

# ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

# ПЛАН

1. Поняття вектора. Історична довідка.

2. Вектор. Модуль і напрям вектора.  
Рівність векторів.

3. Координати вектора.

4. Додавання векторів.

5. Віднімання векторів.

6. Множення вектора на число.  
Колінеарні вектори.

7. Скалярний добуток векторів.

# ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

Поняття вектора є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Його можна визначати по-різному:

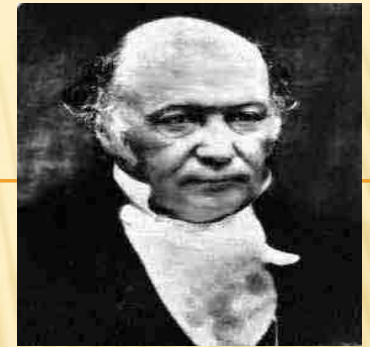
Як напрямлений відрізок

Як упорядковану пару точок, що є кінцями напрямленого відрізка

Як паралельне перенесення



# ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА



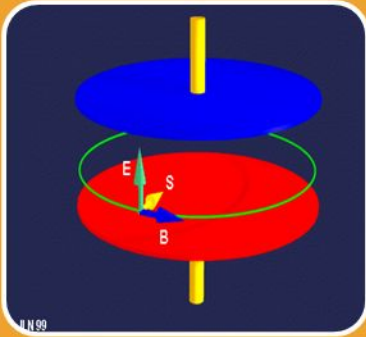
**Г.  
Грассман**

**В.  
Гамільтон**

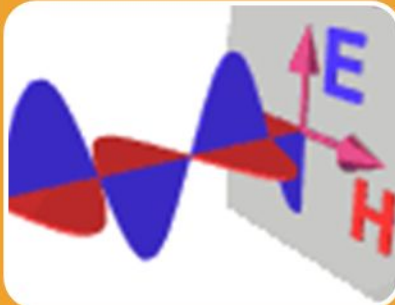
Поняття вектора уперше з'явилося в роботах німецького математика ХІХ ст. Г. Грассмана і ірландського математика В.Гамільтона. Потім воно було охоче сприйняте багатьма математиками і фізиками.

В сучасній математиці це поняття відіграє дуже важливу роль.

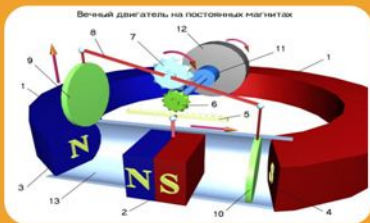
# ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРА



Уперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо.



Високий ступінь наочності і простота геометричних операцій над векторами як напрямленими відрізками сприяли тому, що поняття вектора знайшло загальне визнання і застосування в інших розділах фізики: в кінематиці, статиці, динаміці точки і динаміці системи, в теорії відносності, в теорії потенціалу та гідродинаміці.



Також стало одним із основних понять таких наук, як векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля.

# МАТЕМАТИЧНЕ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

Проте хоча поняття вектора знайшло перше застосування в фізиці, це **математичне поняття**, усі операції над якими виконуються за законами математики.

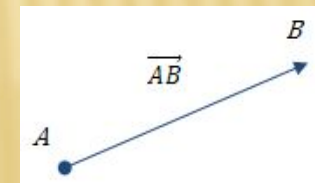
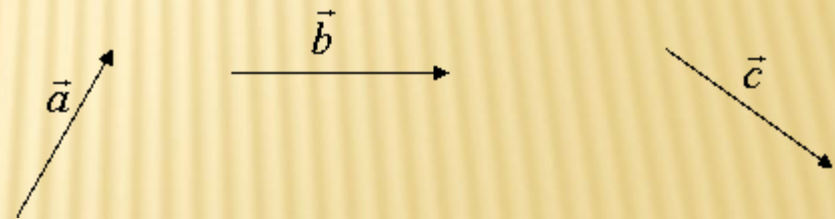
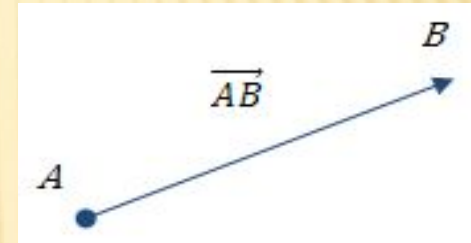
Вектор як математичне поняття міцно ввійшов у шкільну математику, у різні нематематичні науки. В школі за допомогою векторного методу розв'язується багато різноманітних задач, які не мають іншого способу розв'язання.

Саме тому вивчення поняття вектора є дуже важливим в сучасних умовах розвитку математичних наук.



