a_4u^3 + a_5u^2 + a_6u + a_7$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$P_7(u) = (((((((a_0u + a_1)u + a_2)u + a_3)u + a_4)u + a_5)u + a_6)u + a_7)$$

Тогда вычисление $P_7(u)$ требует выполнения следующей последовательности действий:

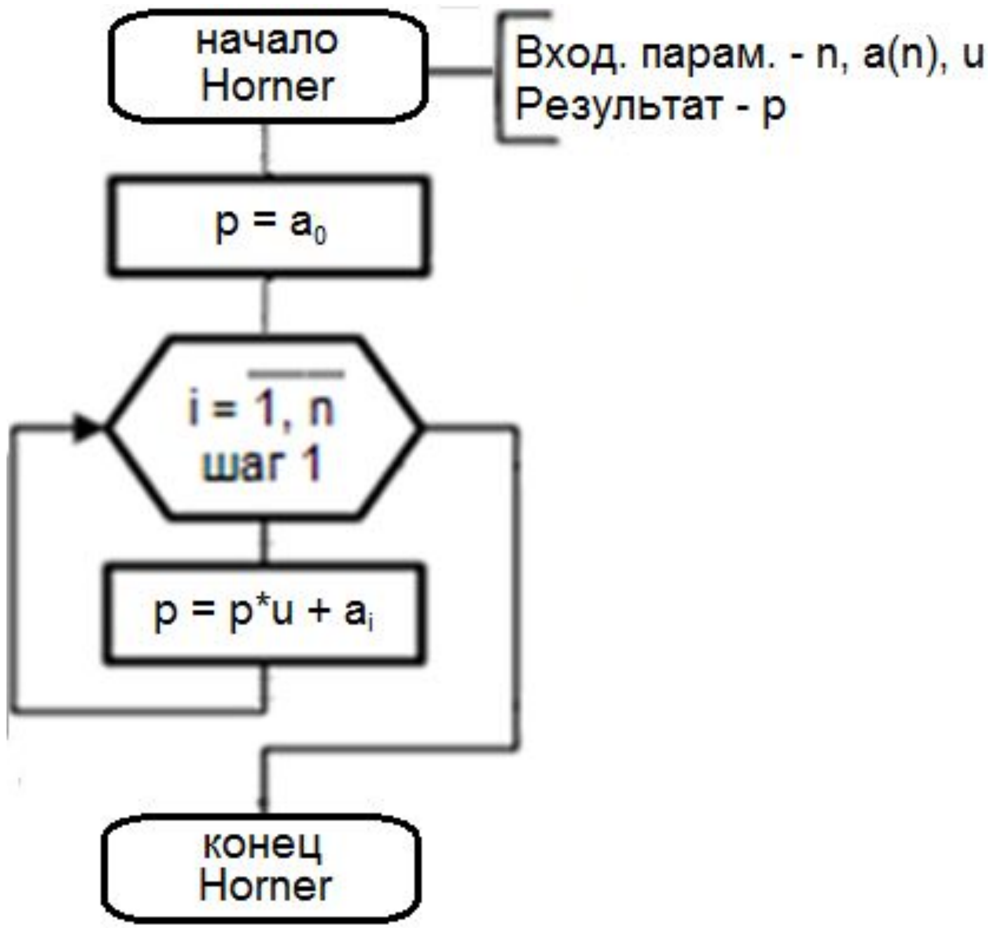
$$b_0 = a_0$$

$$\begin{array}{ll} c_1 = b_0u & b_1 = a_1 + c_1 \\ c_2 = b_1u & b_2 = a_2 + c_2 \\ c_3 = b_2u & b_3 = a_3 + c_3 \\ c_4 = b_3u & b_4 = a_4 + c_4 \\ c_5 = b_4u & b_5 = a_5 + c_5 \\ c_6 = b_5u & b_6 = a_6 + c_6 \\ c_7 = b_6u & b_7 = a_7 + c_7 \end{array}$$

Алгоритм реализации схемы Горнера

В краткой форме схема Горнера может быть представлена в виде рекуррентной формулы

$$P_n = P_{n-1}u + a_i; \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad P_0 = a_0$$



Разложение функции в ряд Маклорена

Некоторые трансцендентные (т.е. неалгебраические) функции раскладываются в ряд Маклорена:

$$\mathbf{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

Представим этот бесконечный ряд в виде суммы

$$\mathbf{f(x) = P_n(x) + R_n(x),}$$

где

$$\mathbf{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k}$$

а $\mathbf{R_n(x)}$ – остаточный член.

