

ИФРУ

ИНСТИТУТ
ФОНДОВОГО
РЫНКА
И УПРАВЛЕНИЯ



Глава 4. Финансовая математика

1. Случайное событие
2. Случайная величина

Случайное событие

Вопрос 4.1.90

Под случайным событием в теории вероятности понимается некоторый факт, который характеризуется следующими признаками:

- I. Наблюдается однократно;
- II. Может наблюдаться неоднократно;
- III. Нельзя с полной определенностью утверждать - произойдет он в очередной раз или нет;
- IV. При условии контроля условий эксперимента можно утверждать с полной определенностью, произойдет он или нет.

Ответы:

- A. I и IV
- B. II и III**
- C. II, III или IV
- D. III

Случайное событие

Достоверное событие – это событие, которое происходит всегда.

Невозможное событие – это событие, которое в силу объективных причин в результате опыта произойти не может.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Случайное событие

Вероятность события A :

$$P(A) = m/n$$

где

n – общее число возможных случаев;

m – число случаев, благоприятных событию A .

$P(A) = 1$, если случайное событие – достоверное

$P(A) = 0$, если случайное событие - невозможное

Случайное событие

Вопрос 4.2.111

Документы профессионального участника пронумерованы от 1 до 30. Какова вероятность того, что случайно будет открыт документ с номером, кратным 5?

Случайное событие

$$P(A) = 6/30 = 0,2$$

ОТВЕТЫ:

A. 0,2

B. 0,17

C. 0,8

D. 0,1

Случайное событие

Теорема сложения вероятностей:

Вероятность суммы двух совместимых событий равна:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A*B)$$

Теорема умножения вероятностей:

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого события, вычисленную при условии, что первое событие имело место:

$$P(A*B) = P(A)*P(B/A)$$

Если события независимы, то:

$$P(A*B) = P(A)*P(B)$$

Случайное событие

Вопрос 4.2.137

Даны следующие вероятности роста доходности акций компаний «А», «В» и «С»: $P(A)=0,8$; $P(B)=0,7$; $P(C)=0,9$.

Какова вероятность того, что доходности акций трех компаний вырастут?

Случайное событие

$$P(ABC) = P(A) * P(B) * P(C) = 0,8 * 0,7 * 0,9 = 0,504$$

ОТВЕТЫ:

A. **0,504**

B. 0,994

C. 0,974

D. 0,404

Случайное событие

Сочетаниями называют комбинации, составленные из **n** различных элементов по **m** элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний:

$$C_n^m = n! / (m! (n - m)!)$$

Случайное событие

Вопроса: 4.2.125

Имеется 10 разных акций. Инвестор хотел бы построить портфель из трех акций, включив каждую из них по одной штуке. Сколько вариантов портфелей может сформировать инвестор?

Случайное событие

$$C_n^m = 10! / (3! * (10 - 3)!) = 120$$

Ответы:

A. 30

B. 90

C. 120

Случайная величина

Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Случайная величина

2 формы закона распределения :

- функция распределения
- плотность распределения

Случайная величина

В форме функции распределения $F(x)$
закон распределения имеет следующий вид:

$$F(X) = P(X < x)$$

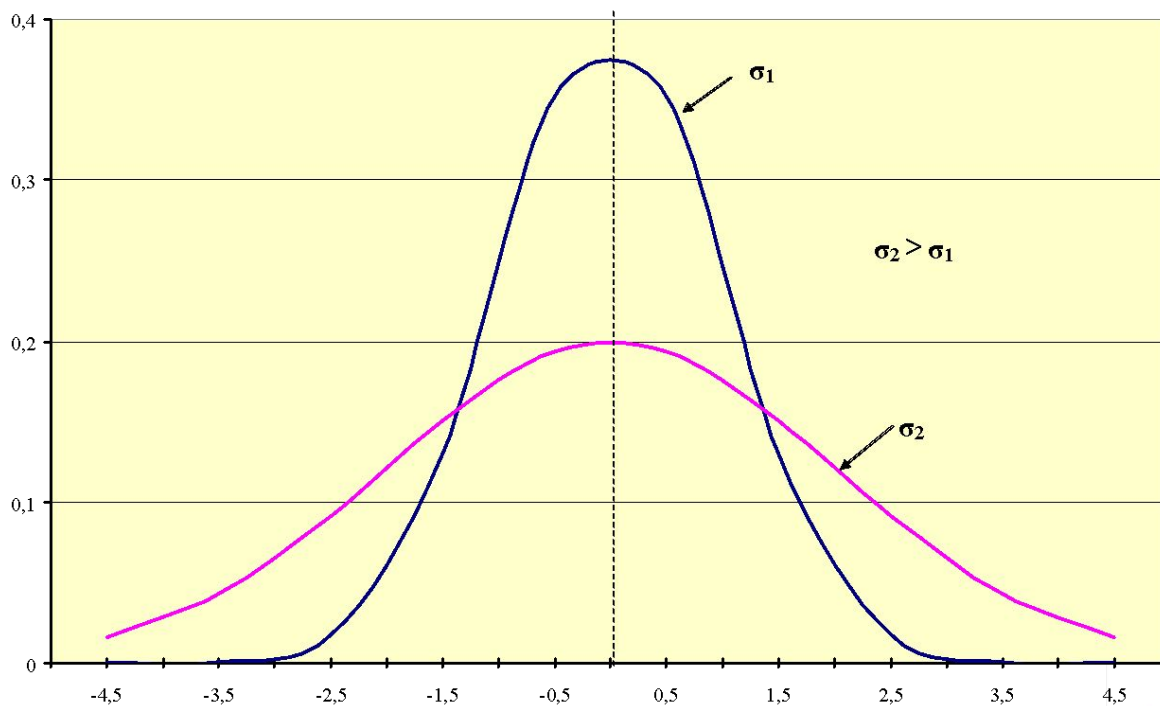
Случайная величина

В форме плотности распределения закон распределения имеет следующий вид:

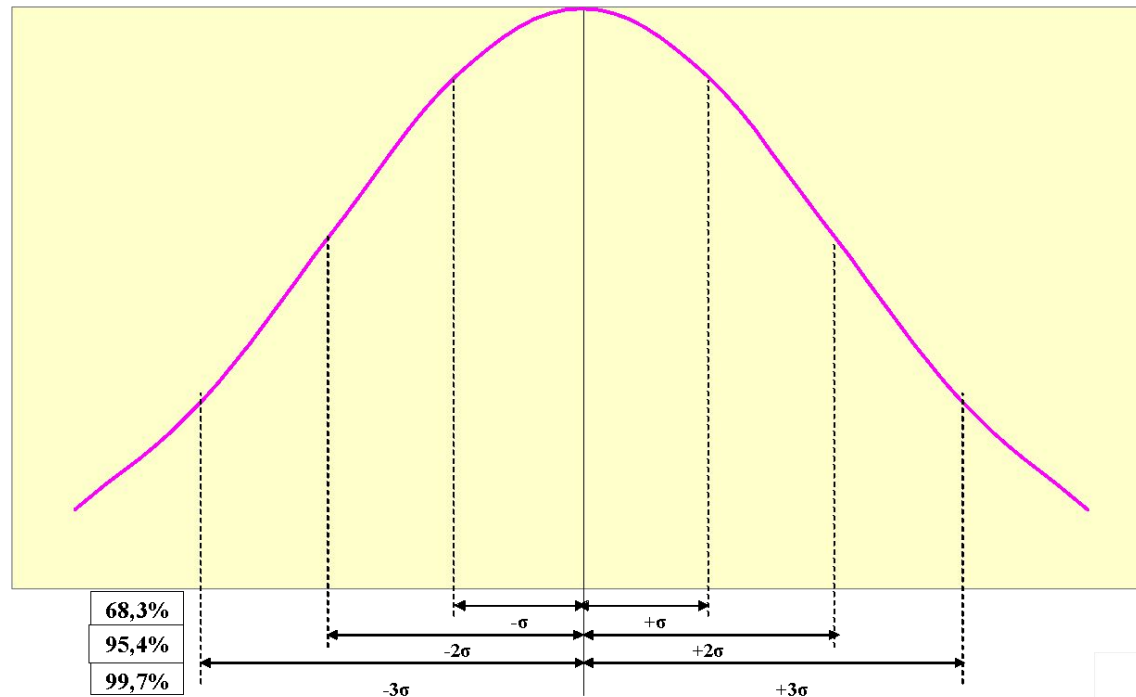
$$f(x) = F'(X)$$

Случайная величина

Нормальный закон распределения



Случайная величина



Случайная величина

Вероятность попадания случайной величины в симметричный относительно математического ожидания диапазон, ширина которого кратна значению стандартного отклонения:

$$P \approx 68,3\% \rightarrow \pm 1 * \sigma$$

$$P \approx 95,4\% \rightarrow \pm 2 * \sigma$$

$$P \approx 99,7\% \rightarrow \pm 3 * \sigma$$

$$\sigma_X = \sqrt{D [X]}$$

Случайная величина

Вопрос 4.2.107

Пусть X - случайная величина, распределенная по нормальному закону, M - математическое ожидание, D - дисперсия случайной величины, $M(X)=2$, $D(X)=0,25$.

Укажите верное утверждение из следующих:

- I. X принимает значения с вероятностью 68,3% в интервале от 1,75 до 2,25;
- II. X принимает значения с вероятностью 68,3% в интервале от 1,5 до 2,5;
- III. X принимает только положительные значения.

Случайная величина

$$P \approx 68,3\% \rightarrow 2 \pm 1*\sigma \rightarrow \{1,5;2,5\};$$

$$P \approx 95,4\% \rightarrow 2 \pm 2*\sigma \rightarrow \{1,0;3,0\};$$

$$P \approx 99,7\% \rightarrow 2 \pm 3*\sigma \rightarrow \{0,5;3,5\};$$

Ответы:

A. Только I и III

B. Только II и III

C. Только I

D. Только II

Случайная величина

Вопрос 4.2.120

Доходность акции A распределена нормально. Среднее значение доходности равно 30% годовых, стандартное отклонение доходности в расчете на год равно 15%. Определить, с какой вероятностью через год доходность акции может оказаться в диапазоне от нуля до 60%.

Случайная величина

$$P \approx \{0;60\} \rightarrow 30 \pm 2*\sigma \rightarrow 95,4\%$$

Ответы:

A. 68,3%

B. 95,4%

C. 99,7%

D. 0%

Случайная величина

Числовые характеристики

$$M [X] = \sum x_i * p_i$$

$$D [X] = M [(X - M (X))^2]$$

$$\sigma_x = \sqrt{D [X]}$$

Случайная величина

Вопрос 4.2.126

Через год цена акции может иметь следующее распределение:

Цена акции 30 руб. 40 руб. 50 руб.

Вероятность 30% 60% 10%

Определить **математическое ожидание** цены акции через год.

Случайная величина

$$M [X] = \sum x_i * p_i = 30*0,3 + 40*0,6 + 50*0,1 = 38 \text{ руб.}$$

Ответы:

A. 38 руб.

B. 40 руб.

C. 60 руб.

Случайная величина

Вопрос 4.2.129

Доходность актива за 3 года представлена в таблице:

| | | | |
|---------------|----|----|----|
| Годы | 1 | 2 | 3 |
| Доходность(%) | 10 | 14 | 18 |

Определить риск актива, представленный показателями выборочной дисперсии и стандартного отклонение доходности.

Случайная величина

$$\sigma_x = \sqrt{D [X]}$$

$$M(X) = (10+14+18)/3 = 14$$

$$D [X] = M [(X - M (X))^2] = [(10 - 14)^2 + (14 - 14)^2 + (18 - 14)^2]/3 \\ = 10,67$$

$$\sigma_x = \sqrt{D [X]} = 3,27\%$$

Ответы:

A. 10,67; 3,27% B. 32; 5,66% C. 89,5; 9,47% D. 108; 10,39%

Случайная величина

Свойства числовых характеристик

$$M [c] = c$$

$$M [X+c] = M [X] +c$$

$$M [c*X] = c*M [X]$$

$$D [c] = 0$$

$$D [X+c] = D [X]$$

$$D [c*X] = c^2* D [X]$$

Случайная величина

Вопрос 4.1.96

Пусть X - случайная величина, M - математическое ожидание, $M(X)=0,5$. Найти $M(X + 2)$.