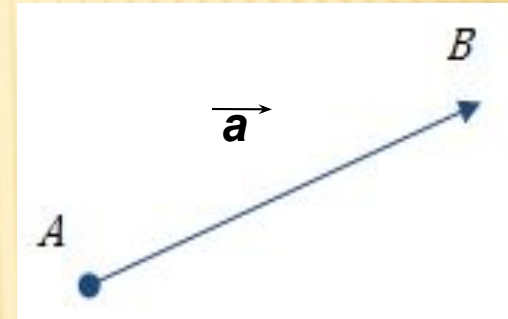
# ВЕКТОР. ПОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА

- **Вектором** називається напрямлений відрізок, тобто відрізок в якому виділено початок і кінець
- Вектори позначають так:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$
- Або за початком і кінцем:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ .



# МОДУЛЬ ВЕКТОРА

□ **Абсолютною величиною** (або **модулем**) називається довжина відрізка, що задає вектор.



$$|\vec{a}| = AB$$

□ Абсолютна величина нуль-вектора дорівнює нулю.

$$|\vec{0}| = 0$$

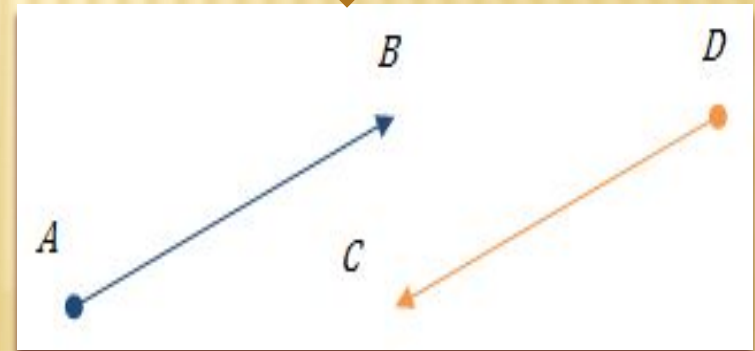
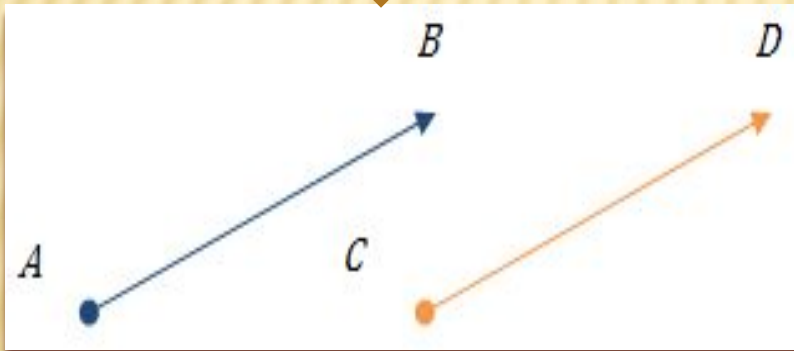




# НАПРЯМ ВЕКТОРА

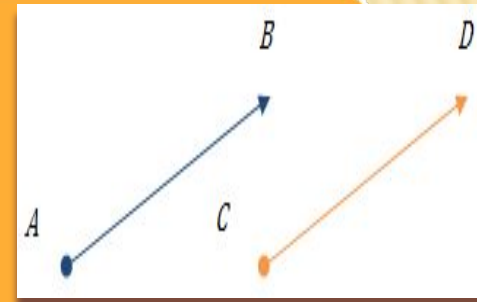
Вектори  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$  називаються **однаково напрямленими**, якщо однаково напрямлені і півпрямі  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$ .

Вектори  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$  називаються **протилежно напрямленими**, якщо протилежно напрямлені й півпрямі  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$ .



# РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ

**Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.**



**Рівні вектори однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною.**

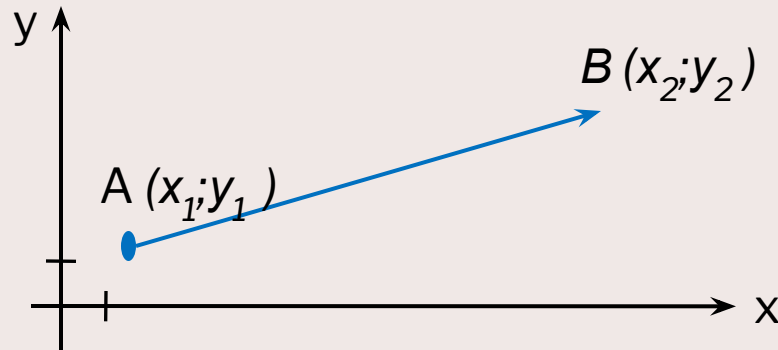
**І навпаки, якщо вектори однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною, то вони рівні.**



# КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

**Координатами вектора  $\vec{a}$**  з початком  $A(x_1; y_1)$  і кінцем  $B(x_2; y_2)$  називаються числа  
 $a_1 = x_2 - x_1$     $a_2 = y_2 - y_1$

**Абсолютна величина вектора  $\vec{a}$**  з координатами  $(a_1; a_2)$  дорівнює арифметичному квадратному кореню із суми квадратів координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$


# ЗАДАЧА №1

- Дано точки  $A(3;5)$  і  $B(-3;3)$ . Знайдіть координати вектора  $\vec{AB}$ .

