Применение производной к исследованию функций

Как родилась производная

Ферма далеко продвинулся в применении дифференциальных методов, он использовал их не только для проведения касательных, но, к примеру, для нахождения максимумов, вычисления площадей. Однако ни Ферма, ни Декарт не сумели свести полученные научные выводы и результаты в единую систему.

В 1638 году Ферма поделился этим открытием со своим земляком Рене Декартом, который также занимался этой проблемой и нашел свой метод построения касательных к алгебраическим кривым.

Как родилась производная

Тем не менее, выдвинутые идеи не пропали

Вильгельм Лейбниц (1646-1716)

Исаак Ньютон (1642-1727)

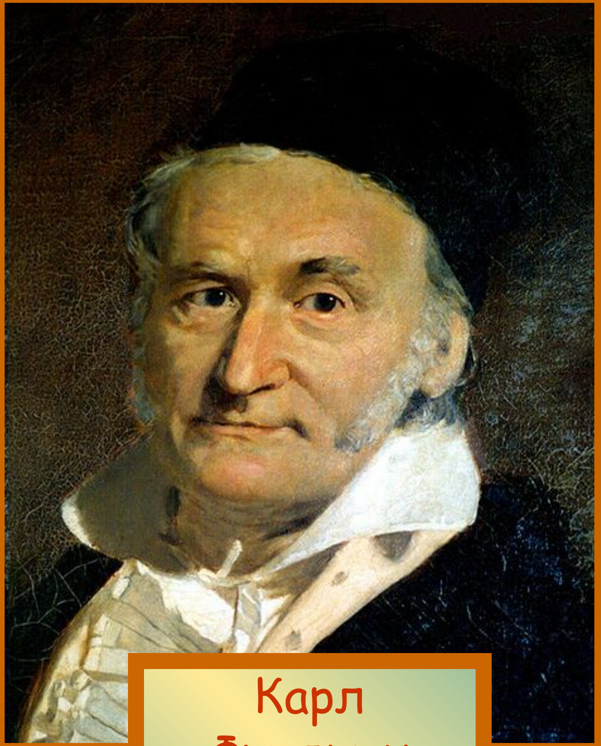
Многие из них легли в основу нового метода математического анализа – дифференциального исчисления, основоположниками которого считаются Вильям Лейбниц и Исаак Ньютон.

Как родилась производная

Очень многие великие ученые внесли свой вклад в зарождение и развитие дифференциального исчисления

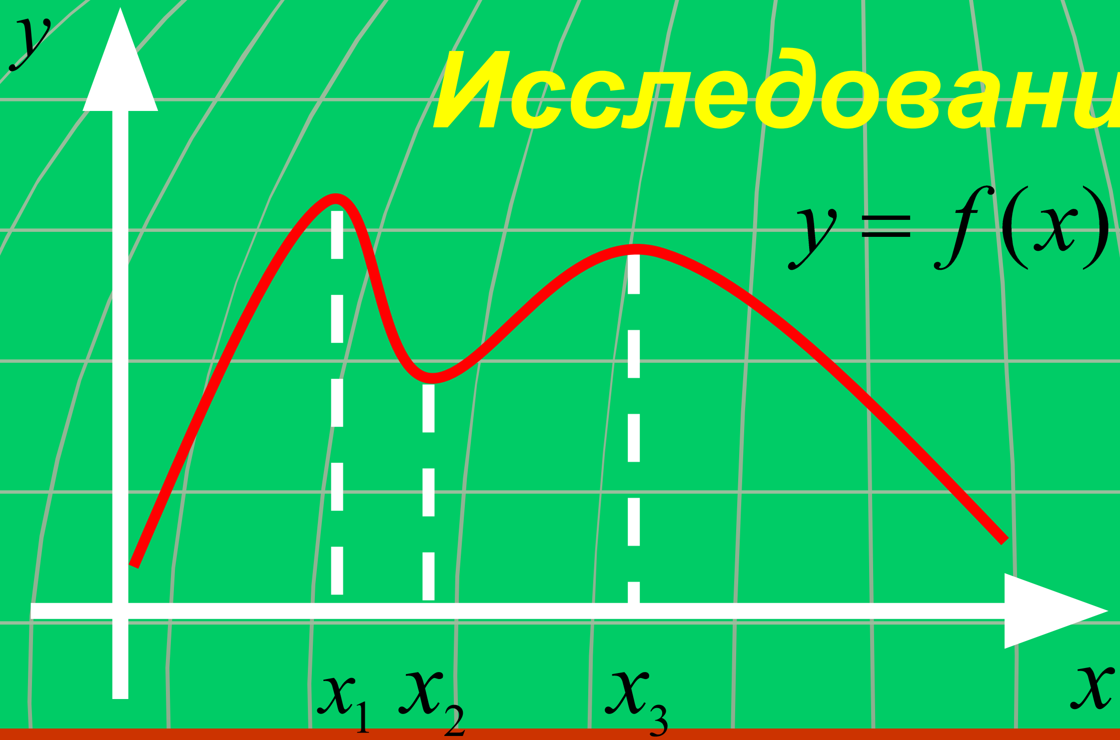
Жозеф
Луи Лагранж
(1736-1813)