Случайная величина

$$M(X+2) = M(X) + M(2) = 0,5 + 2 = 2,5$$

Ответы:

A. 2,5

B. 4,5

C. 5

D. Указанных данных недостаточно для решения задачи

Случайная величина

Вопрос 4.2.104

Пусть X - случайная величина, M - математическое ожидание, D - дисперсия случайной величины, $M(X)=0,5$, $D(X)=2,25$.

Найти $D(X + 2)$.

Ответы:

A. 1,5

B. 2,25

C. 2,5

D. Указанных данных недостаточно для решения задачи

Случайная величина

Вопрос 4.2.105

Пусть X - случайная величина, M - математическое ожидание, D - дисперсия случайной величины, $M(X)=0,5$, $D(X)=1,5$. Найти $D(2X + 1)$.

Случайная величина

$$D(2X + 1) = D(2X) = 2^2 * D(X) = 4 * 1,5 = 6$$

Ответы:

A. 1,5

B. 4

C. 6

D. Указанных данных недостаточно для решения задачи

Случайная величина

Вопрос 4.2.140

Даны 3 актива. Известно, что ожидаемая доходность первого актива $X = 30\%$, ожидаемая доходность второго актива $Y = 20\%$. Определить ожидаемую доходность актива Z , если известно, что $Z=9X-6Y+80$.

Случайная величина

$$M [9X-6Y+80] = M [9X] - M [6Y] + M [80] = 9*30 - 6*20 + 80 = 230$$

Ответы:

A. 230

B. 150

C. 1710

D. 3150

Случайная величина

Дисперсия суммы
двух случайных величин

$$D [X+Y] = D [X] + D [Y] + 2 \cdot K_{xy}$$

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y – независимые
случайные величины

Случайная величина

$$K_{xy} = M [(X - M_x)(Y - M_y)]$$

$$r_{xy} = K_{xy} / \sigma_x * \sigma_y$$

Случайная величина

Вопрос 4.2.103

Пусть X и Y - случайные величины, D - дисперсия случайной величины, K - ковариация, $D(X)=0,5$, $D(Y)=1,5$, $K(X, Y) = -0,5$.
Найти $D(X + Y)$.

Случайная величина

$$D [X+Y] = D [X] + D [Y] + 2 * K_{xy} = 0,5 + 1,5 + 2 * (-0,5) = 1$$

ОТВЕТЫ:

A. 1,5

B. 2

C. 1

Случайная величина

Вопрос 4.2.123

Ковариация доходностей акций А и В равна 120. Стандартное отклонение доходности акций А и В равно 20% и 30%.

Определить коэффициент корреляции доходностей акций.

Случайная величина

$$r_{xy} = K_{xy} / \sigma_X * \sigma_Y = 120 / 20 * 30 = 0,2$$

Ответы:

A. 0,2

B. 2,4

C. 5

Случайная величина

Вопрос 4.2.132

Стандартное отклонение доходности первого актива равно 25%, второго – 34%, коэффициент корреляции между доходностями активов 0,65. Определить ковариацию доходностей активов.

Случайная величина

$$r_{xy} = K_{xy} / \sigma_X * \sigma_Y$$
$$K_{xy} = r_{xy} * \sigma_X * \sigma_Y = 0,65 * 25 * 34 = 552,5$$

Ответы:

A. 552,5

B. 0,765

C. 7,65

Случайная величина

Вопроса: 4.2.128

Прогноз инвестора относительно возможных сценариев доходности акций компаний А и В с учетом их вероятностей в следующем периоде представлен в таблице:

| | | |
|--------------|--------------|--------------|
| | $r_b = 10\%$ | $r_b = 20\%$ |
| $r_a = 10\%$ | $p_1 = 20\%$ | $p_3 = 30\%$ |
| $r_a = 40\%$ | $p_2 = 40\%$ | $p_4 = 10\%$ |

Определить ожидаемую доходность **портфеля**, если уд. веса акций А и В в портфеле составляют соответственно 30% и 70%.

Случайная величина

$$E \text{ портфеля} = \sum \Theta_i * M_i$$

$$M [X] = \sum x_i * p_i$$

$$M_1 = 10 * 0,5 + 40 * 0,5 = 25$$

$$M_2 = 10 * 0,6 + 20 * 0,4 = 14$$

$$E \text{ портфеля} = 0,3 * 25 + 0,7 * 14 = 17,3\%$$

A. 17,3%

B. 20%

C. 25%