# ЗАДАЧА №2

- Дано вектор  $\vec{a}(3;4)$ . Знайти абсолютну величину вектора  $\vec{a}$ .



# РОЗВ'ЯЗАННЯ N°1

$$\vec{AB}(-3-3;3-5) = \vec{AB}(-6;-2).$$

Відповідь.  $\vec{AB}(-6;-2)$

# РОЗВ'ЯЗАННЯ N°2

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Відповідь.  $|\vec{a}| = 5$ .



# ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

□ Сумою векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  з координатами  $a_1, a_2$  і  $b_1, b_2$  називається вектор  $\vec{c}$  з координатами  $a_1 + b_1, a_2 + b_2$ , тобто

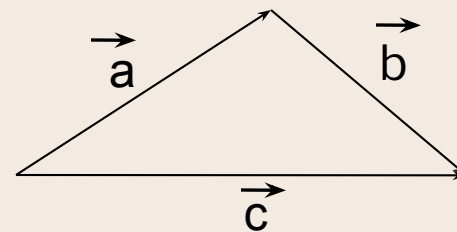
$$\vec{a}(a_1, a_2) + \vec{b}(b_1, b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

□ Закони додавання

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

# ЗАДАЧА №3

- Знайдіть координати вектора  $\vec{c}$ , що є сумою векторів  $\vec{a}(4;8)$  і  $\vec{b}(-4;5)$ .

## РОЗВ'ЯЗАННЯ

- Нехай  $\vec{c}(c_1; c_2)$ .

$$c_1 = a_1 + b_1; c_1 = 4 - 4 = 0;$$

$$c_2 = a_2 + b_2; c_2 = 8 + 5 = 13.$$

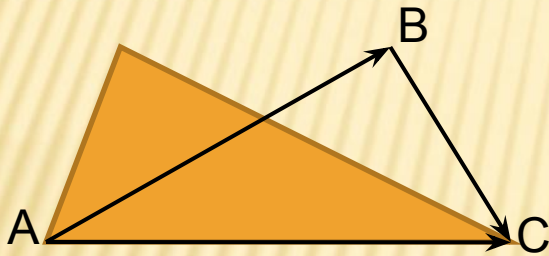
Отже  $\vec{c}(0;13)$ .

Відповідь:  $\vec{c}(0;13)$



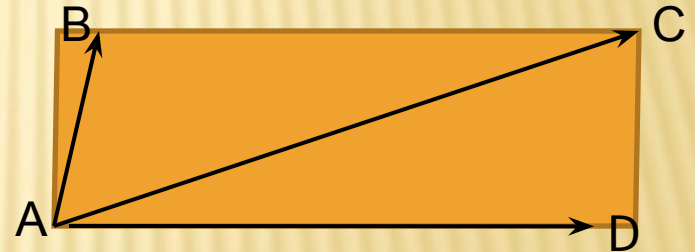
# ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

Правило  
трикутника



$$\bullet \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Правило  
паралелограма