Леонард
Эйлер
(1707-1783)



Карл
Фридрих
Гаусс
(1777-1855)

Исследование функции:



- D(f)
- E(f)
- Пересечение с координатными осями, т.е. с ОХ – (х;0) с ОУ – (0; у)
- четность или нечетность,т.е. f(-x)= f(x), f(-x)= -f(x)
- нули функции т.е. f(x)=0
- промежутки возрастания и убывания (монотонность)
- промежутки знакопостоянства т.е. f(x)>0, f(x)<0
- построение эскиза графика

Повторение

- Четность, нечетность функций
- Периодичность
- Нули функции
- Промежутки знакопостоянства
- Монотонность функции

далее

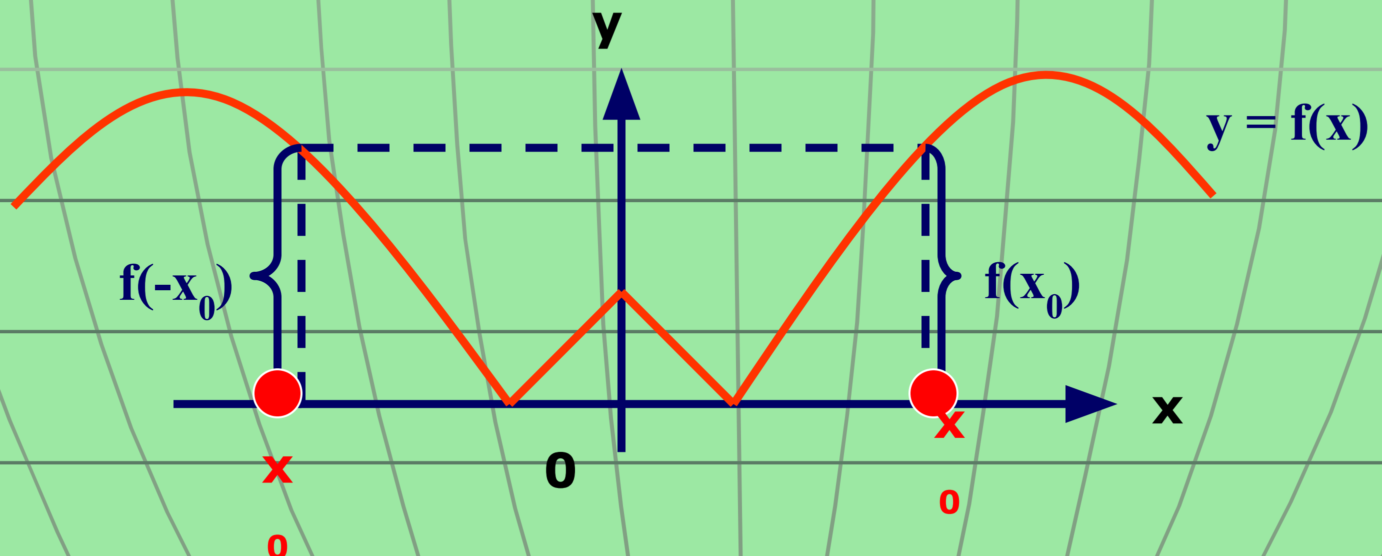
Четность функций

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для **любого** значения x, взятого из области определения функции, значение $(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство:

четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции **симметричен** относительно **оси ординат**

