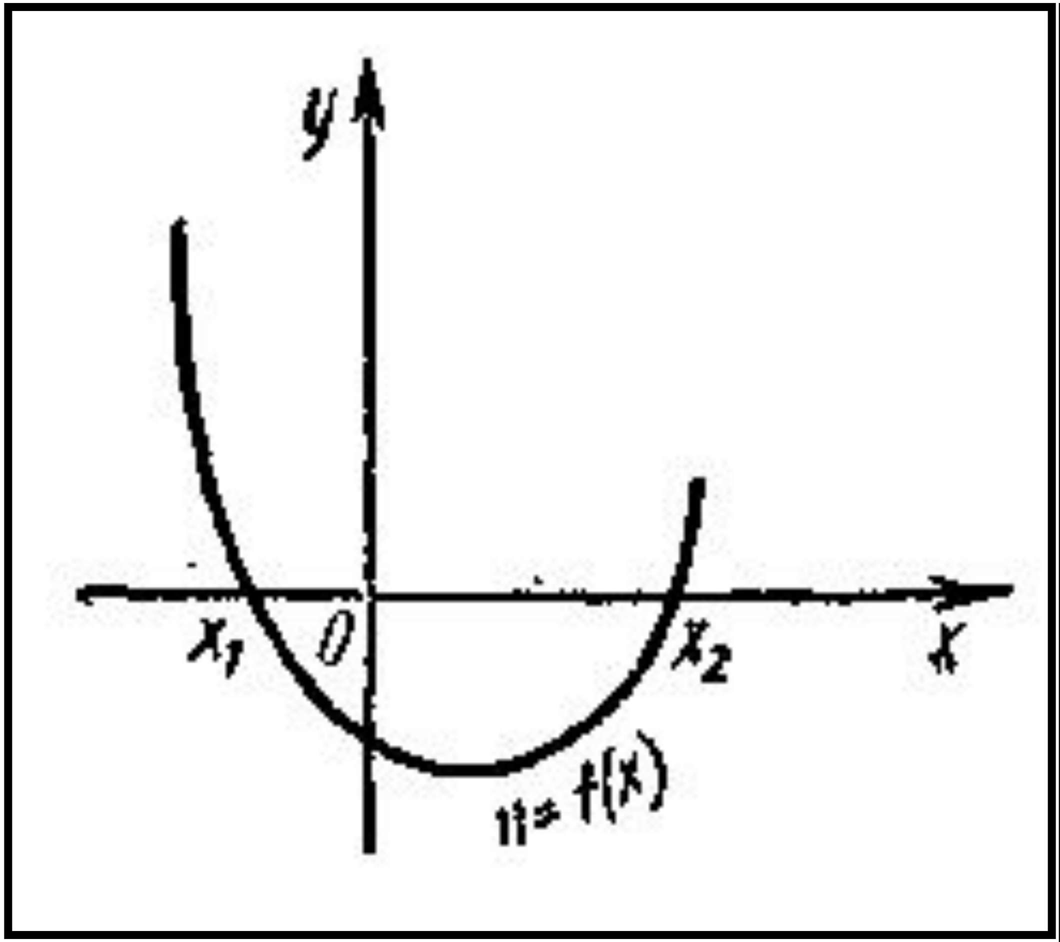
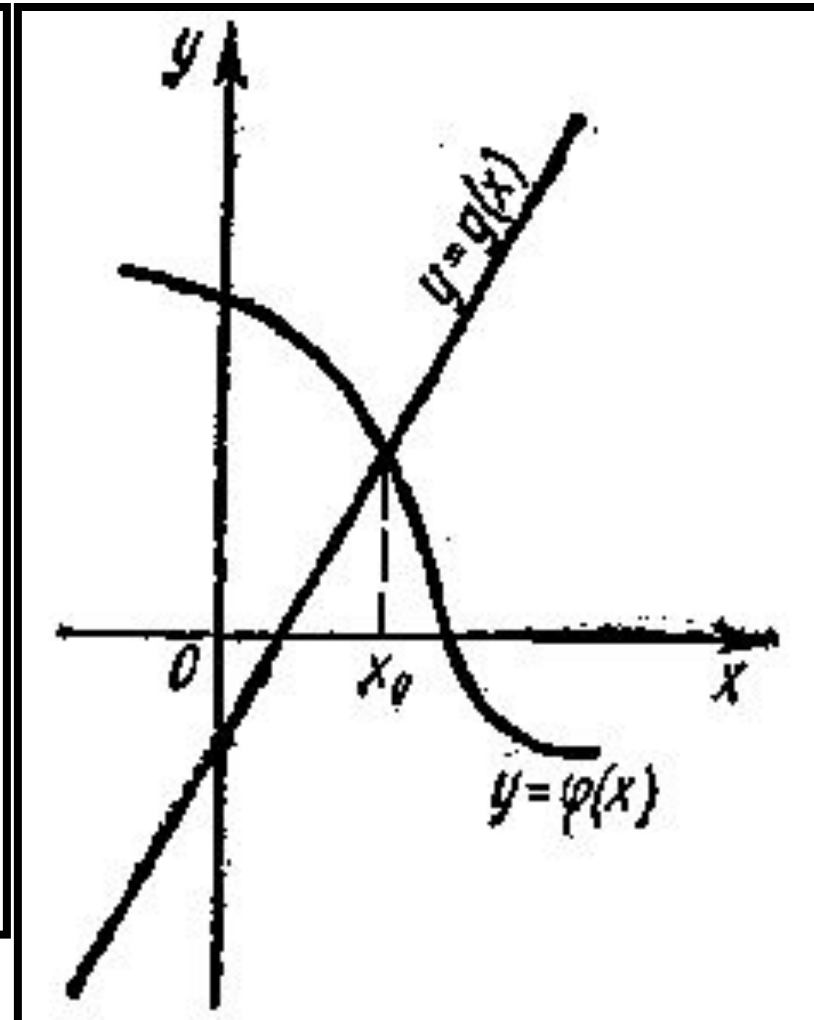
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Решить уравнение – это значит:

- установить, имеет ли оно корни
- сколько корней
- и найти значение корней с заданной точностью

Графический метод решения уравнений



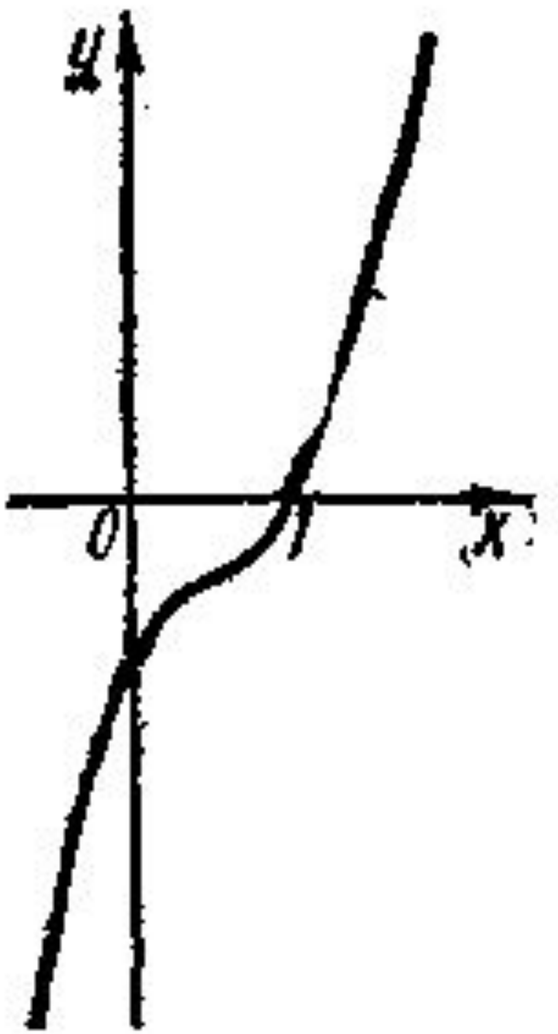


$$f(x) = 0 \qquad \varphi(x) = g(x)$$

Пример:

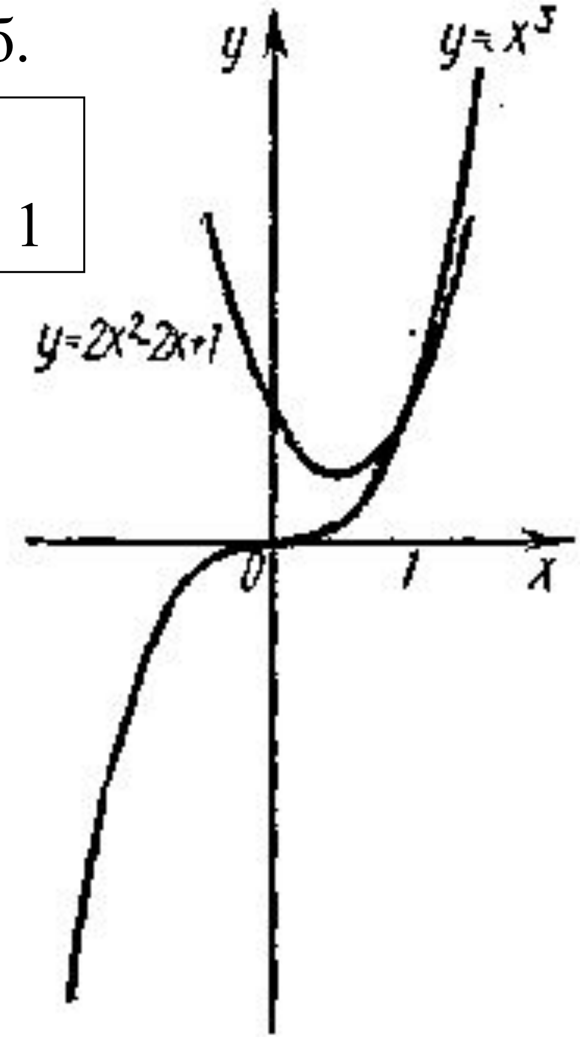
Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Первый способ.