Разложение функций в ряд Маклорена

Если ряд Маклорена сходится, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, и при достаточно малом $\mathbf{R_n(x)}$ значение функции $\mathbf{f(x) \approx P_n(x)}$ с абсолютной погрешностью $\mathbf{R_n(x)}$. Таким образом, погрешность этого метода вычисления значений функций определяется величиной $\mathbf{R_n(x)}$ и может регулироваться путем выбора количества суммируемых членов ряда **n**.

При вычислении функции путем разложения в ряд Маклорена надо знать радиус сходимости ряда, т.е. ограничения на величину **x**, и оценку величины $\mathbf{R_n(x)}$ для обеспечения условия $\mathbf{|R_n(x)| < \varepsilon}$, где **ε** – заданная допустимая абсолютная погрешность.

Рекуррентные формулы

Во многих случаях вычисление членов ряда непосредственно по общей формуле члена ряда трудоемко и может вызвать дополнительные ошибки округления. В таких случаях очередной член ряда вычисляют не по общей, а по рекуррентной формуле – через предыдущий член ряда. Для получения рекуррентной формулы необходимо выполнить следующие операции:

1. Записать формулу для **k**–го члена ряда $\mathbf{a_k}$.
2. Записать формулу для **(k-1)**-го члена ряда $\mathbf{a_{k-1}}$, заменив в предыдущей формуле всюду **k** на **k-1**.
3. Получить формулу для отношения $\mathbf{q = a_k/a_{k-1}}$, произведя необходимые упрощения и сокращения.

- Записать в развернутом виде полученную рекуррентную формулу в виде $\mathbf{a_k = q \cdot a_{k-1}}$, значения **k**, при которых она работает, и значение первого члена ряда $\mathbf{a_0}$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^{x}=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots;\quad |x|<\infty;\quad R_n(x)<|a_n|$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots;\quad |x|<\infty;\quad R_n(x)\le|a_{n+1}|$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots;\quad |x|<\infty;\quad R_n(x)\le|a_{n+1}|$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots;\quad |x|\le 1;\quad R_n(x)\le|a_{n+1}|$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$\ln x = \sum_{k=0}^{n} a_k = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2k+1}; \quad 0.5 \le x < 1; \qquad R_n(x) < \frac{1}{4}|a_n|$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{2}{3} a_n$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{1}{3}|a_n|$$

Вывод рекуррентной формулы для ряда **e^x**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < |a_n|$$

$$1.\ a_k = \frac{x^k}{k!} \qquad\qquad 2.\ a_{k-1} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$3.\ q = \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{x^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k \cdot x^{k-1}} = \frac{x}{k}$$

$$4.\ a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x}{k}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = 1$$

