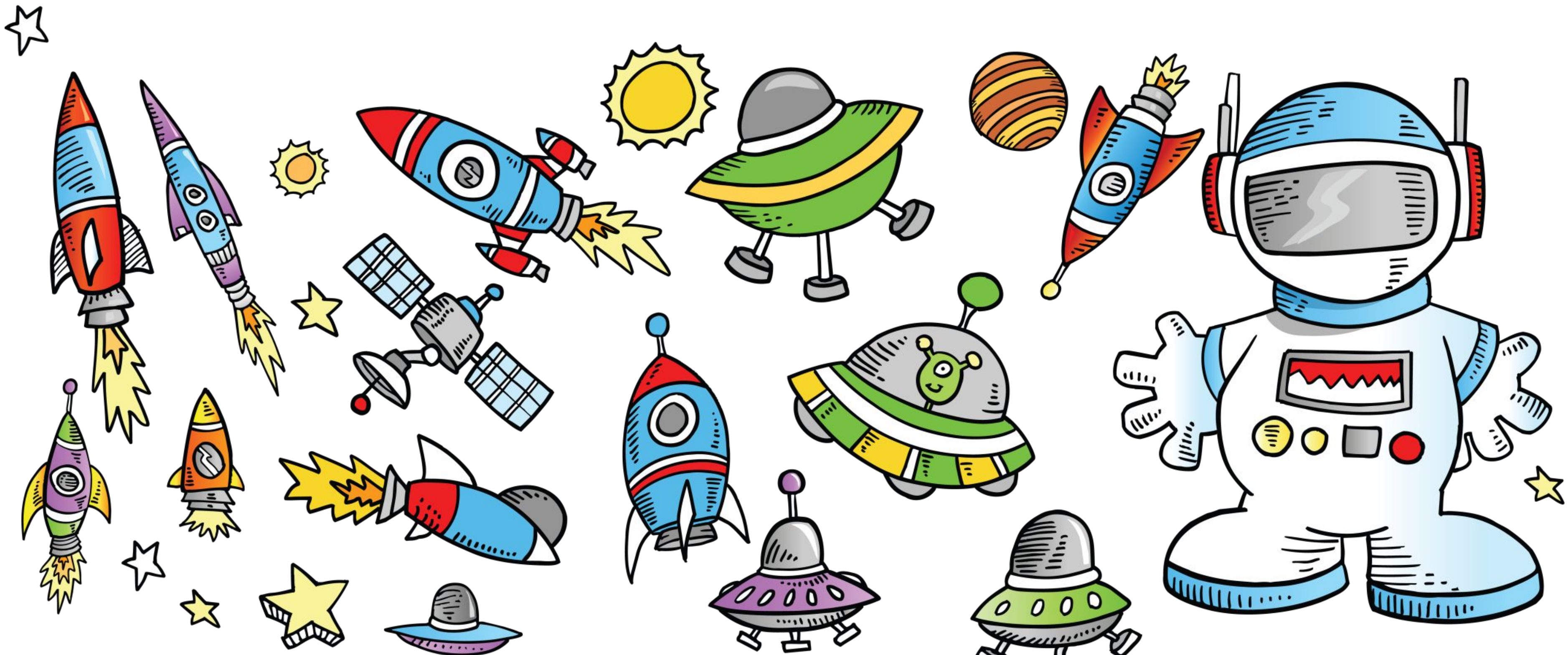
Лекция 2

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ



Постановка задачи

Поведение ***модели объекта управления*** описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad (1)$$

- *x* – ***вектор состояния системы***, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$;
- *u* – ***вектор управления***, $u = (u_1, \ldots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$, U – некоторое заданное ***множество допустимых значений управления***;
- *t* – непрерывное время, $t \in T = [t_0, t_1]$ – ***промежуток времени функционирования системы***;
- $f(t, x, u)$ – непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция, $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \ldots, f_n(t, x, u))^T$, $f(t, x, u) : T \times R^n \times U \to R^n$; R^n – *n*-мерное евклидово пространство.

Момент начала процесса t_0 задан, а момент окончания процесса t_1 определяется первым моментом достижения точкой $(t, x(t))$ некоторой заданной поверхности $\Gamma \subset R^{n+1}$:

$$\Gamma = \{ (t_1, x) \mid \Gamma_i (t_1, x) = 0,\ i = 1, \ldots, l; \quad t_1 \in (t_0, +\infty), \quad x \in R^n \}, \qquad (2)$$

т.е. в момент t_1 должны выполняться условия

$$\Gamma_i (t_1, x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, l,\ 0 \le l \le n+1.$$

- при $l = n+1$ множество Γ представлено точкой в пространстве R^{n+1},
- функции $\Gamma_i (t_1, x)$ – непрерывно дифференцируемы;
- система векторов $\left(\dfrac{\partial \Gamma_i (t_1, x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Gamma_i (t_1, x)}{\partial x_n}, \dfrac{\partial \Gamma_i (t_1, x)}{\partial t_1} \right), \quad i = 1, \ldots, l$,

  линейно независима $\forall (t_1, x) \in R^{n+1}$.