$$\bullet \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$



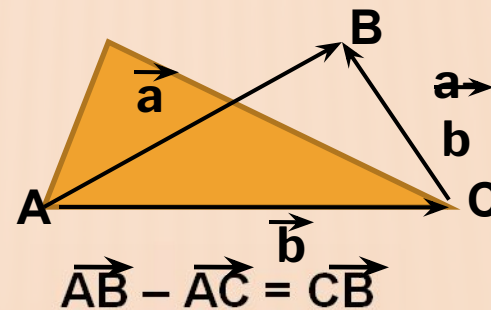


# ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

Правило для  
побудови  
різниці двох  
векторів

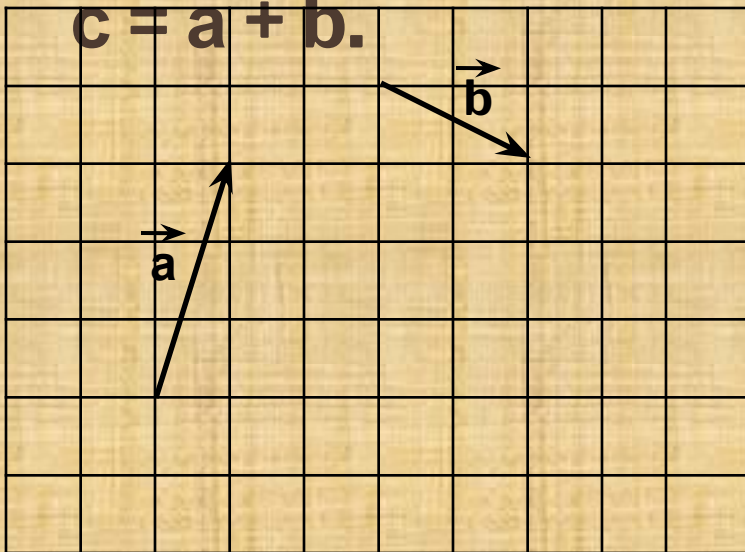
- Щоб побудувати вектор, який дорівнює різниці векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , треба від однієї точки відкласти вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , що дорівнюють їм. Тоді вектор, початок якого збігається з кінцем вектора  $\vec{b}$ , а кінець – з кінцем вектора  $\vec{a}$ , буде різницею векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Побудова



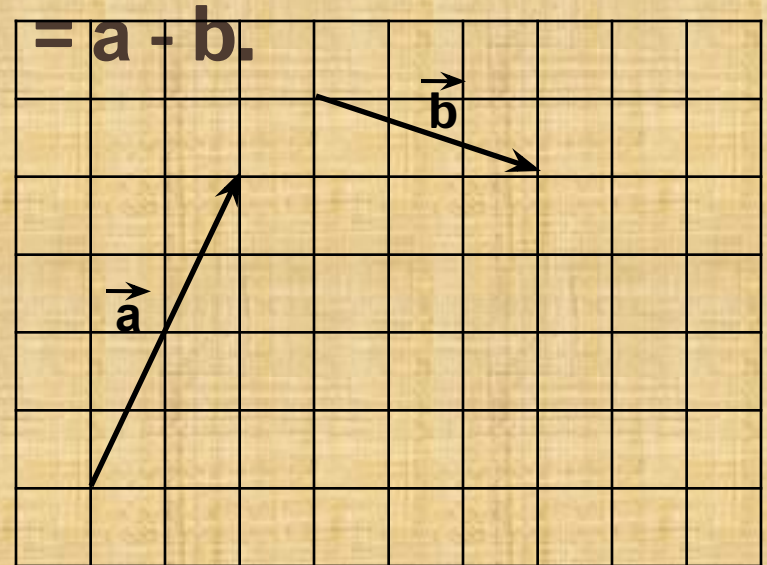
# ЗАДАЧА №4

- Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  (див.рис.). Побудувати вектор:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