Второй способ.

$$y = x^3$$
$$y = 2x^2 + 2x – 1$$



Ответ: $x = 1$

Задача численного нахождения корней уравнения состоит из двух этапов:

- отделение корней
- уточнение корней

Отделение корней

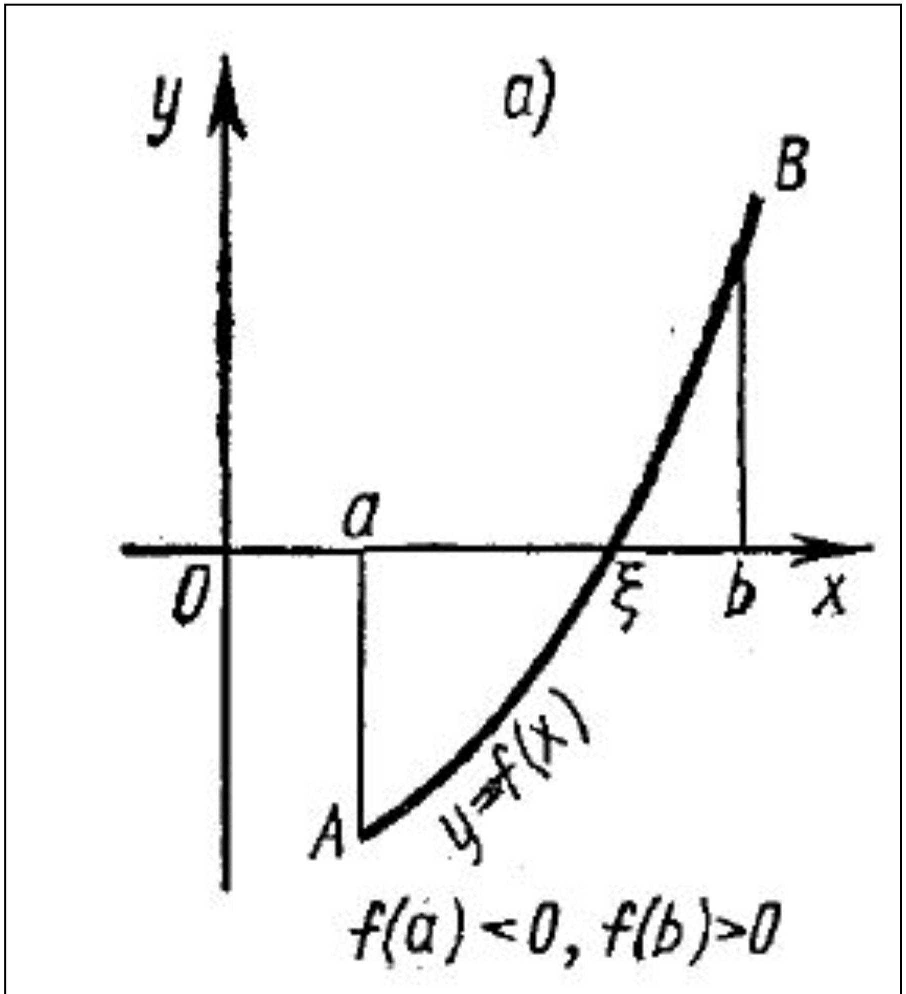
Корень уравнения $f(x) = 0$ считается *отделенным* на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ не имеет других корней

