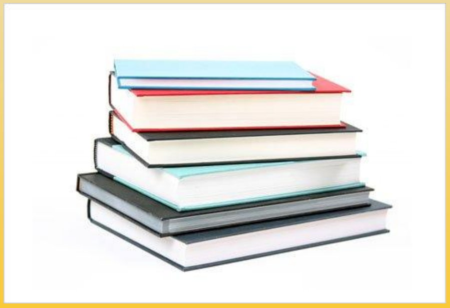
Производная и ее применения



Понятие производной

- <u>Определение.</u> Производной функции *y=f(x)*, заданной на некотором интервале *(a;b)*, в точке *x* этого интервала, называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.
- Производную функции *f(x)* обозначают *f '(x)* и говорят: «эф штрих от икс». Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной (для функции $Y=F(X)$).

- Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
- Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x+\Delta x$, найти $f(x+\Delta x)$.
- Найти приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.
- Составим отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Вычислить $\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
- Этот предел и есть $f\,'(x)$.

Пример. Найти производную функции $y=2x+3$ в точке $x=3$

$$y(3)=2\cdot 3+3=9$$

$$f(x+\Delta x)=2\cdot(3+\Delta x)+3=2\cdot\Delta x+9$$

$$\Delta y=y(3+\Delta x)-y(3)=2\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

$$\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta f}{\Delta x}=2$$

$$y\,'(3)=2$$

Физический смысл производной

- Если при прямолинейном движении путь s, пройденной точкой, есть функция от времени t, т.е. $s=f(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t)=f'(t)$, этот факт выражает механический смысл производной.

пример

- Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки B этой прямой изменяется по закону $S(t)=2t^3-12t^2+3$ (t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 36 м/ c^2?
- *Решение.* Из механического смысла производной имеем скорость – это производная пути по времени. Скорость изменяется по закону $v(t)=S'(t)=6t^2-24t$. Так как ускорение – это производная скорости по времени, то ускорение изменяется по закону $a(t)=v'(t)=12t-24$, с другой стороны ускорение равно 36 м/ c^2. Решим уравнение $12t-24=36$, t=5 с.
- Ответ: через 5 секунд.

Геометрический смысл производной

- Если в точке x_0 к графику функции $y=f(x)$ проведена касательная, то число $f'(x_0)$ есть тангенс угла альфа между этой касательной и положительным направлением оси OX, т.е. $f'(x_0)=tg\alpha$. Этот угол называю углом наклона касательной. Этот факт выражает геометрический смысл производной.

Пример

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

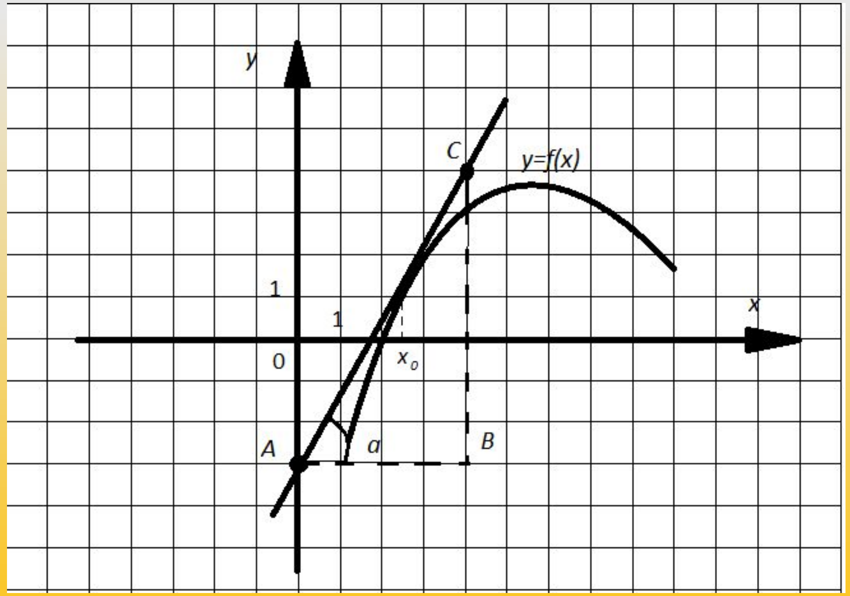


Рис.1

Решение.

- Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси OX. Из треугольника ABC

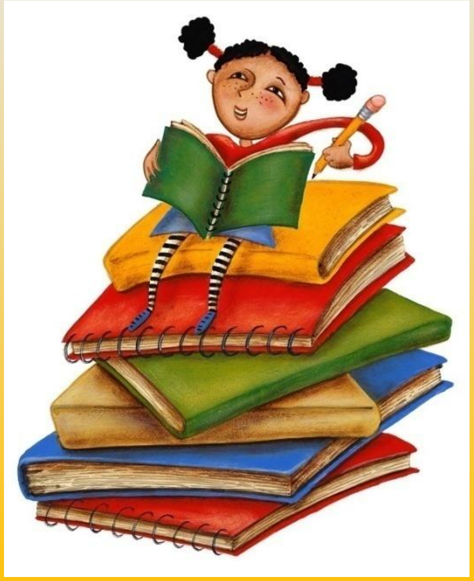
(рис.1).

$$tga = tg(\angle CAB) = \frac{CB}{AB} = \frac{7}{4} = 1,75$$

- Ответ: 1,75.

Вычисление производных

- Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций.



Формулы дифференцирования

$C' = 0$

$x' = 1$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

Формулы дифференцирования

При условии $u = \varphi(x)$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', |u| < 1$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', |u| < 1$$

$$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

Правила дифференцирования

- Теорема 1.
- Если функции *y=f(x)* и *y=g(x)* имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

Теорема 2

- Если функция y=f(x) имеет производную в точке x, то и функция $y=kf(x)$ имеет производную в точке x, причем

$$\left(kf\left(x\right)\right)' = kf'\left(x\right)$$

Теорема 3

- . Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Теорема 4

- Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$,

то функция $$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

имеет производную в точке x, причем

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Теорема 5

- Если функция f имеет производную в точке x_0

а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$,
то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет
производную в точке x_0, причем

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

.

Примеры. Найти производные функций

Решения

1. $f(x)=x^3+x^4;$

2. $f(x)=3x^3-2x^2;$

3. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\left(2x^3-x\right);$

4. $f(x)=\dfrac{2x^2+4}{5x+8};$

5. $f(x)=(8x+4)^3;$

1. $f'(x)=3x^{3-1}+4x^{4-1}=3x^2+4x^3.$

2. $f'(x)=3\cdot 3x^{3-1}-2\cdot 2x^{2-1}=9x^2-4x.$

3. $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\left(2x^3-x\right)+\sqrt{x}\cdot\left(2x^3-x\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(2x^3-x\right)+\sqrt{x}\cdot\left(2\cdot 3x^{3-1}-1\right)=$

$$=\frac{2x^3-x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\left(6x^2-1\right).$$

4. $f'(x)=\dfrac{\left(2x^2+4\right)'\cdot(5x+8)-\left(2x^2+4\right)\cdot(5x+8)'}{(5x+8)^2}=\dfrac{4x\cdot(5x+8)-\left(2x^2+4\right)\cdot 5}{(5x+8)^2}=$

$$=\frac{20x^2+32x-10x^2-20}{(5x+8)^2}=\frac{10x^2+32x-20}{(5x+8)^2}.$$

5. $f'(x)=3\cdot(8x+4)^2\cdot(8x+4)'=3\cdot(8x+4)^2\cdot 8=24\cdot(8x+4)^2.$

Применение производной при исследовании функции

Пример 1.

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке (-5;9). На рисунке 2 изображен график производной этой функции. Определите число касательных к графику функции $y=f(x)$, которые наклонены под углом 45^0 к положительному направлению оси абсцисс.