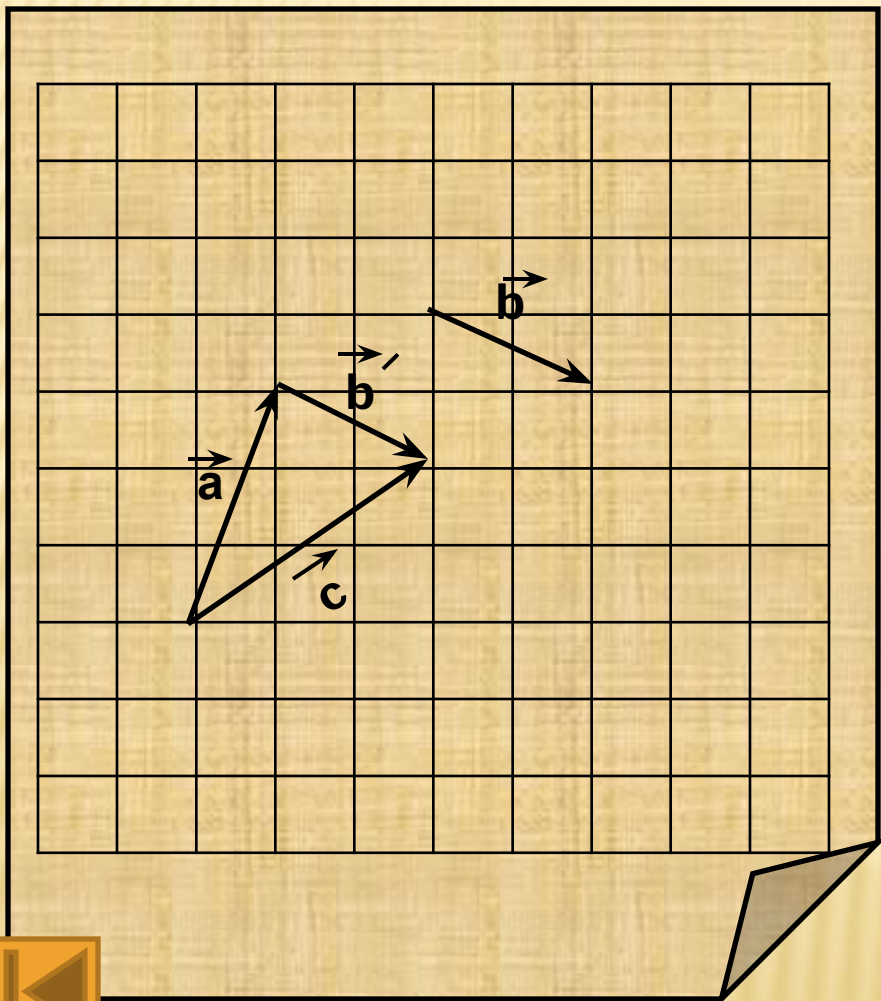


# ЗАДАЧА №5

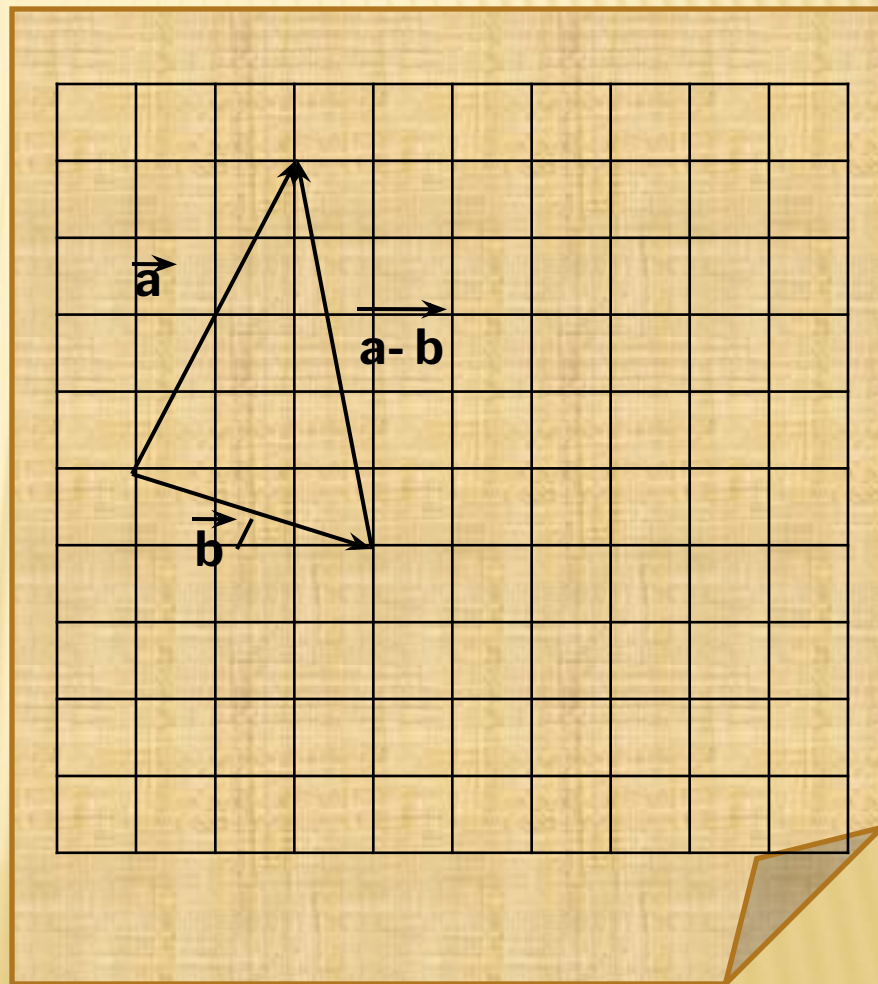
- Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  (див.рис.). Побудувати вектор:  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .



# ПОБУДОВА N°4




# ПОБУДОВА N°5



# МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО.

**Добутком вектора  $(a_1; a_2)$  на число  $\lambda$**

**називається вектор  $(\lambda a_1; \lambda a_2)$ , тобто**


$$(a_1; a_2) \lambda = (\lambda a_1; \lambda a_2)$$

**Закони множення вектора на число**

Для будь-якого вектора  $\vec{a}$  та чисел  $\lambda, \mu$

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

Для будь-яких двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  та

$$\text{числа } \lambda$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

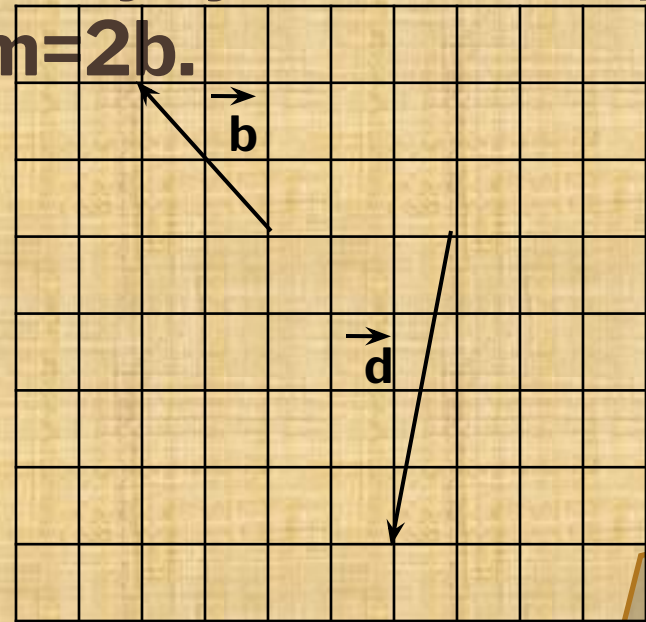
## ЗАДАЧА №6

- Дано вектори  $\vec{c} (-3; 8)$  і  $\vec{b} (4; 16)$ .  
Обчислити  
кдо  $\frac{1}{4}$  динати вектора  
 $\vec{n} = \vec{b} + \vec{c}$ .



## ЗАДАЧА №7

- Дано вектори  $\vec{d}$  і  $\vec{b}$   
(див. рис.).  
Побудувати вектор  
 $\vec{m} = 2\vec{b}$ .



1. Знайдемо координати вектора  $\vec{a}$

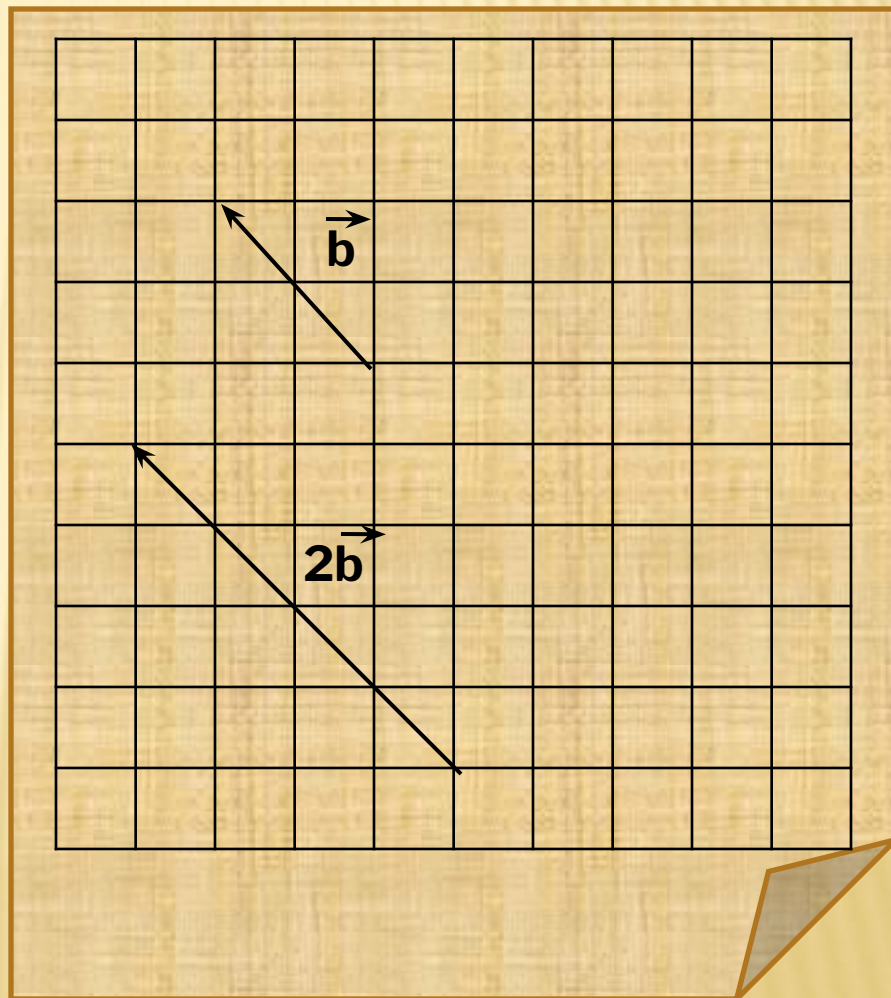
$$\frac{1}{4} \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{a}$$