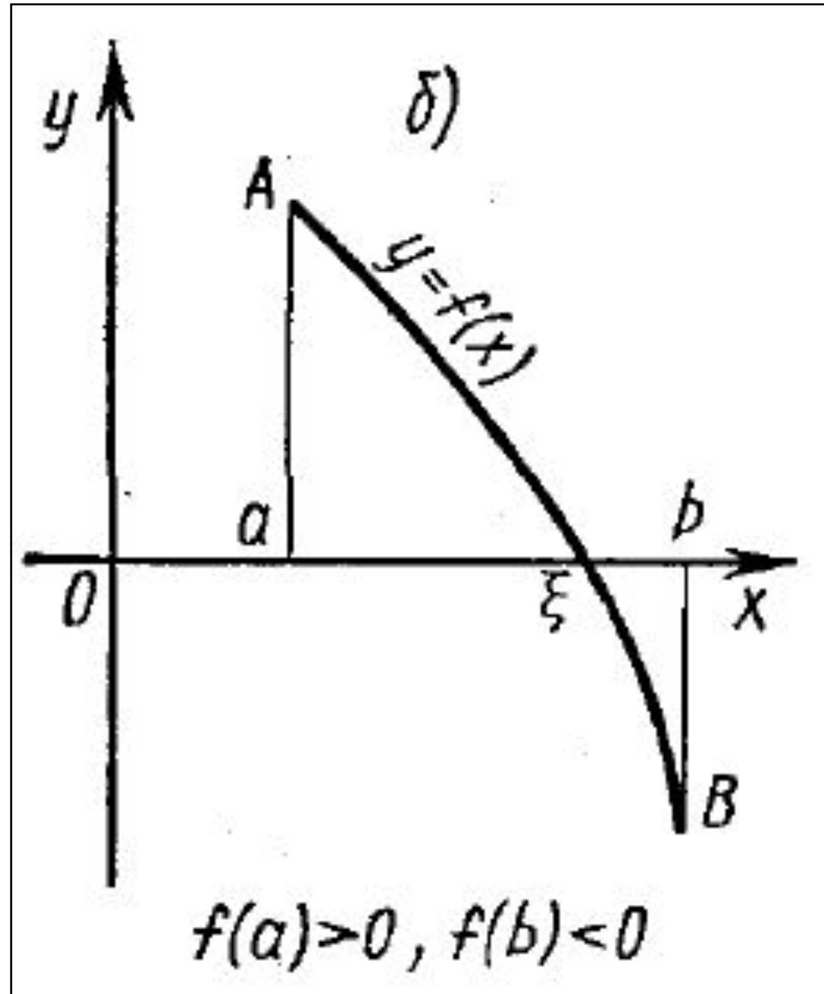
Аналитический метод отделения корней

1) Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция *F(x)* принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение
F(x)=0
имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень

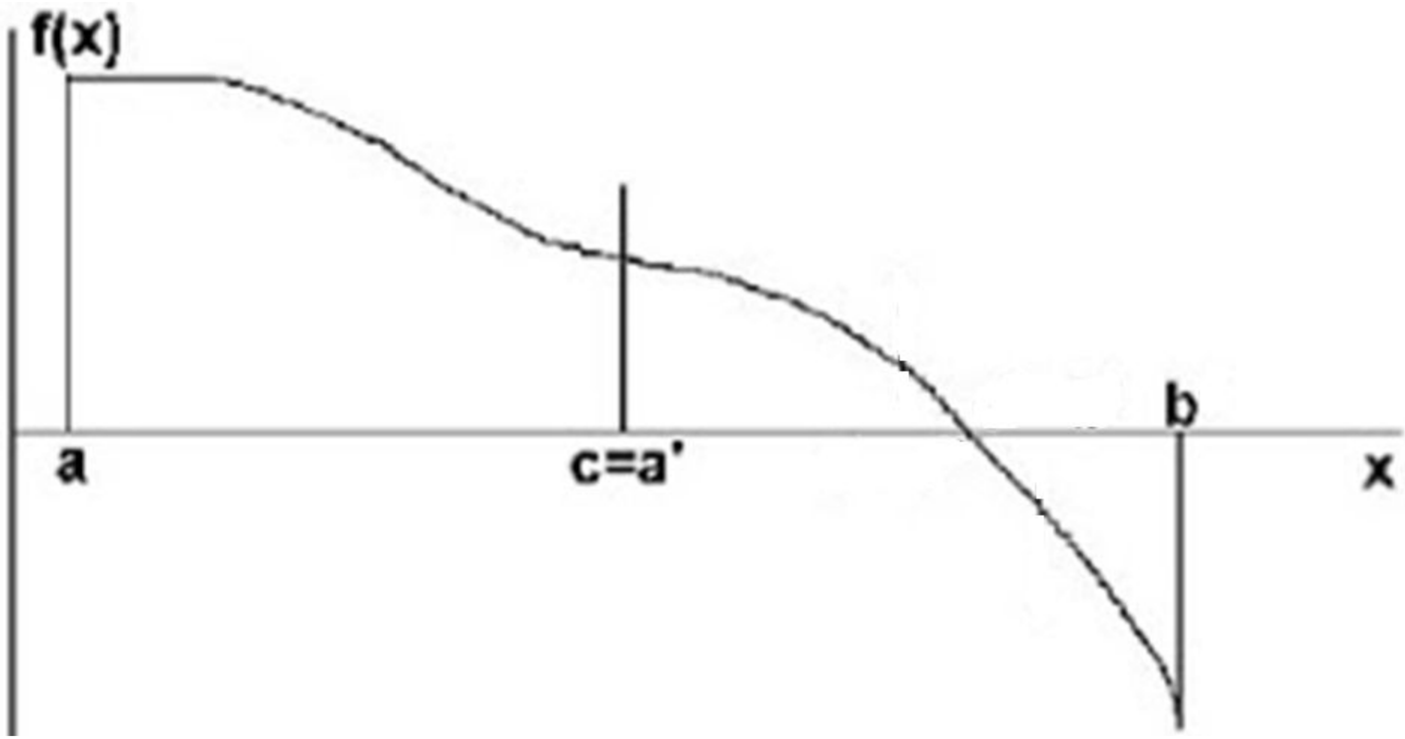
2) Если функция F(x) к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке $[a,b]$ единственный