Начальное условие задано $x(t_0) = x_0$.

При управлении используется информация только о времени, т.е. система управления является разомкнутой по состоянию и рассматривается так называемое ***программное управление*** (рис. 1).

Множество допустимых управлений $\mathbf{U}_0$ образуют кусочно-непрерывные функции $u(\cdot)$ со значениями в множестве U. В точках разрыва значение управления определяется как предел справа.

Множество допустимых процессов $\mathbf{D}(t_0, x_0)$ - множество троек $d = (t_1, x(\cdot), u(\cdot))$, которые включают момент окончания процесса t_1, траекторию $x(\cdot)$ и управление $u(\cdot)$, удовлетворяющие уравнению (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ почти всюду на множестве T и условию (2).

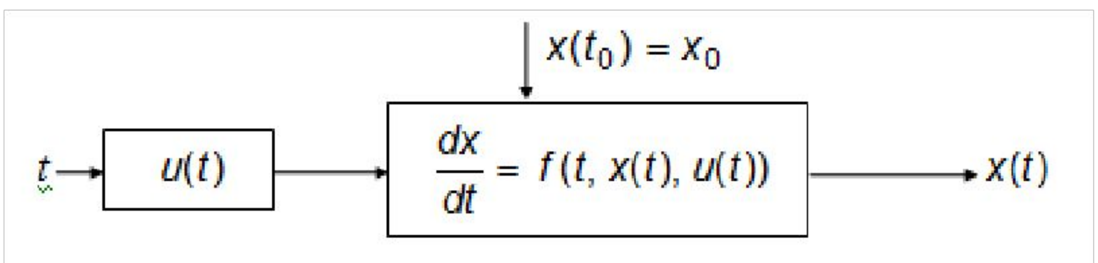


Рис. 1. Разомкнутая по состоянию система управления

На множестве $\boldsymbol{D}\,(t_0, x_0)$ определен ***функционал качества управления***

$$I\,(d) = \int_{t_0}^{t_1} f^{\,0}(t, x(t), u(t))\,dt + F\,(t_1, x(t_1))\,, \qquad (3)$$

где $f^{\,0}(t, x, u)$, $F\,(t_1, x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую тройку $d^* = (t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \boldsymbol{D}\,(t_0, x_0)$, что

$$I\,(d^*) = \min_{d \in \boldsymbol{D}\,(t_0, x_0)} I\,(d)\,. \qquad (4)$$

Задача (4) с функционалом (3) называется ***задачей Больца***; если в функционале (3) функция $F\,(t_1, x) \equiv 0$ (терминальный член) – ***задачей Лагранжа***; если $f^{\,0}(t, x, u) \equiv 0$ (интегральный член) – ***задачей Майера***.

$x^*(\cdot)$ и $u^*(\cdot)$ - ***оптимальная траектория*** и ***оптимальное управление***,

t_1^* – ***оптимальный момент окончания процесса***.

Если любое допустимое управление $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_0$ порождает единственную тройку $d \in \boldsymbol{D}\,(t_0, x_0)$, то задача (4) может быть записана в эквивалентной форме:

$$I\,(t_0, x_0, u^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_0} I\,(t_0, x_0, u(\cdot))\,.$$

Принцип максимума. Необходимые условия экстремума

Пусть на тройке $d^* = (t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{D}\,(t_0, x_0)$ *достигается минимум функционала* (3). *Тогда существует такая вектор-функция* $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))^T$ ***(вспомогательные переменные)****, что:*

1) *в каждой точке непрерывности управления* $u^*(t)$ *функция* $H\,(t, \psi(t), x^*(t), u)$ (гамильтониан) *достигает* ***максимума по управлению****, т. е.*

$$\max_{u \in U} H\,(t, \psi(t), x^*(t), u) = H\,(t, \psi(t), x^*(t), u^*(t))\,,$$

где $H\,(t, \psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \cdot f_j\,(t, x, u) - f^{\,0}(t, x, u)\,;$

2) *выполняется* ***условие трансверсальности***

$$\delta F(t_1^*) - H(t_1^*) \cdot \delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_1^*) \cdot \delta x_j = 0 \qquad (5)$$