$$f(-x) = f(x)$$

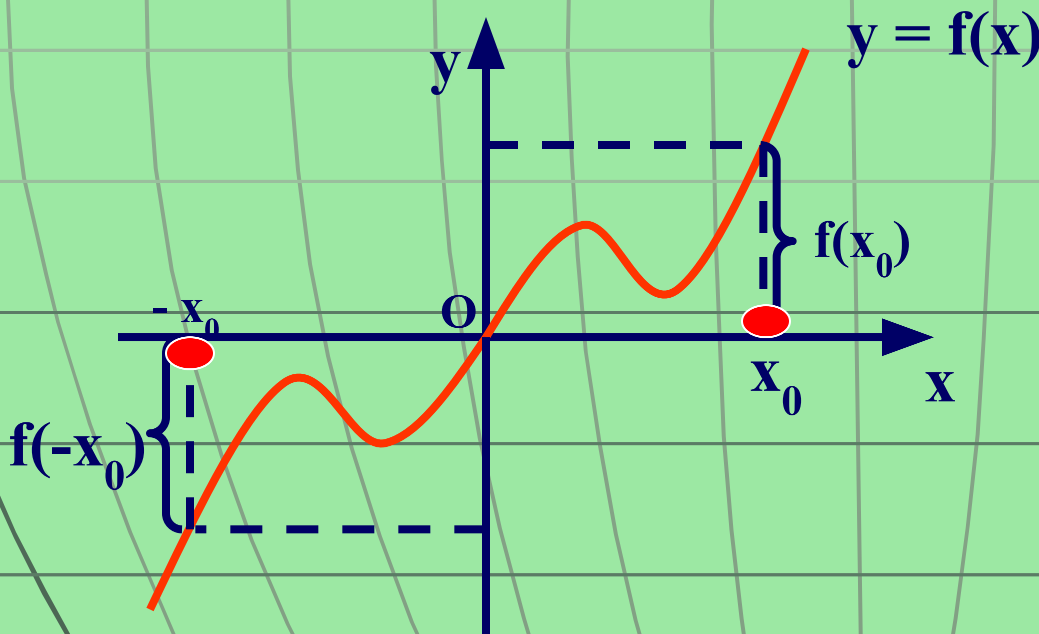


Нечетность функций

Определение: Функция y = f(x) называется **нечетной**, если для **любого** значения **x**, взятого из области определения функции, значение **(–x)** также принадлежит области определения и выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x)$$

График **нечетной** функции симметричен относительно **начала координат**

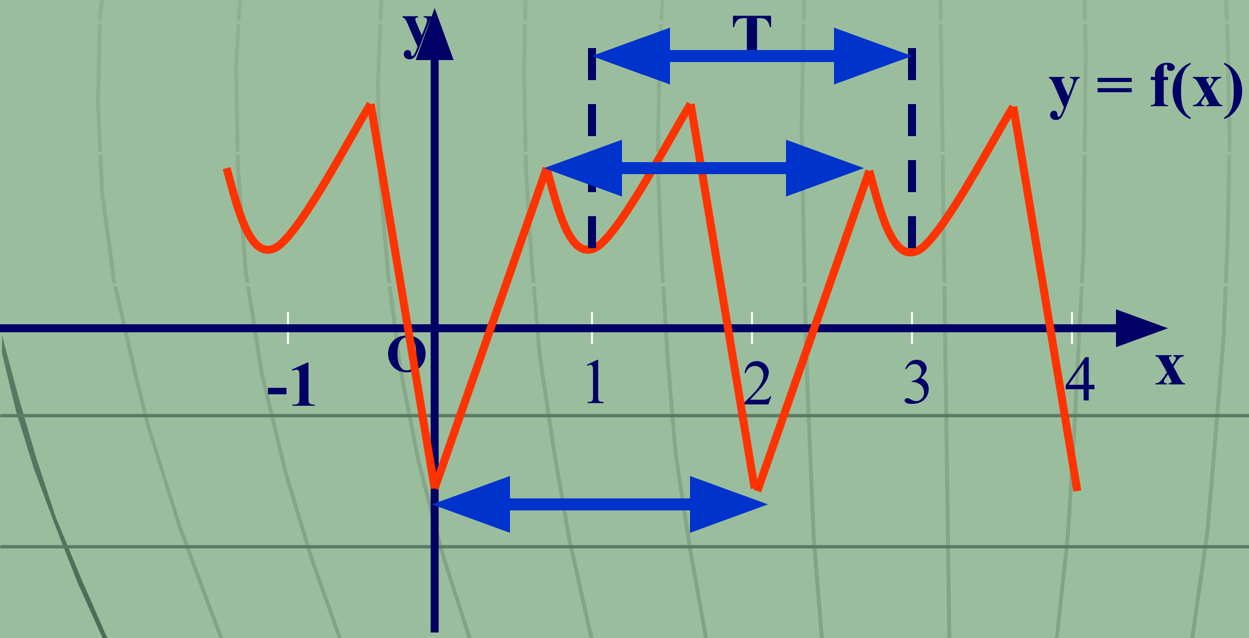


повторение

Периодичность функций

Определение: Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$ - период, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $(x + T)$ и $(x – T)$ также принадлежат области определения и выполняется равенство