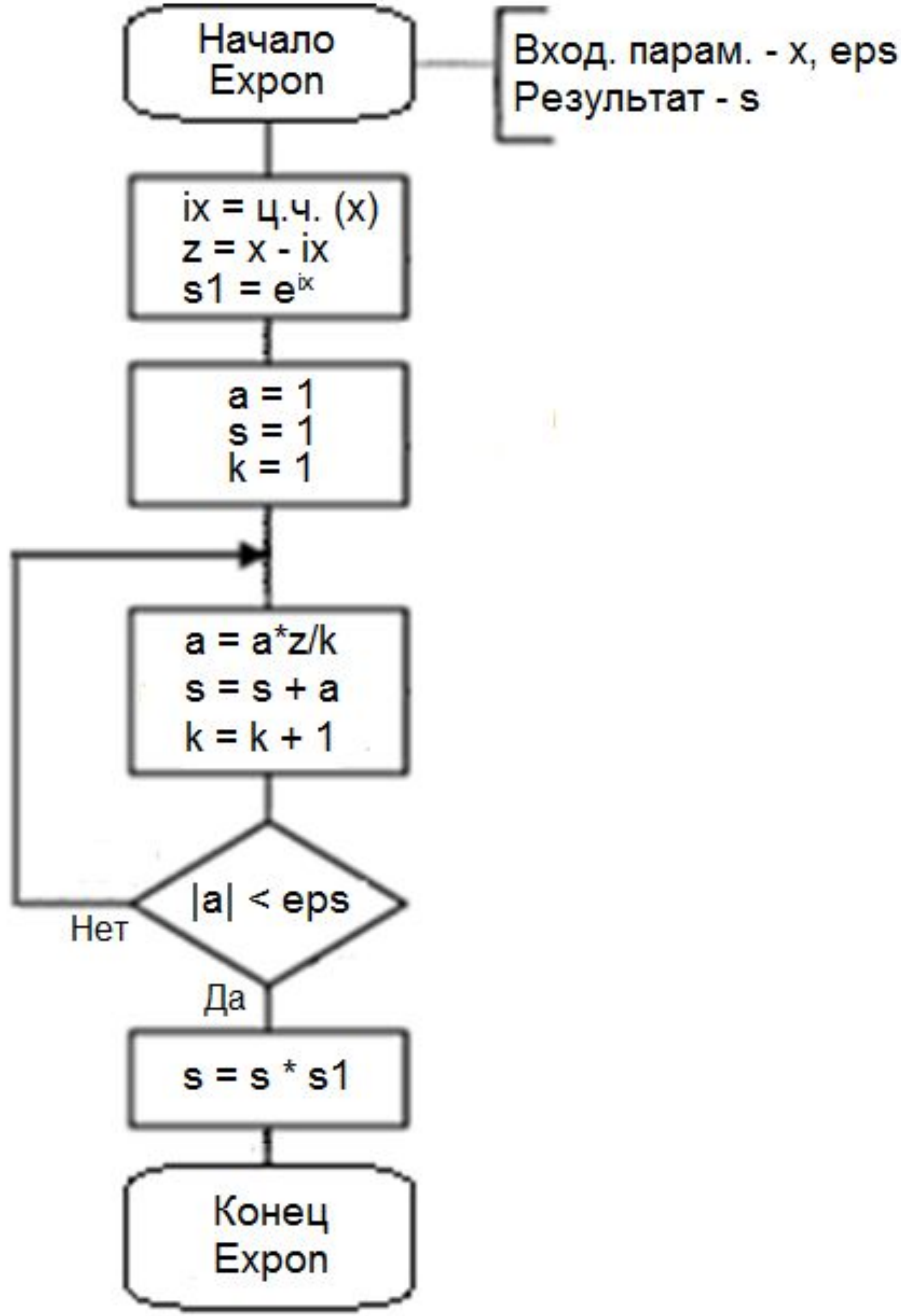
$$s_k = s_{k-1} + a_k; \ k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = 1$$

Приведение аргумента e^x к диапазону $|x| < 1$

При больших по абсолютной величине значениях **x** данный ряд сходится медленно, и за счет погрешностей округления результат может оказаться не просто неточным, а бессмысленным. Скорость сходимости ряда будет большой при $|x| < 1$. Для приведения **x** к этому диапазону его представляют обычно в виде суммы:

$x = E(x) + z$, где $E(x)$ – целая часть **x**, $0 <= z < 1$ – дробная часть **x**. Тогда $e^x = e^{E(x)} \cdot e^z$, где $e^{E(x)}$ вычисляется путем возведения в целую степень, а e^z – путем разложения в ряд.

Схема алгоритма вычисления e^x



Рекуррентные формулы для рядов **sin(x)** и **cos(x)**

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \le |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{2k(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = x$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \; k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) \le |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k-1)2k}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = 1$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \; k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = 1$$

Приведение аргумента **sin(x)** и **cos(x)** к отрезку **[0; π/4]**

Четность–нечетность

$\sin(-x) = -\sin(x)$ **$\cos(-x) = \cos(x)$**

Периодичность

$\sin(x \pm 2\pi \cdot k) = \sin(x)$ **$\cos(x \pm 2\pi \cdot k) = \cos(x)$**

Приведение к отрезку [0; π/2]

$\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$ **$\sin(\pi \pm x) = \sin(x)$**