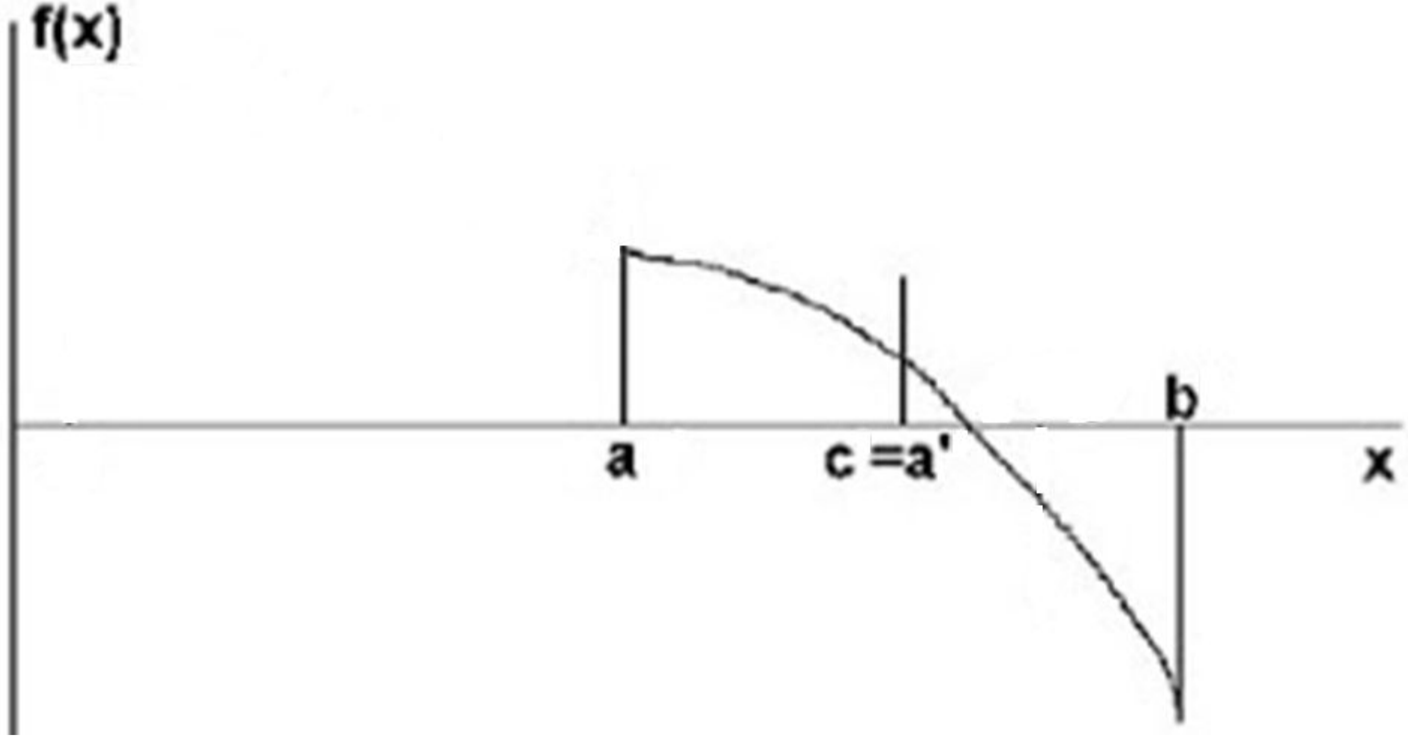
f(A)*f(B)<0

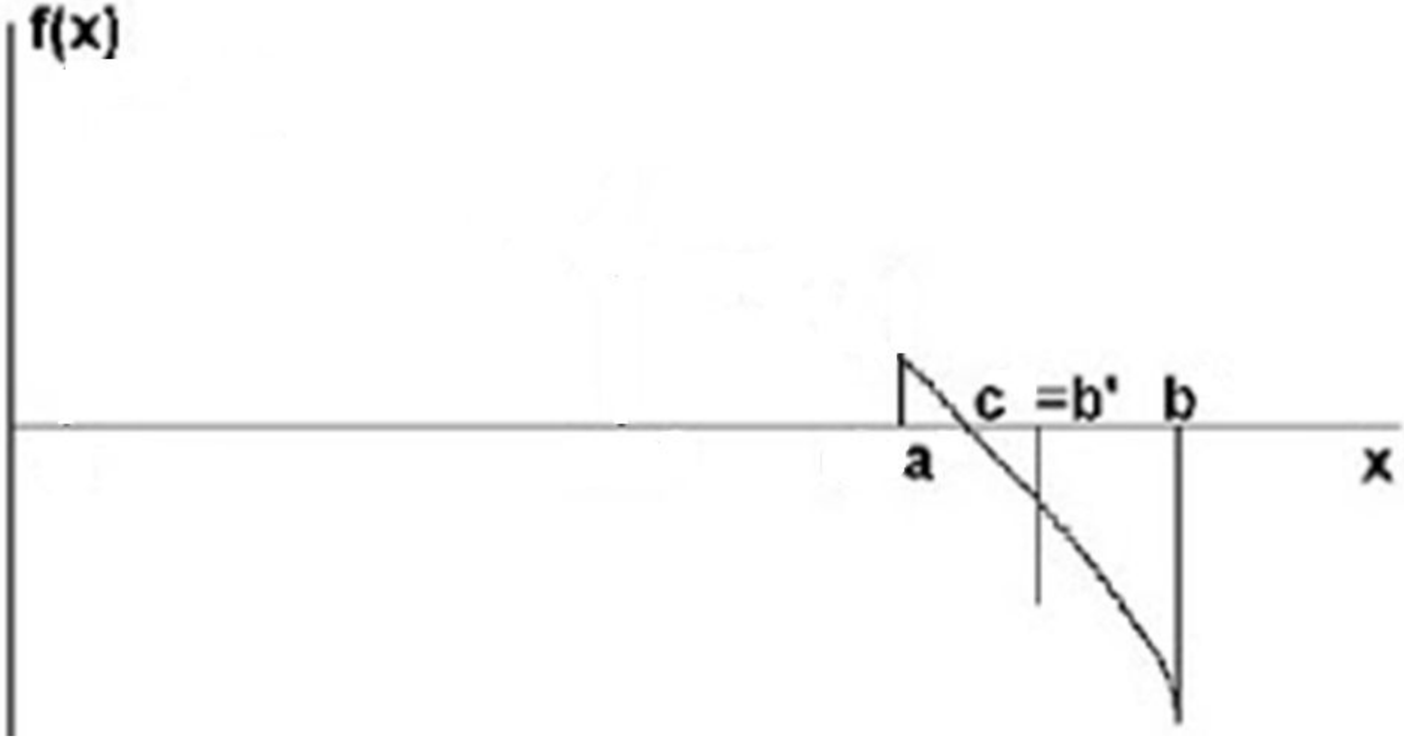




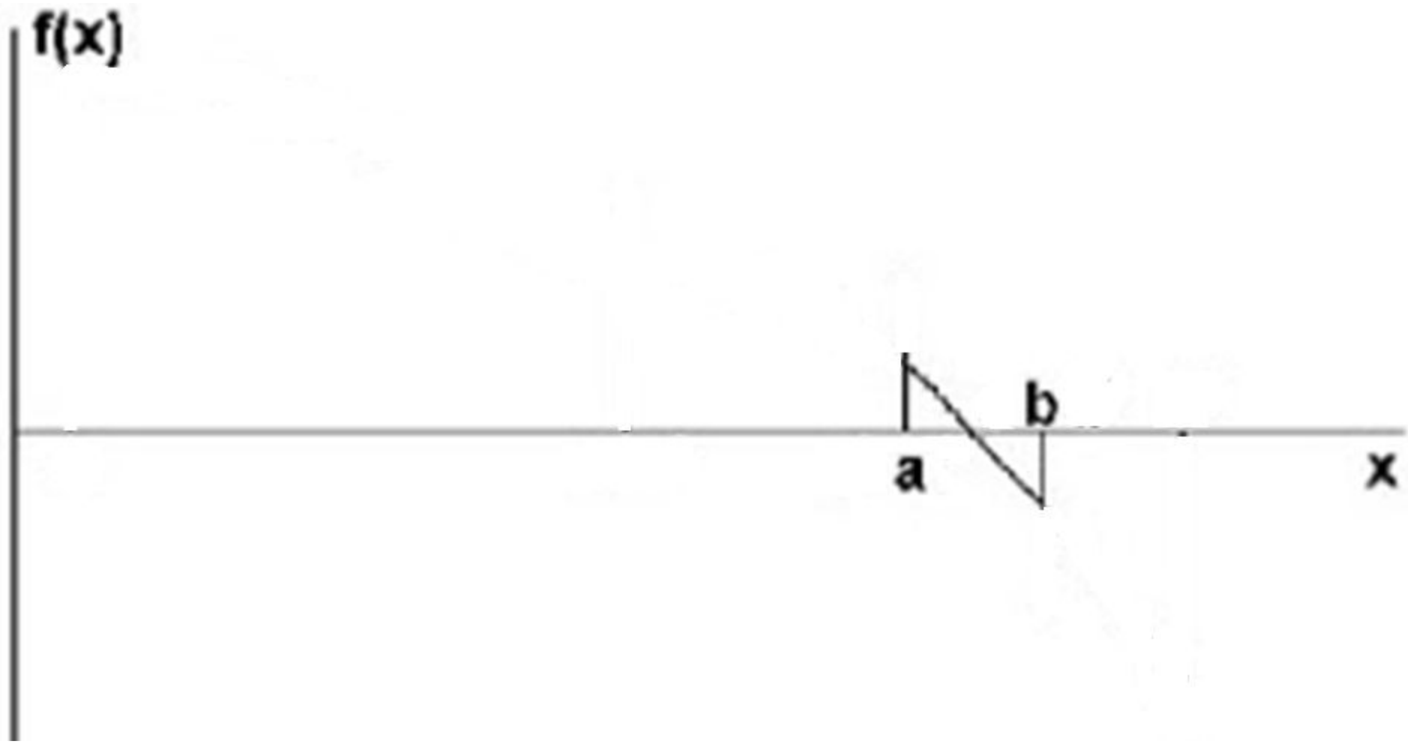
Метод половинного деления


f(x)
a
c=a'
b
x


f(x)
a
c =a'
b
x



f(x)
c
=b'
b
a
x


f(x)
a
b
x

Алгоритм данного метода:

1. Определить начальные данные (a, b, ε).
2. Если нужная точность достигнута (| b - a | < ε) то п.6