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$$

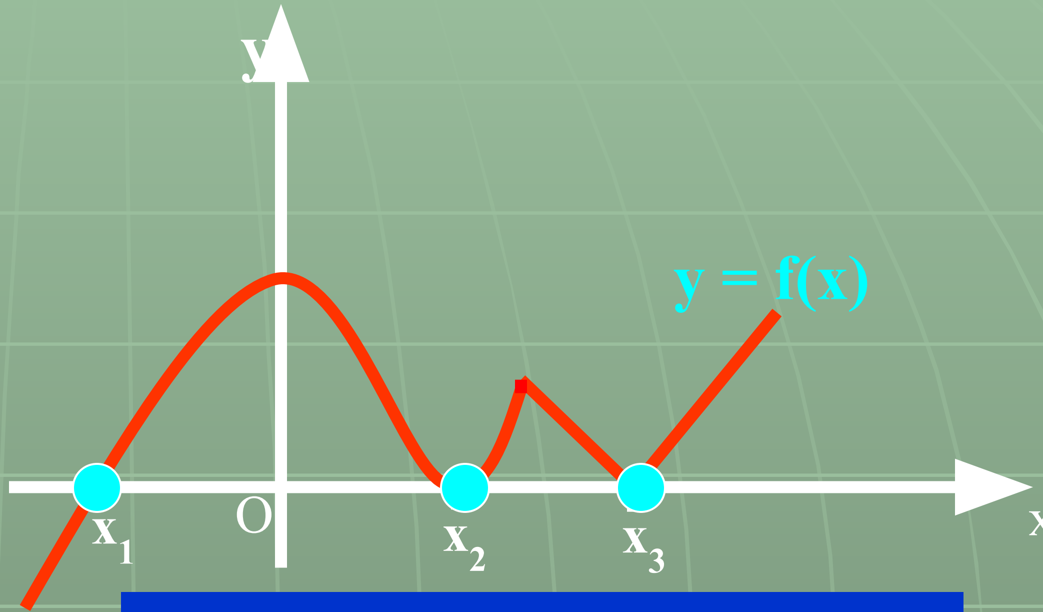


повторение

Нули функции

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение f(x) = 0 Действительные корни этого уравнения являются нулями функции y = f(x)



x_1, x_2, x_3 – нули функции y = f(x).

Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции:

1) либо пересекает ось абсцисс,

2) либо касается ее,

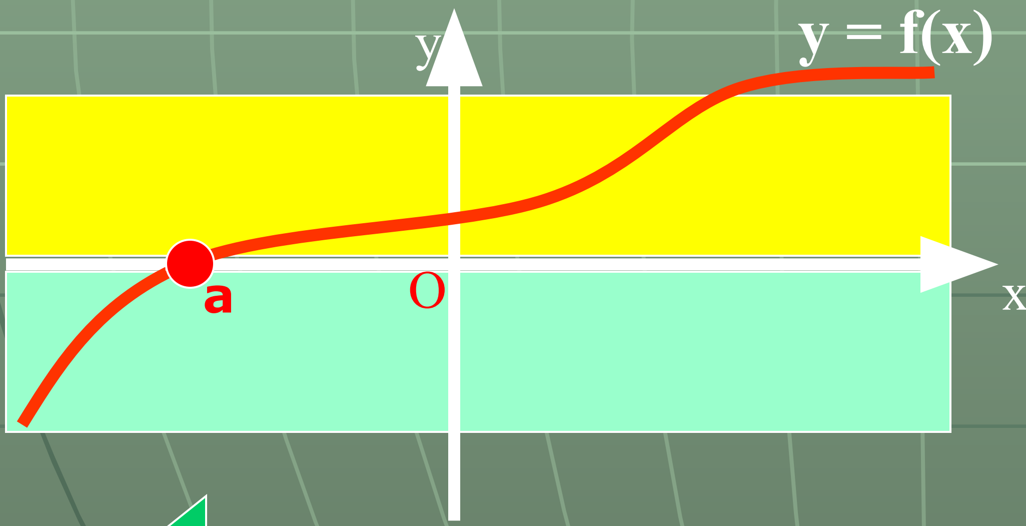
3) либо имеет общую точку с этой осью, ординаты данных точек нулевые, т.е. $(x_1;0)$, $(x_2;0)$, $(x_3;0)$

повторение

Промежутки знакопостоянства

Определение: *Числовые промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками* ***знакопостоянства****.*

Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если f(x) > 0, и ниже оси абсцисс, если f(x) < 0