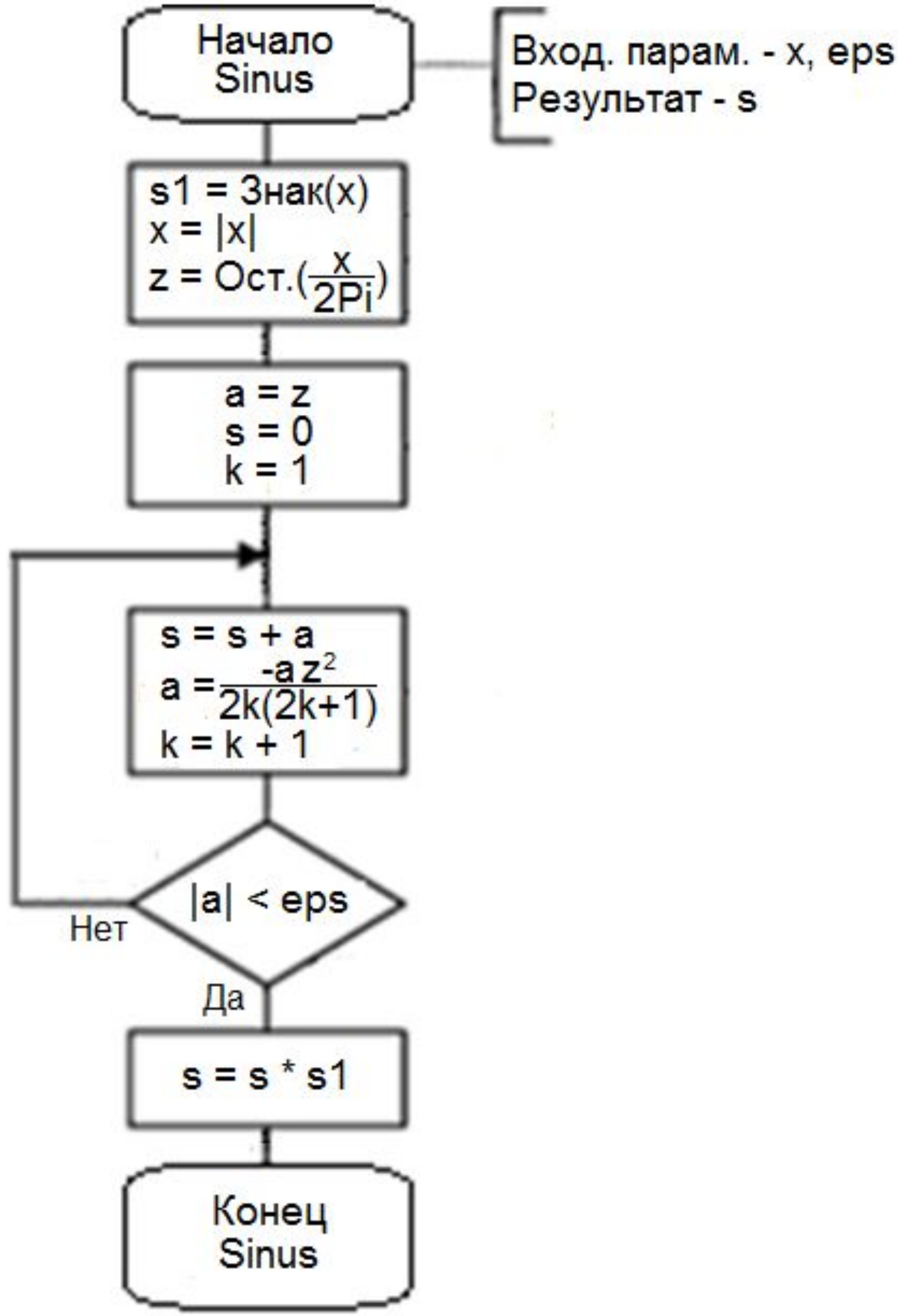
$\sin(3\pi/2 \pm x) = -\cos(x)$ **$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$**

$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$ **$\cos(3\pi/2 \pm x) = \pm \sin(x)$**

Приведение к отрезку [0; π/4]

$\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ **$\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$**

Схема алгоритма вычисления **sin(x)**



Рекуррентные формулы и формулы приведения для функции **arctg(x)**

$$\mathbf{arctg\,x} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots; \quad |x| \le 1; \quad R_n(x) \le |a_{n+1}|$$

$$a_k = -a_{k-1} \cdot \frac{x^2(2k-1)}{2k+1}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = x$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \; k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = x$$

<u>Нечетность</u>: **arctg(-x) = -arctg(x)**

Приведение к |x|<=1: **arctg(x) = π/2 - arctg(1/x)**

Рекуррентные формулы и формулы приведения для функции **ln(z)**

$$\ln x = \sum_{k=0}^{n} a_k = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2k+1}; \quad 0.5 \le x < 1; \qquad R_n(x) < \frac{1}{4}\left|a_n\right|$$

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{(1-x)^2(2k-1)}{(1+x)^2(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \; ; \; a_0 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$s_k = s_{k-1} + a_k; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \; ; \; s_0 = x$$