3. Найти середину очередного отрезка (c=(a+b)/2).
4. Если значения функции в точках a и c одного знака (f(a)*f(c)>0), то в качестве следующего отрезка взять правую половину (a=c), иначе левую (b=c).
5. Иди к п.2.
6. Напечатать ответ ((a + b) / 2)

Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

лежащий на отрезке [0, 1].

Метод хорд

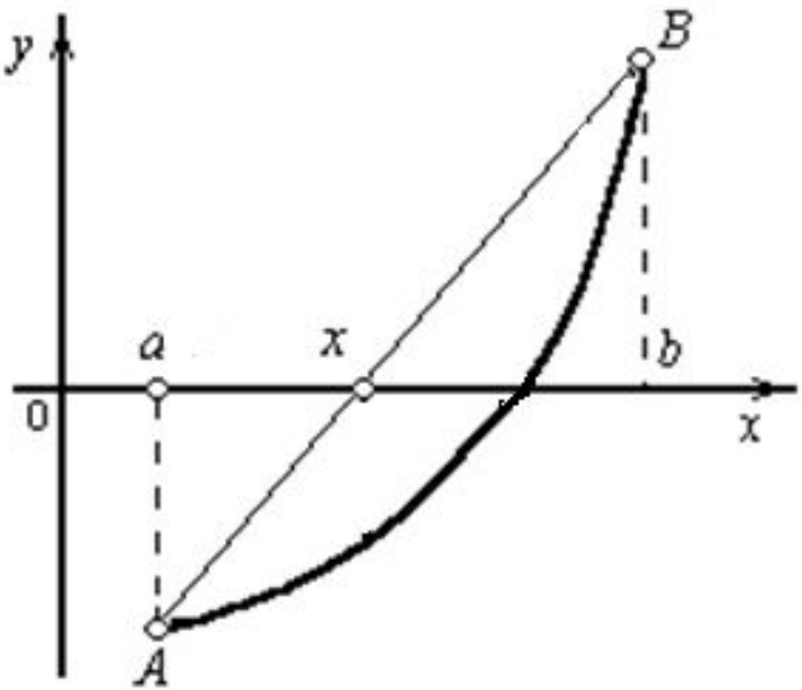
Применяется в том случае, когда $f'(X)$ и $f''(X)$ не изменяют знака на отрезке $[a,b]$, т.е. функция $f(X)$ на отрезке $[a,b]$ монотонна и не имеет точек перегиба

Метод хорд

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

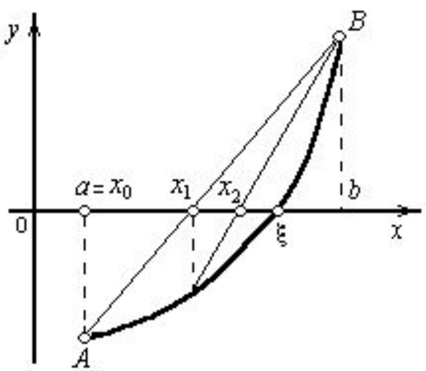
$$y = f(a) + \left(f(b) - f(a)\right)\frac{x-a}{b-a}$$