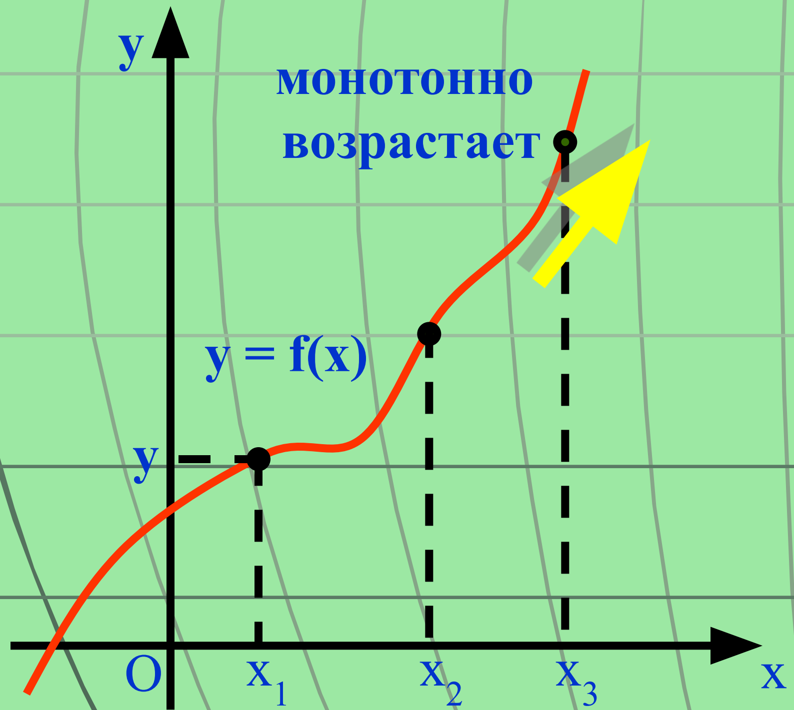
$f(x) > 0$ при $x > a$

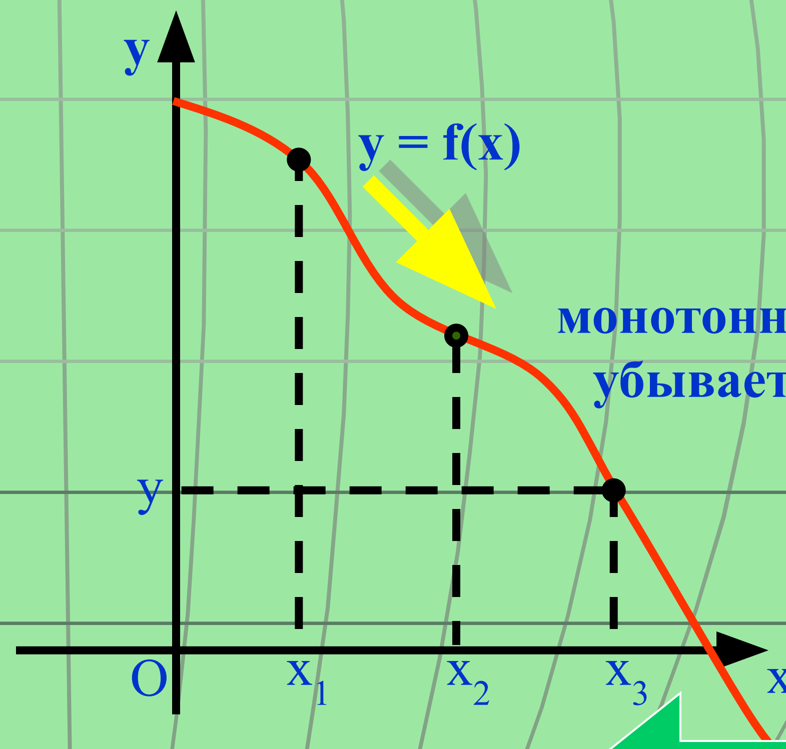
$f(x) < 0$ при $x < a$

повторение

Монотонность функции

Определение: *Функцию называют монотонно* ***возрастающей****, если с* ***увеличением аргумента*** *значение функции* ***увеличивается****, и монотонно* ***убывающей****, если с увеличением аргумента значение функции* ***уменьшается***.