$$\vec{b} = (4; 16) =$$

$$= \left( \frac{1}{4} \cdot 4; \frac{1}{4} \cdot 16 \right) = (1; 4).$$

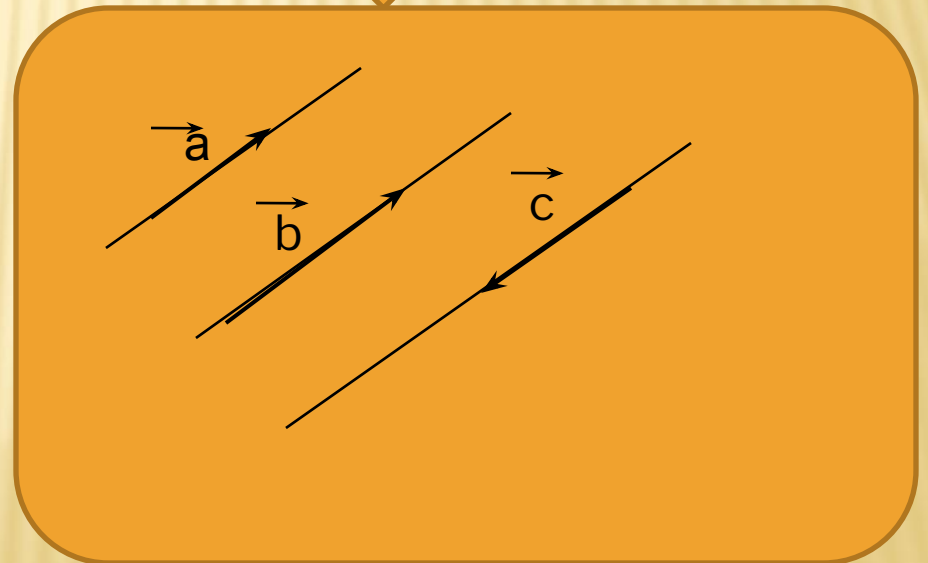
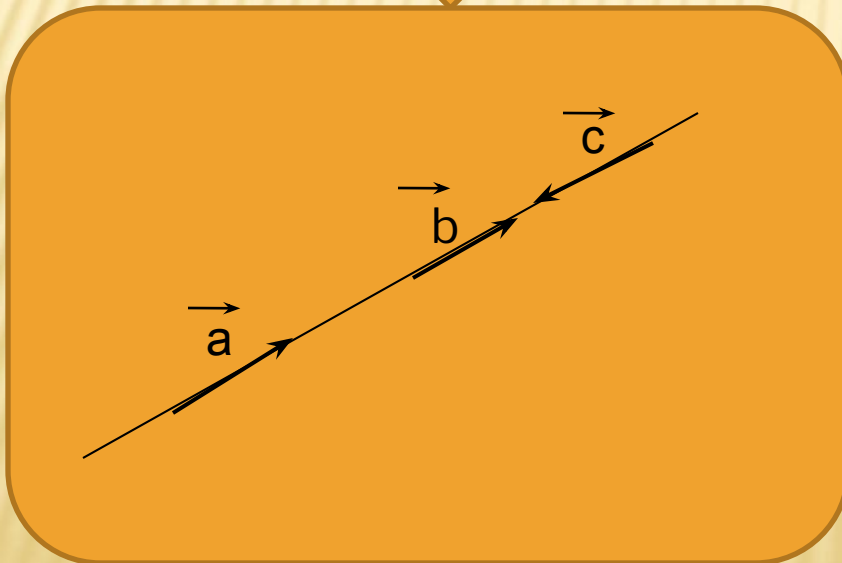
2. Знайдемо координати вектора  $\vec{n}$ .

$$\vec{n} = (1 + (-3); 4 + 8) = (-2; 12).$$



# КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ

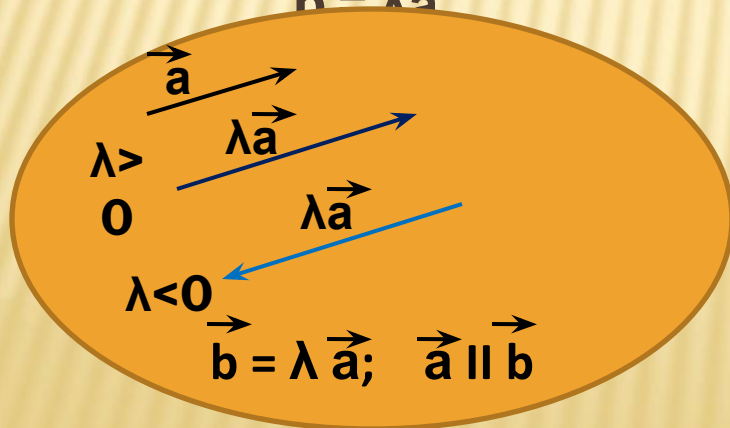
Два ненульових вектора називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих



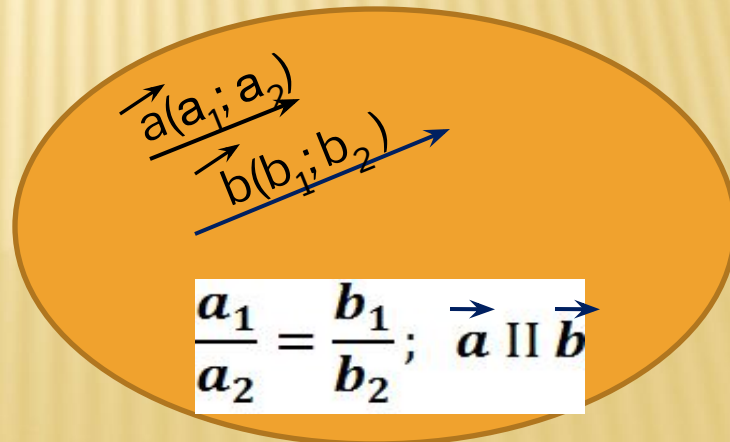
# ОЗНАКИ КОЛІНЕАРНОСТІ ВЕКТОРІВ

□ Якщо ненульові вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  пов'язані співвідношенням  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  ( $\lambda \neq 0$ ), то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні. І навпаки, якщо ненульові вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні, то існує таке число  $\lambda \neq 0$ , що

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$



Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні. І навпаки, якщо відповідні координати двох векторів пропорційні, то ці два вектори колінеарні.





## ЗАДАЧА № 8

---

- Дано чотири точки  $A(3;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(2;7)$  і  $D(5;6)$ . Доведіть, що  $\vec{AB}$  і  $\vec{CD}$  колінеарні.



# ДОВЕДЕННЯ

1. Знайдемо координати вектора  $\vec{AB}$ .

$$\vec{AB} (0-3; 1-0) = \vec{AB}(-3; 1);$$

2. Знайдемо координати вектора  $\vec{CD}$ .

$$\vec{CD} (5 - 2; 6 - 7) = \vec{CD}(3; -1).$$

3. Якщо  $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$  і  $\vec{AB}(x_1; x_2), \vec{CD}(y_1; y_2)$ ,

то  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ;

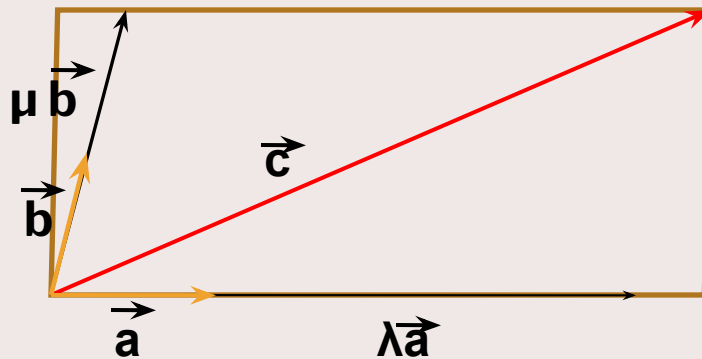
$$\frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \quad -1 = -1, \quad \text{отже } \vec{AB} \parallel \vec{CD}, \text{ що й}$$

Треба

було довести.

# РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА ДВОМА НЕКОЛІНЕАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

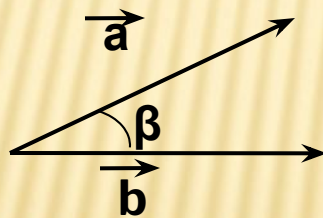
Будь – який вектор  $\vec{c}$  можна розкласти за двома неколінеарними векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у вигляді  $\vec{c} \equiv \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ , до того ж це розкладання єдине



$$\vec{c} \equiv \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

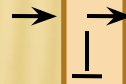
# СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів  $\vec{a}(a_1; a_2)$  і  $\vec{b}(b_1; b_2)$  називається число  $a_1 b_1 + a_2 b_2$



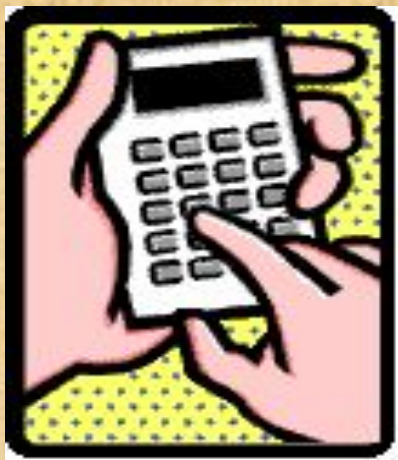
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



## ЗАДАЧА № 9

- Знайти кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо  $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ .



## ЗАДАЧА № 10

- Довести, що вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{c}$  перпендикулярні, якщо  $a(3;2)$ ,  $c(6;-9)$ .



# РОЗВ'ЯЗАННЯ N°9 N°10

# ДОВЕДЕННЯ

$$\square \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \beta;$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \beta = \frac{12}{4\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = 45^\circ$$

Відповідь :  $45^\circ$ .

$\square$  Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-9) = 18 - 18 = 0,$$

тобто  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