при любых δt_1 *и* δx_j, *удовлетворяющих системе*

$$\delta\Gamma_i(t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0, \quad \Gamma_i(t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

где $H(t_1^*) = H(t_1^*, \psi(t_1^*), x^*(t_1^*), u^*(t_1^*))$, $F(t_1^*) = F(t_1^*, x^*(t_1^*))$, *а вариации определяются следующим образом:*

$$\delta F(t_1^*) = \delta F(t_1^*, x^*(t_1^*)) = \frac{\partial F(t_1^*, x^*(t_1^*))}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(t_1^*, x^*(t_1^*))}{\partial x_j} \delta x_j,$$

$$\delta\Gamma_i(t_1^*, x^*(t_1^*)) = \frac{\partial \Gamma_i(t_1^*, x^*(t_1^*))}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_i(t_1^*, x^*(t_1^*))}{\partial x_j} \delta x_j;$$

3) *функции* $x^*(\cdot), \psi(\cdot)$ *удовлетворяют системе канонических уравнений*

$$\dot{x}_j^*(t) = \frac{\partial H(t, \psi(t), x^*(t), u^*(t))}{\partial \psi_j} = f_j(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x_j^*(t_0) = x_{0j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\dot{\psi}_j(t) = -\frac{\partial H(t, \psi(t), x^*(t), u^*(t))}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

З а м е ч а н и я

1. В частном случае задания множества Γ, когда момент времени t_1 задан и фиксировано k координат $x_{11}, \ldots, x_{k1}$ вектора $x(t_1)$, т.е. $t_1 = T_1$, $x_j(t_1) = x_{j1}$, $j = 1, \ldots, k$; $0 \le k \le n$, $l = k + 1$, функции $\Gamma_j(t_1, x)$ имеют вид

$$\Gamma_j(t_1, x) = x_j - x_{j1} = 0, \quad j = 1, \ldots, k;$$

$$\Gamma_{k+1}(t_1, x) = t_1 - T_1 = 0.$$

Здесь при $k = n$ правый конец траектории *фиксирован*, а при $k = 0$ *свободен*. Отсюда следует, что $\delta x_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$; $\delta t_1 = 0$.

Решаемая задача с фиксированным временем окончания записывается в форме

$$I(d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))\, dt + F(x(t_1)) \to \min .$$

Решением этой задачи является пара $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$: оптимальные траектория и управление.

2. В общем случае гамильтониан следует записывать в форме

$$H(t, \psi, \psi_0, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \cdot f_j(t, x, u) + \psi_0 \cdot f^0(t, x, u),$$

а при решении задачи рассматривать два случая: $\psi_0(t) \equiv 0$ и $\psi_0(t) \neq 0$. Во втором случае обычно полагают $\psi_0(t) = -1$.

3. Если на управление нет ограничений, т.е. $U = R^q$, то максимум гамильтониана ищется с помощью необходимых и достаточных условий безусловного экстремума.

4. Если модель объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением, а функционал квадратичный, принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (4).

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

1. Составить гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \; f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u)$.

2. Найти структуру оптимального управления $u^*(t) = u^*(t, \psi(t), x(t))$ из условия максимума гамильтониана по управлению.

3. Составить систему канонических уравнений (6) с заданными в задаче условиями.

4. Из условий трансверсальности (5) получить недостающие краевые условия для уравнений составленной системы.

5. Решить двухточечную краевую задачу для системы канонических уравнений, полученную в п. 3, с учетом результатов пп. 2 и 4. В итоге определяется тройка $(t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой может достигаться экстремум функционала.

Пример 1.

Даны модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = u(t)\,,\quad x(0) = 0,\quad x(1) = \frac{1}{2}\,,$$

где $x \in R$; $u \in R$; $t \in [0;1]$, и функционал

$$I = \int_0^1 [\,u^2(t) + x^2(t)\,]\,dt \to \min\ .$$

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$f(t, x, u) = u$, $f^0(t, x, u) = u^2 + x^2$, $F(t_1, x) \equiv 0$, $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 1 = 0$, $\Gamma_2(t_1, x(t_1)) = x(1) - \frac{1}{2} = 0$. Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \psi u - u^2 - x^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума $\frac{\partial}{\partial u} H(t, \psi(t), x(t), u) = \psi(t) - 2u = 0$.