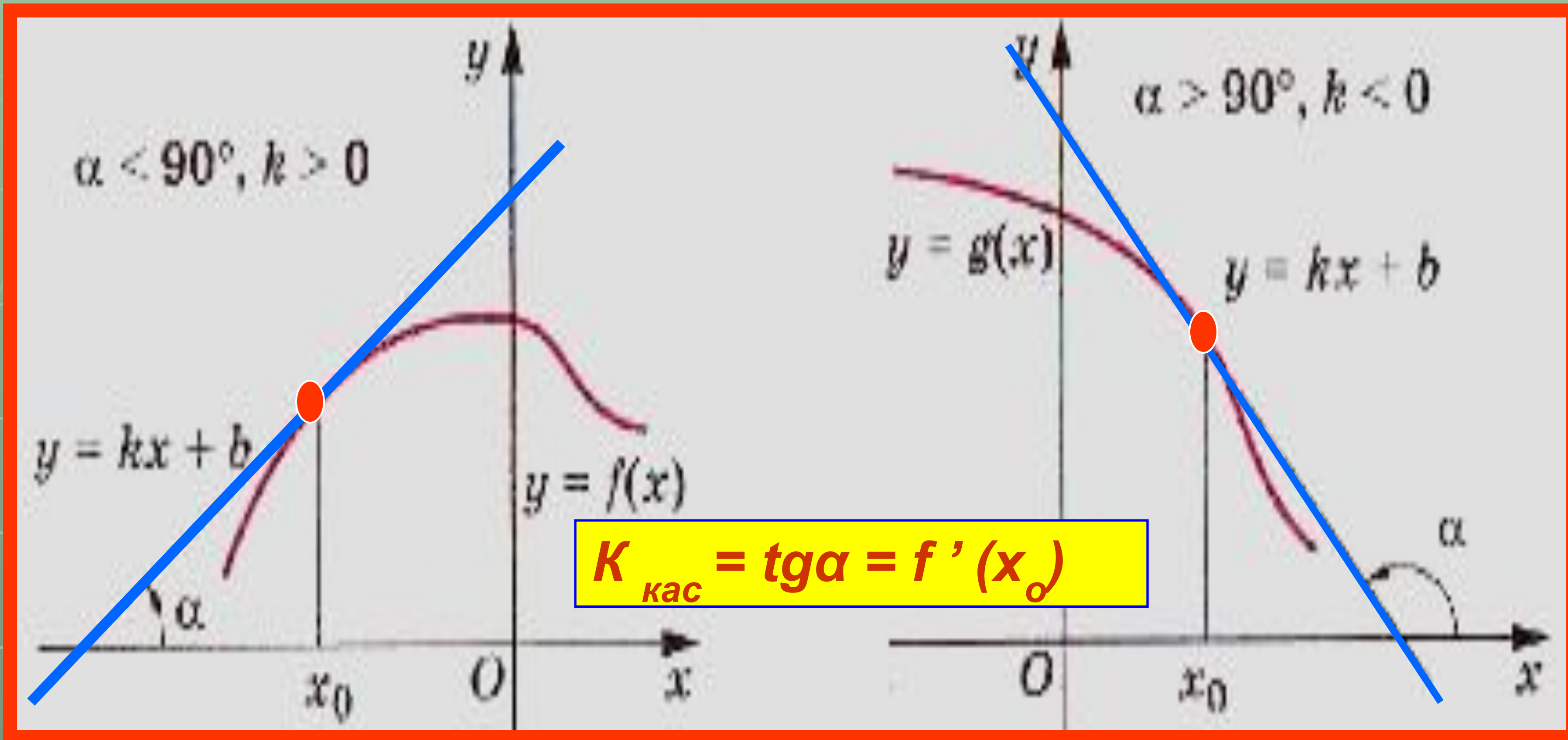




повторение

Связь производной с монотонностью функции

- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка положительна, то функция на этом промежутке возрастает, т. е. $f'(x)>0$, $f(x)$□
- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка отрицательна, то функция на этом промежутке убывает, т. е. $f'(x)<0$, $f(x)$□
- Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка равна 0, то функция на этом промежутке постоянна