Представим **z** в виде $z = 2^m \cdot x$, где **m** – целое число и $0.5 \le x < 1$. Прологарифмировав это равенство, получим $\ln z = m \cdot \ln 2 + \ln x$

$$\ln 2 \approx 0{,}6931471805599453$$

Алгоритм приведения аргумента **ln(x)**

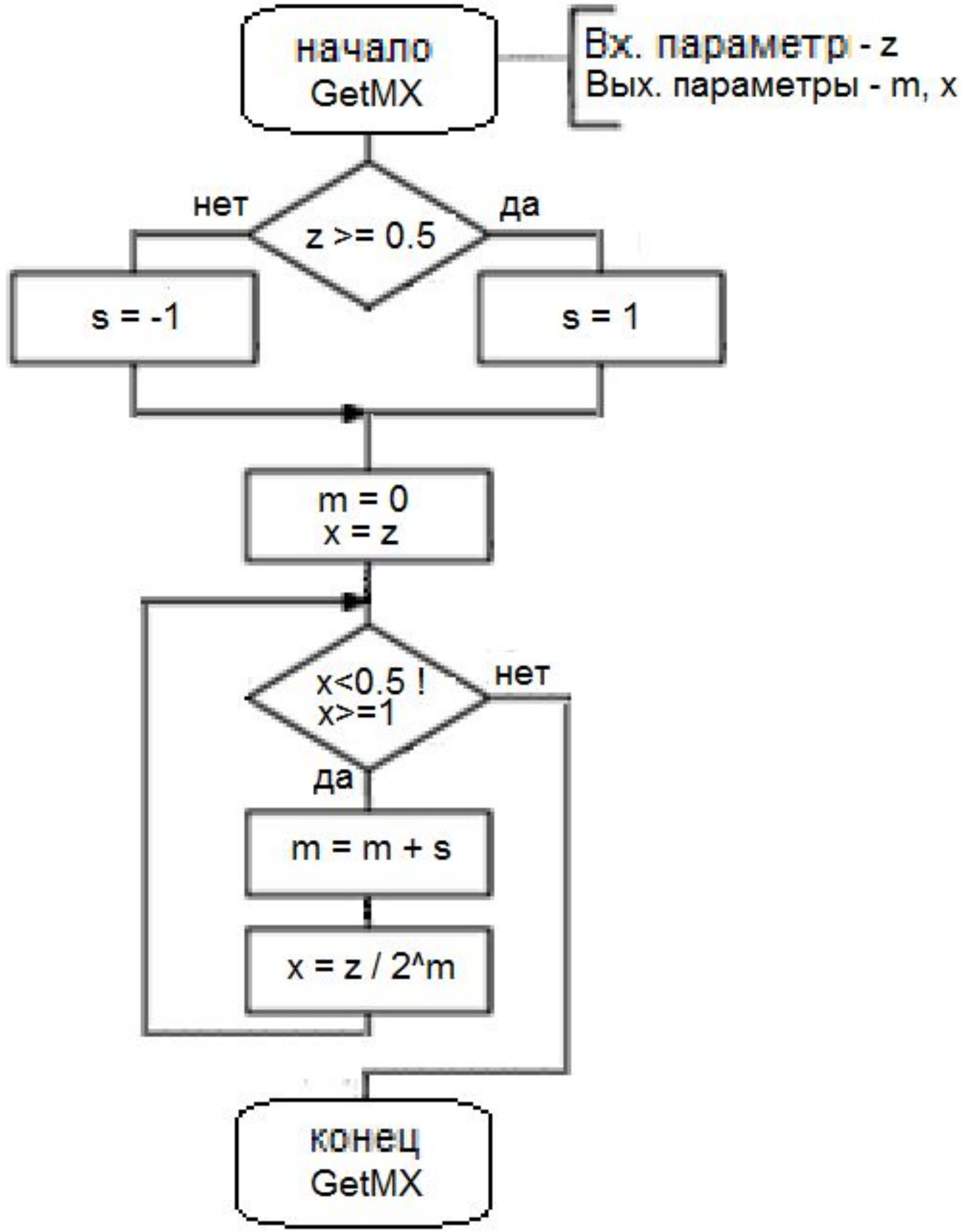
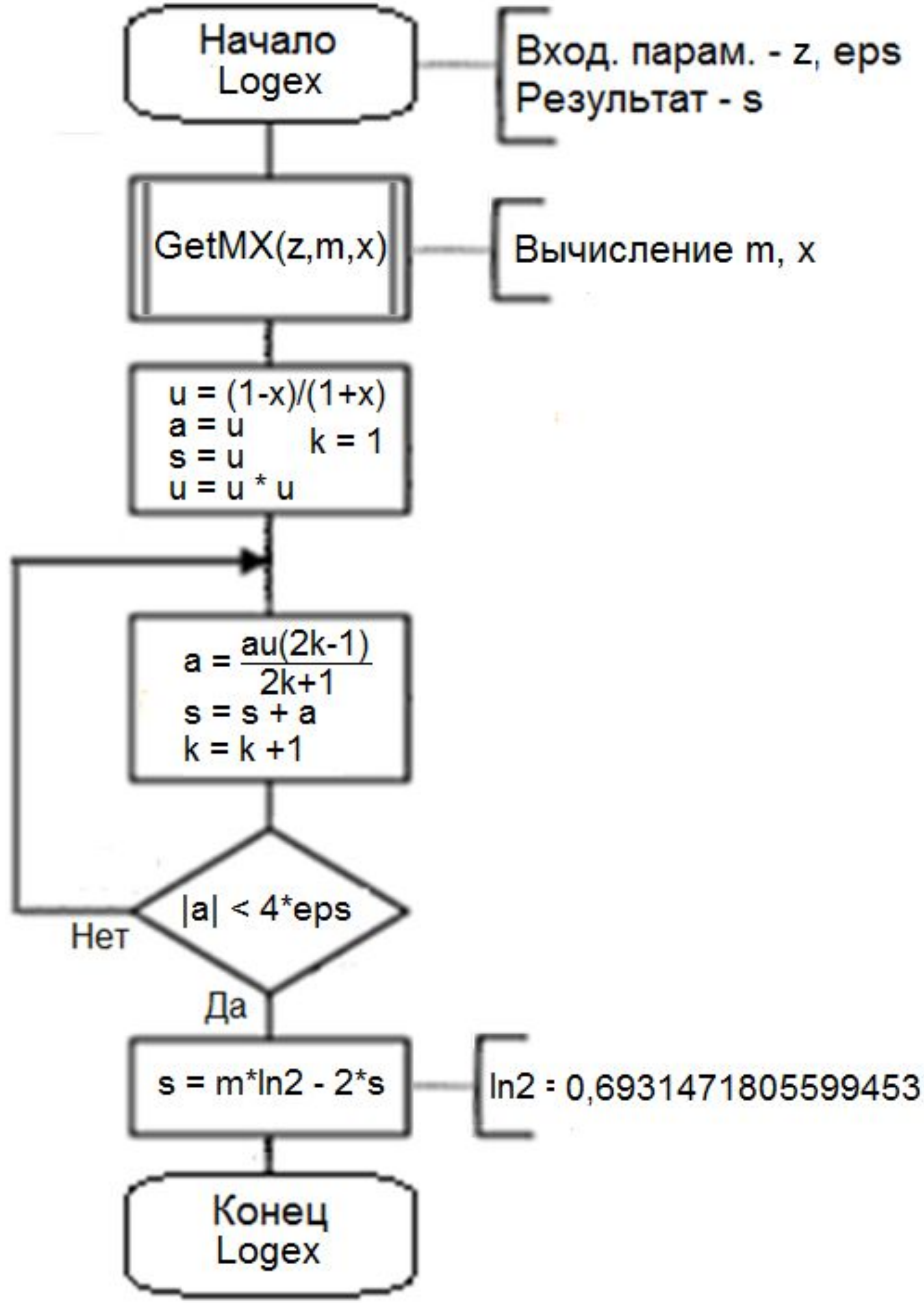