Отсюда $u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2}$. Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(t, \psi(t), x(t), u)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума $\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(t, \psi(t), x(t), u) = -2 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (6):

$$\dot{x}(t) = u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{2},$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = 2x(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (5). Так как $F(t_1, x) \equiv 0$, то $\delta F = 0$ и $\left[-H(t_1) \cdot \delta t_1 + \psi(t_1) \cdot \delta x \right] \Big|_{t_1 = 1} = 0$. Поскольку $t_1 = 1$ и $x(t_1) = \dfrac{1}{2}$ заданы, то $\delta t_1 = 0$, $\delta x = 0$. Поэтому условия трансверсальности выполняются.

5. Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}(t) = \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{2},$$

$$\dot{\psi}(t) = 2x(t).$$

Последовательно находим:

$$\ddot{x}(t) = \frac{\dot{\psi}(t)}{2} = x(t),$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$x(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$C_2 = -C_1, \; C_1 = \frac{e}{2(e^2 - 1)},$$

$$u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \dot{x}^*(t).$$

В результате находится искомая пара:

$$x^*(t) = \frac{e(e^t - e^{-t})}{2(e^2 - 1)}, \quad u^*(t) = \frac{e(e^t + e^{-t})}{2(e^2 - 1)}.$$

Пример 2.

Даны модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)\,, \quad x(0) = 0\,,$$

где $x \in R$; $u \in R$; $t \in [0;1]$, и функционал

$$I = \int_0^1 u^2(t)\,dt - x(1) \to \min\ .$$

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f(t, x, u) = x + u$, $f^0(t, x, u) = u^2$, $F(t_1, x) = -x$, $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 1 = 0$. Решается задача Больца.

1. Составляем гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \psi \cdot (x + u) - u^2$.

2.Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t, \psi(t), x(t), u) = \psi(t) - 2u = 0.$$

Отсюда $u^*(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} H(t, \psi(t), x(t), u) = -2 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (6) с учетом результата п.2:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u^*(t) = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -\psi(t).$$

4. Проверяем условие трансверсальности. Так как $F(t_1, x) = -x$, то $\delta F = -\delta x$. Согласно условию, $\left[-\delta x - H(t_1)\,\delta t_1 + \psi(t_1)\,\delta x\right]\Big|_{t_1=1} = 0$. Поскольку $t_1 = 1$, то $\delta t_1 = 0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено, поэтому вариация δx произвольна. В результате имеем $\left[\psi(t_1) - 1\right] \cdot \delta x\Big|_{t_1=1} = 0$ и, следовательно, $\psi(1) - 1 = 0$.

5. Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}(t) = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t), \quad \psi(1) = 1.$$

Из второго уравнения с конечным условием имеем $\psi(t) = e^{1-t}$. Поэтому оптимальное управление $u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{1}{2}e^{1-t}$.

Решая первое уравнение системы $\dot{x}(t) - x(t) = \frac{e^{1-t}}{2}$ с начальным условием $x(0) = 0$, последовательно получаем:

$x_0(t) = Ce^t$ – общее решение однородного уравнения,

$x_ч(t) = -\frac{e}{4}e^{-t}$ – частное решение неоднородного уравнения,

$x(t) = x_0(t) + x_ч(t) = Ce^t - \frac{e}{4}e^{-t}$ – общее решение неоднородного уравнения,

$x(0) = C - \frac{e}{4} = 0,\ C = \frac{e}{4}.$

Следовательно, оптимальная траектория $x^*(t) = \frac{1}{4}\left[e^{1+t} - e^{1-t}\right]$.

Пример 3.

Даны модель объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(2) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)\,, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2(2) = 0,$$

где $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $u \in R$, $t \in [0; 2]$, и функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\,dt \to \min\,.$$

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f_1(t, x, u) = x_2, \;\; f_2(t, x, u) = u\,, \;\; f^0(t, x, u) = \frac{1}{2}u^2,$$

$$F(t_1, x) \equiv 0, \;\; \Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 2 = 0\,,$$

$$\Gamma_2(t_1, x(t_1)) = x_1(2) = 0\,, \qquad \Gamma_3(t_1, x(t_1)) = x_2(2) = 0\,.$$

Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \frac{1}{2} u^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума: $\frac{\partial}{\partial u} H(t, \psi(t), x(t), u) = \psi_2(t) - u = 0$. Отсюда $u^*(t) = \psi_2(t)$.

Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(t, \psi(t), x(t), u)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума $\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(t, \psi(t), x(t), u) = -1 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (6):

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(2) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) = \psi_2(t), \quad x_2(0) = 1, \quad x_2(2) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -\psi_1(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (5). Так как $F(t_1, x) \equiv 0$, а $t_1 = 2$, $x_1(2) = 0$, $x_2(2) = 0$, т.е. заданы, то $\delta F = 0$, $\delta t_1 = 0$, $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$. Следовательно, условия трансверсальности выполняются.