$K_{кас} = tg\alpha = f'(x_o)$

f′(x)>0

f′(x)<0

Критические точки функции -

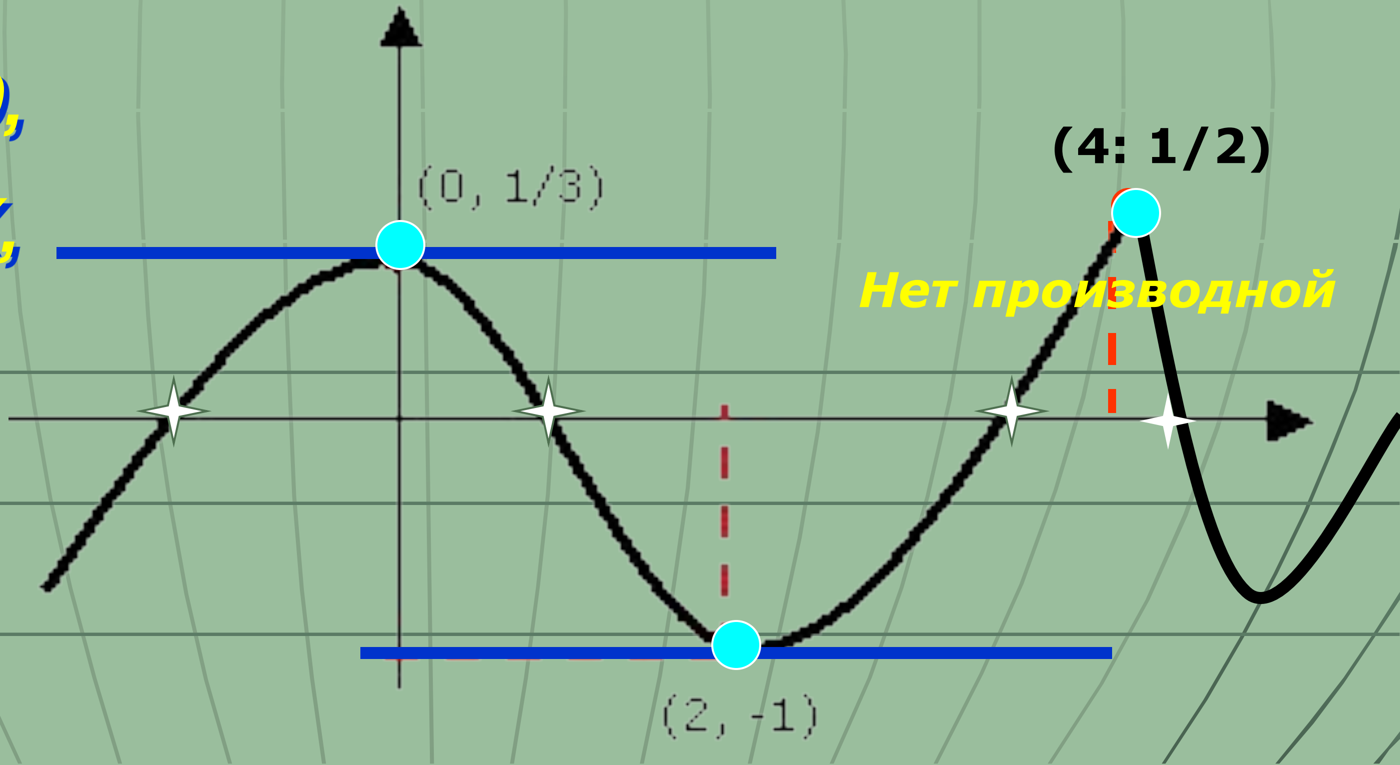
Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует

$f'(x_i)=k_{кас}=0$,

касат II OX,

перегиб графика,

смена поведения



Достаточный признак возрастания или убывания функции

критически
точки

Пример: Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-3x^2+2$

Решение:

1) $f'(x)=(x^3-3x^2+2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$

2)Находим критичекие точки:
$f'(x)=0$, т.е. $3x(x-2)=0$ при $x=0$ $x=2$

3) Исследуем знак производной методом интервалов

	$(-\infty; 0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

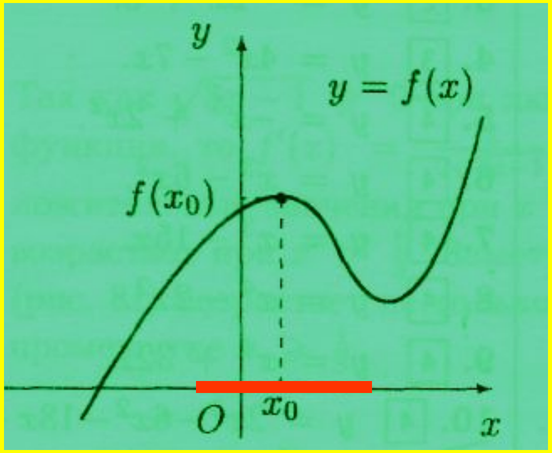
Ответ: f (x)□ на (-∞; 0) ∪ (2;∞)

f (x)□ на (0;2)

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Окрестностью точки x_0 - называется промежуток, для которого точка x_0 является внутренней.