Схема алгоритма вычисления **ln x**



Рекуррентные формулы для рядов **sinh(x)** и **cosh(x)**

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{1}{3}|a_n|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = a_{k-1} \cdot \dfrac{x^2}{2k(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = x \\ s_k = s_{k-1} + a_k; \;\; k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = x \end{array}}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots; \quad |x| < \infty; \quad R_n(x) < \frac{2}{3} a_n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = a_{k-1} \cdot \dfrac{x^2}{(2k-1)2k}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad a_0 = 1 \\ s_k = s_{k-1} + a_k; \;\; k = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0 = 1 \end{array}}$$

Свойства функций **sinh(x)** и **cosh(x)**

<u>Четность–нечетность</u>

sinh(-x) = -sinh(x)　　**cosh(-x) = cosh(x)**

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Многочленные приближения e^x и **ln x**

$$e^x \approx a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$$

$a_0 = 0{,}0002040$ $a_1 = 0{,}0014393$ $a_2 = 0{,}0083298$
$a_3 = 0{,}0416350$ $a_4 = 0{,}1666674$ $a_5 = 0{,}5000063$
$a_6 = 1{,}0$ $a_7 = 0{,}9999998$

$|x| <= 1$ $\Delta = 2 \cdot 10^{-7}$

$$\ln(1+x) \approx a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$$

$a_0 = 0{,}010757369$ $a_1 = -0{,}055119959$ $a_2 = 0{,}134639267$
$a_3 = -0{,}225873284$ $a_4 = 0{,}328233122$ $a_5 = -0{,}499470150$
$a_6 = 0{,}999981028$ $a_7 = 0$

$|x| <= 1$ $\Delta = 2 \cdot 10^{-7}$

Многочленные приближения **sin x** и **cos x**

$$\sin x \approx a_0x^9+a_2x^7+a_4x^5+a_6x^3+a_8x$$

$a_0 = 0{,}000002608$ $a_2 = -0{,}000198107$ $a_4 = 0{,}008333075$

$a_6 = -0{,}166666589$ $a_8 = 1{,}000000002$

$|x| <= \pi/2$ $\Delta = 6\cdot10^{-9}$

$$\cos x \approx a_0x^{10}+a_2x^8+a_4x^6+a_6x^4+a_8x^2+a_{10}$$

$a_0 = -0{,}000000269591$ $a_2 = 0{,}000024795132$

$a_4 = -0{,}001388885683$ $a_6 = 0{,}041666665950$

$a_8 = -0{,}499999999942$ $a_{10} = 1{,}0$

$|x| <= 1$ $\Delta =$ [illegible]$\cdot10^{-9}$

Многочленное приближение **tg x**

$$\mathbf{tg\,x \approx a_0x^{13}+a_2x^{11}+a_4x^9+a_6x^7+a_8x^5+a_{10}x^3+a_{12}x}$$

$a_0 = 0{,}0095168091$ $a_2 = 0{,}0029005250$ $a_4 = 0{,}0245650893$

$a_6 = 0{,}0533740603$ $a_8 = 0{,}1333923995$ $a_{10} = 0{,}3333314036$

$a_{12} = 1{,}0$

$|x| <= \pi/4$ $\Delta = 2\cdot 10^{-8}$

Вычисление функции методом итераций

Всякую функцию **y = f(x)** можно различными способами задавать неявно, т.е. некоторым уравнением **F(x,y) = 0**, где **x** – заданный параметр, а **y** - неизвестное.

$$\mathbf{y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'(x, y_n)}; \quad n = 0,1,2,...}$$

$$\mathbf{y_0; \quad y_1 = y_0 - \frac{F(x, y_0)}{F'(x, y_0)}}$$

$$\mathbf{y_2 = y_1 - \frac{F(x, y_1)}{F'(x, y_1)}}$$

....

Условия сходимости: **F'(x,y)** и **F''(x,y)** существуют и знакопостоянны в окрестности корня уравнения

Правило останова: $|\mathbf{y_{n+1} - y_n}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ – допустимая абс. погр.

Вычисление квадратного корня методом итераций

Пусть $\mathbf{y = \sqrt{x}\ (x > 0)}$. Тогда $\mathbf{F(x,y) = y^2 - x}$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right); \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