5. Решаем полученную в п.3 двухточечную краевую задачу:

$$\psi_1(t) = \text{const} = C_1, \qquad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2,$$

$$x_2(t) = -\frac{C_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3, \qquad x_1(t) = -\frac{C_1 t^3}{6} + \frac{C_2 t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Из краевых условий находим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4:

$$x_1(0) = C_4 = 1, \qquad x_1(2) = -\frac{4}{3}C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4 = 0,$$

$$x_2(0) = C_3 = 1, \qquad x_2(2) = -2C_1 + 2C_2 + C_3 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -3$, $C_2 = -\frac{7}{2}$ и искомая пара $(x^*(\cdot) = (x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))^T, u^*(\cdot))$, где

$$x_1^*(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1,$$

$$x_2^*(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1,$$

$$u^*(t) = \psi_2(t) = 3t - \frac{7}{2}.$$

Пример 4.

Даны модель объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad |u| \le 1,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ и функционал

$$I = x_2(2\pi) \to \min .$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $t \in [0; 2\pi]$, на управление наложено ограничение $|u| \le 1$, т.е. $u \in U = [-1; 1]$, $f^0(t, x, u) = 0$, $F(t_1, x) = x_2$, $f_1(t, x, u) = x_2$, $f_2(t, x, u) = -x_1 + u$, $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 2\pi = 0$.

Решается задача Майера.

1. Составляем гамильтониан $H(t, \psi, x, u) = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot [-x_1 + u]$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как имеются ограничения на управление, требуется найти условный максимум гамильтониана по управлению. В данной задаче гамильтониан линеен по u на заданном отрезке изменения управления [-1; 1], поэтому оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \arg\max_{|u| \le 1} H(t, \psi(t), x(t), u) = 1 \cdot \mathrm{sign}\, \psi_2(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0, \\ -1, & \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

т.е. является релейным. Величина управления определяется знаком функции $\psi_2(t)$.

3. Выписываем канонические уравнения (6) принципа максимума:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u^*(t) = -x_1(t) + \mathrm{sign}\, \psi_2(t), \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, \psi(t), x(t), u^*(t)) = \psi_2(t),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \psi(t), x(t), u^*(t)) = -\psi_1(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (5):

$$\left[\delta F - H(t_1)\cdot\delta t_1 + \sum_{j=1}^{2}\psi_j(t_1)\cdot\delta x_j\right]\Bigg|_{t_1=2\pi} = 0,$$

где $\delta F = \dfrac{\partial F(t_1, x)}{\partial t_1}\delta t_1 + \sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial F(t_1, x)}{\partial x_j}\delta x_j = \delta x_2$. Группируя члены, получаем

$$-H(2\pi)\,\delta t_1 + \psi_1(2\pi)\,\delta x_1 + [1+\psi_2(2\pi)]\,\delta x_2 = 0.$$

Момент окончания t_1 задан, поэтому $\delta t_1 = 0$. Так как правый конец свободен, то вариации δx_1, δx_2 считаются произвольными. Чтобы равенство выполнялось для любых вариаций, необходимо, чтобы $\psi_1(2\pi) = 0$, $\psi_2(2\pi) = -1$.

5. Решаем двухточечную краевую задачу с учетом пп. 2 и 4:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \quad x_1(0) = 0; \qquad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \operatorname{sign}\psi_2(t)\,, \quad x_2(0) = 0\,;$$

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t)\,, \quad \psi_1(2\pi) = 0; \qquad \dot{\psi}_2(t) = -\,\psi_1(t)\,, \quad \psi_2(2\pi) = -1\,.$$

Имеем: $\psi_1(t) = -\sin t$, $\psi_2(t) = -\cos t$, $u^*(t) = \operatorname{sign}(-\cos t) = -\operatorname{sign}(\cos t)$. Найденное оптимальное управление $u^*(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет две точки переключения и, следовательно, три промежутка знакопостоянства:

1) при $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$, $u^*(t) = -1$, $x_1^*(t) = \cos t - 1$, $x_2^*(t) = -\sin t$;

2) при $\dfrac{\pi}{2} \le t < \dfrac{3\pi}{2}$, $u^*(t) = 1$, $x_1^*(t) = \cos t - 2\sin t + 1$, $x_2^*(t) = -\sin t - 2\cos t$;

3) при $\dfrac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$, $u^*(t) = -1$, $x_1^*(t) = \cos t - 4\sin t - 1$, $x_2^*(t) = -\sin t - 4\cos t$.

Минимальное значение функционала равно $x_2^*(2\pi) = -4$.