Точка x_0 называется точкой максимума (x_{max}) функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

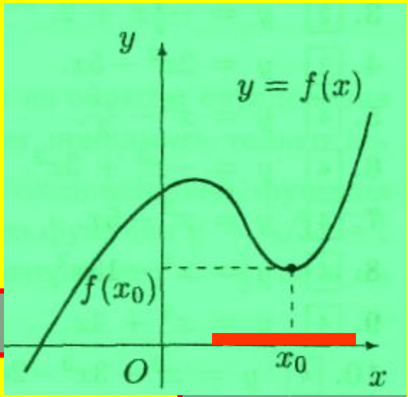


$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_{\max})$$

Точка x_1 называется точкой минимума (x_{min}) функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

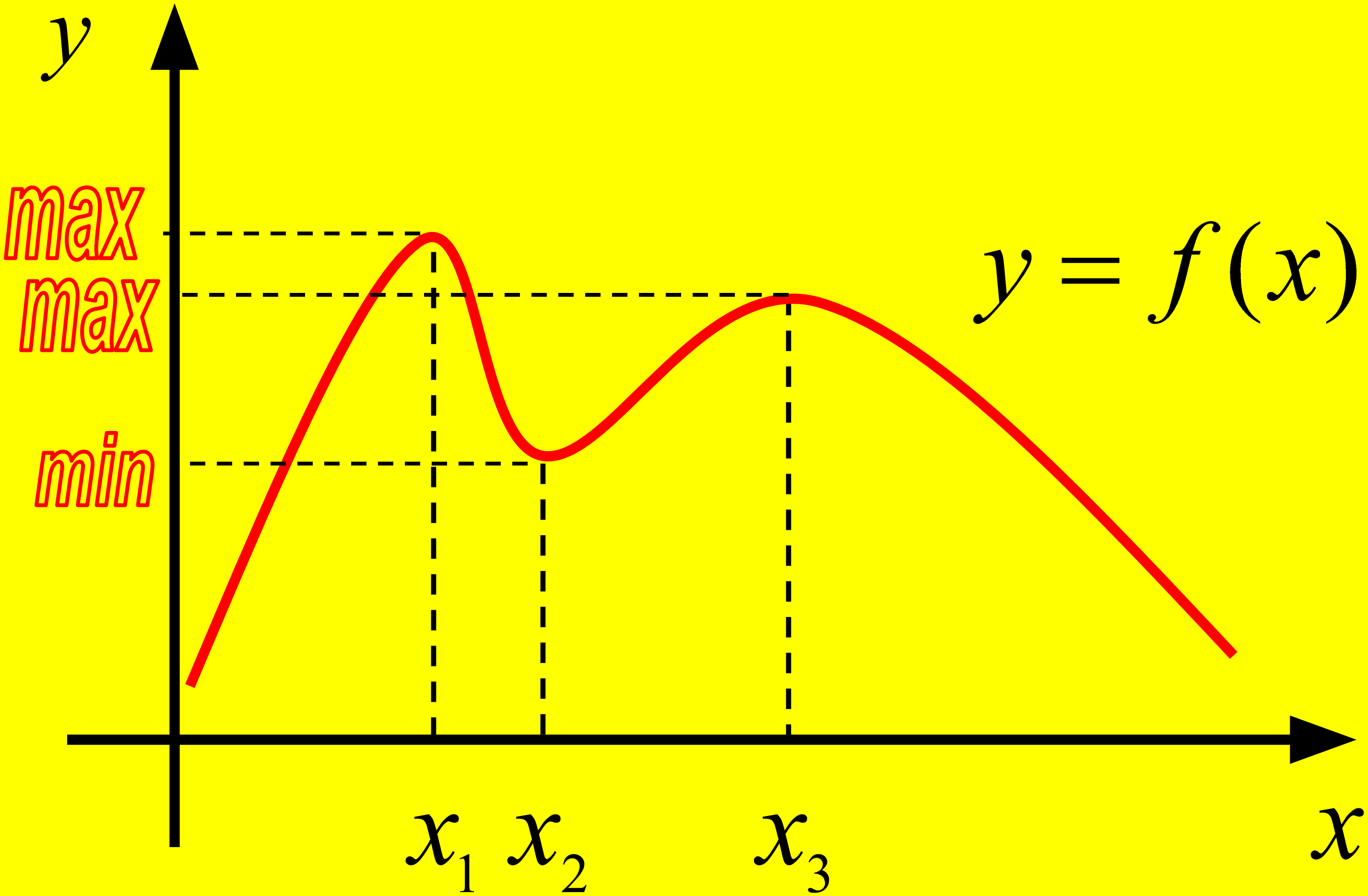
$$\boxed{f(x) \geq f(x_1)} \quad f(x) \geq f(x_{\min})$$



Точки минимума и максимума называются точками экстремума (крайние, конечные)

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно максимумом и минимумом функции (y_{min} и y_{max})

Максимум и минимум функции называется экстремумом функции



Точки экстремумов x_i

Обратите внимание!!!

- *Что происходит с производной при переходе через экстремальную точку?*
- *Что происходит с самой функцией при переходе через экстремальную точку?*

удачи в изучении))