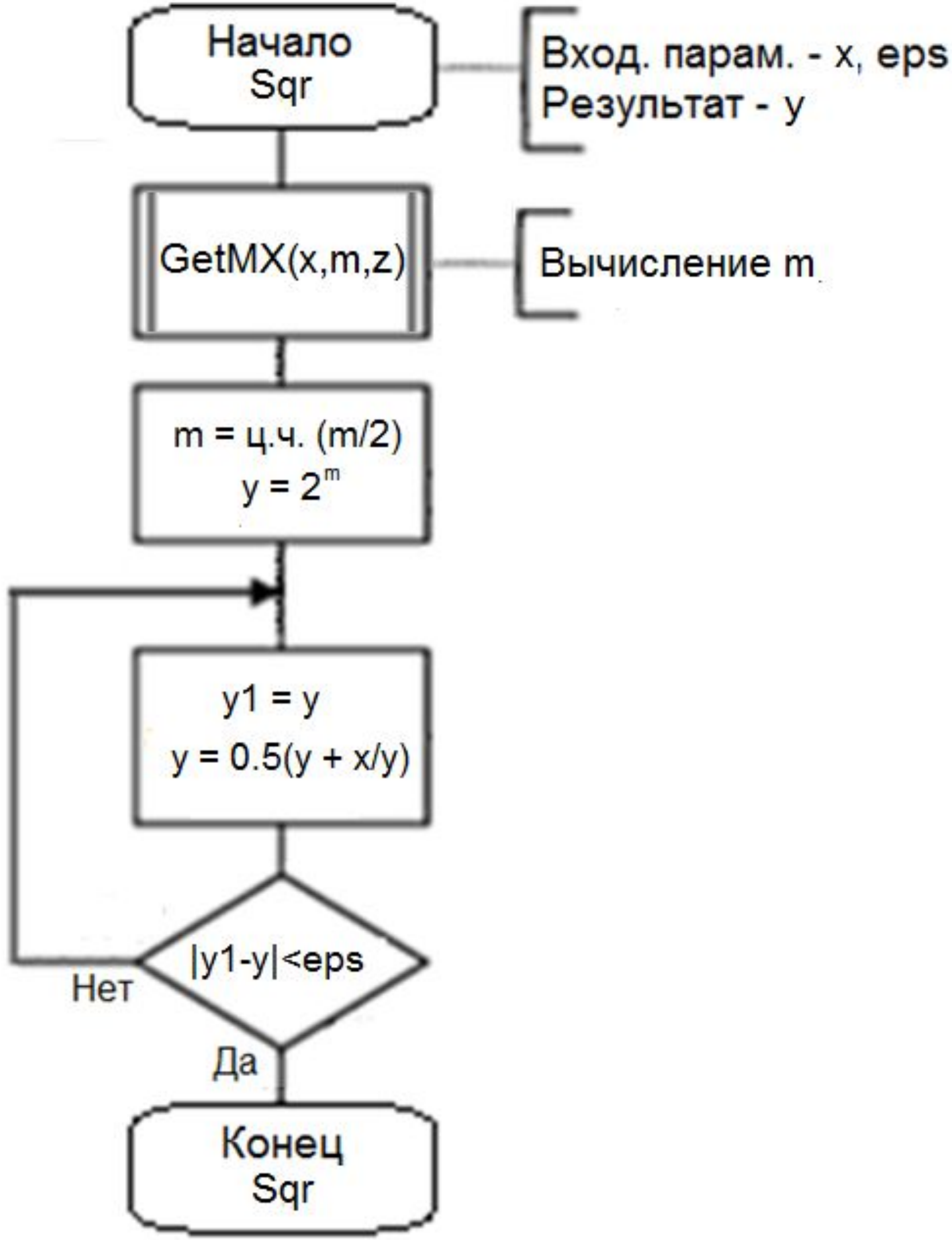
Эта формула называется **формулой Герона**.

Выбор y_0:

Если $\mathbf{x>1}$, то $\mathbf{x = 2^m z}$, где $\mathbf{m}$ – целое число и $\mathbf{0{,}5 \le z < 1}$,
и $\mathbf{y_0 = 2^{E(m/2)}}$, где $\mathbf{E(m/2)}$ – целая часть числа $\mathbf{m/2}$.
Если $\mathbf{0{,}01 \le x \le 1}$, то $\mathbf{y_0 = ax+b}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – из таблицы:

Интервал x	a	b	Интервал x	a	b
(0,01 ; 0,02)	4,1	0,060	(0,18 ; 0,30)	1,0	0,247
(0,02 ; 0,03)	3,2	0,078	(0,30 ; 0,60)	0,8	0,304
(0,03 ; 0,08)	2,2	0,110	(0,60 ; 1,00)	0,6	0,409
(0,08 ; 0,18)	1,4	0,174			

Схема алгоритма вычисления √**x**



Вычисление корня **p**–й степени методом итераций

Пусть **y = $^{p}\sqrt{x}$ (x > 0, p>0)**. Тогда

F(x,y) = 1 – x/y^{p}

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left[\mathbf{y}_n \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{\mathbf{y}_n^p}{px} \right]; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Выбор y_0

$$\mathbf{y}_0^p < x(p+1), \quad \text{откуда} \quad \mathbf{y}_0 < e^{\frac{\ln[x(p+1)]}{p}}$$

Вычисление корня **p**–й степени методом итераций. Формула Ньютона

Если преобразовать выражение **y =** $\sqrt[p]{x}$ к виду

F(x,y) = $y^p - x$, то получим другую итерационную формулу:

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)\,y_n + \frac{x}{y_n^{p-1}}\right]; \quad n = 0,1,2\ldots$$

известную как **формула Ньютона.** При **p = 2**

из формулы Ньютона получается формула Герона.