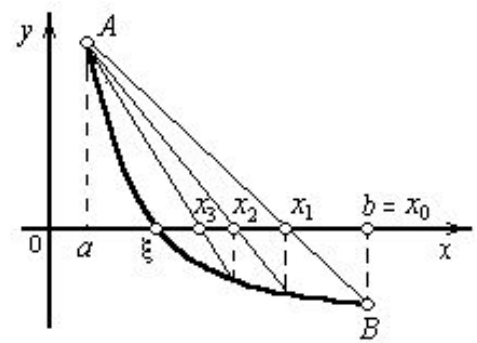
$$x = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\left(b-a\right).$$



Метод хорд

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \qquad x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$





$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

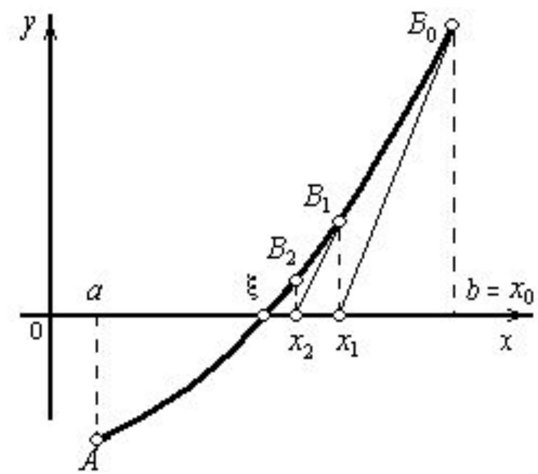
Найти положительный корень уравнения (методом хорд)

$$x^3 - 0{,}2\,x^2 - 0{,}2\,x - 1{,}2 = 0$$

с точностью ε = 0,01.

Метод Ньютона (касательной)

В качестве исходной точки x_0 *выбирается тот конец интервала* $[a, b]$, *которому отвечает ордината того же знака, что и знак* $f''(x)$.



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

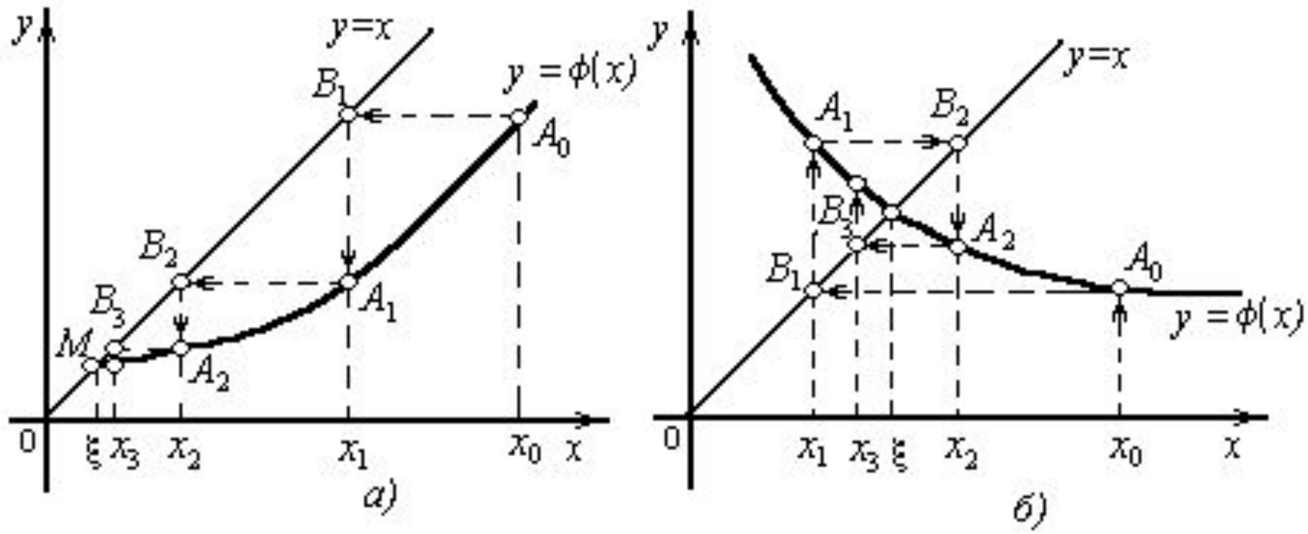
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Метод простой итерации

$f(x) = 0$

$x = \phi(x).$

$\varphi'(x) > 0$



$\varphi'(x) > 0$ $\varphi'(x) > 0$

Решить уравнение

$x^3 - x - 1 = 0$, на интервале $1<x<2$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,260	1,312	1,322	1,3243