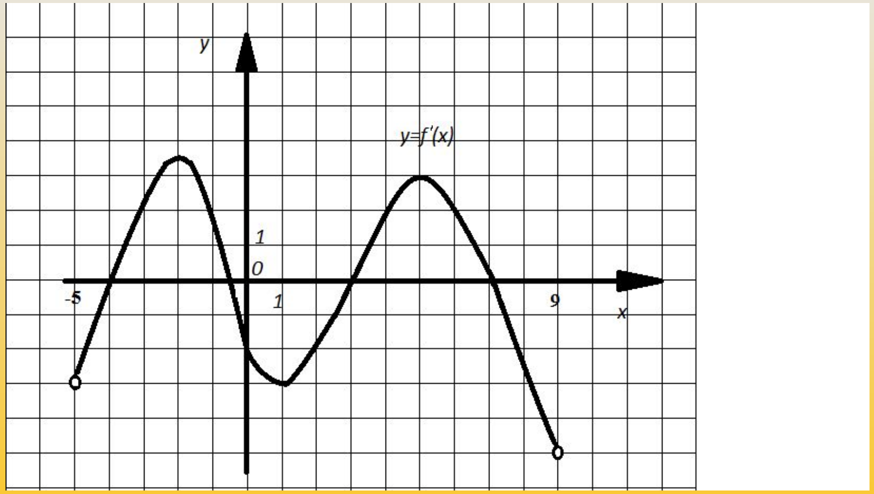


Рис.2

Решение.

Пусть α –угол касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в точке x_0, и положительным направлением оси абсцисс, тогда $tg\alpha = f'(x_0)$.

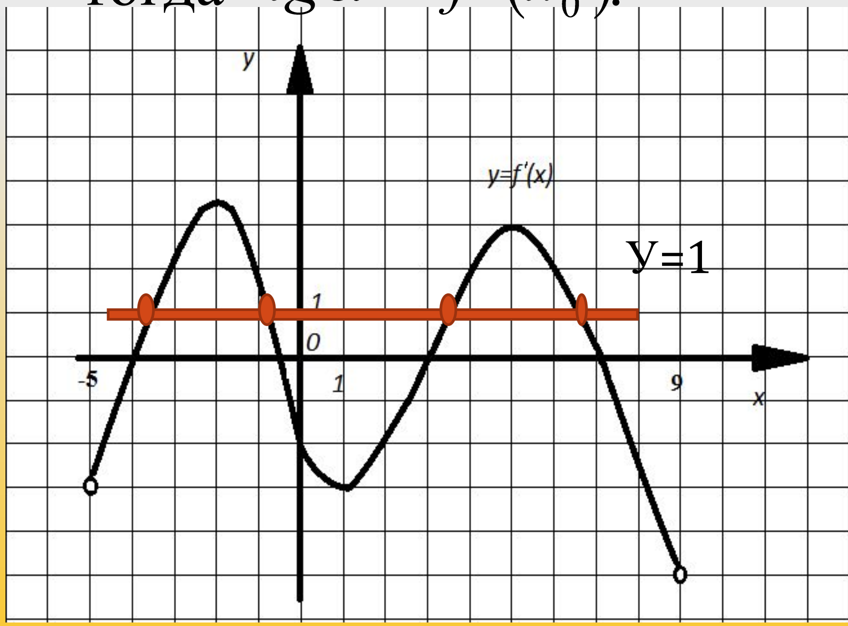


Рис.3

Так как $tg45^0 = 1$, то для решения задачи достаточно определить количество точек пересечения графика функции $y = f'(x)$ и прямой *y=1*. Таких точек четыре.

Пример 2

- На рисунке 2 Рис.2 изображен график производной функции $y=f(x)$ найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна прямой $y=1$ или совпадает с ней.
- *Решение.* Так как касательная параллельна прямой $y=1$, то ее угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику (рис.2) определяем, что производная обращается в ноль при $x=-4$; $x=-0,5$; $x=3$; $x=7$.

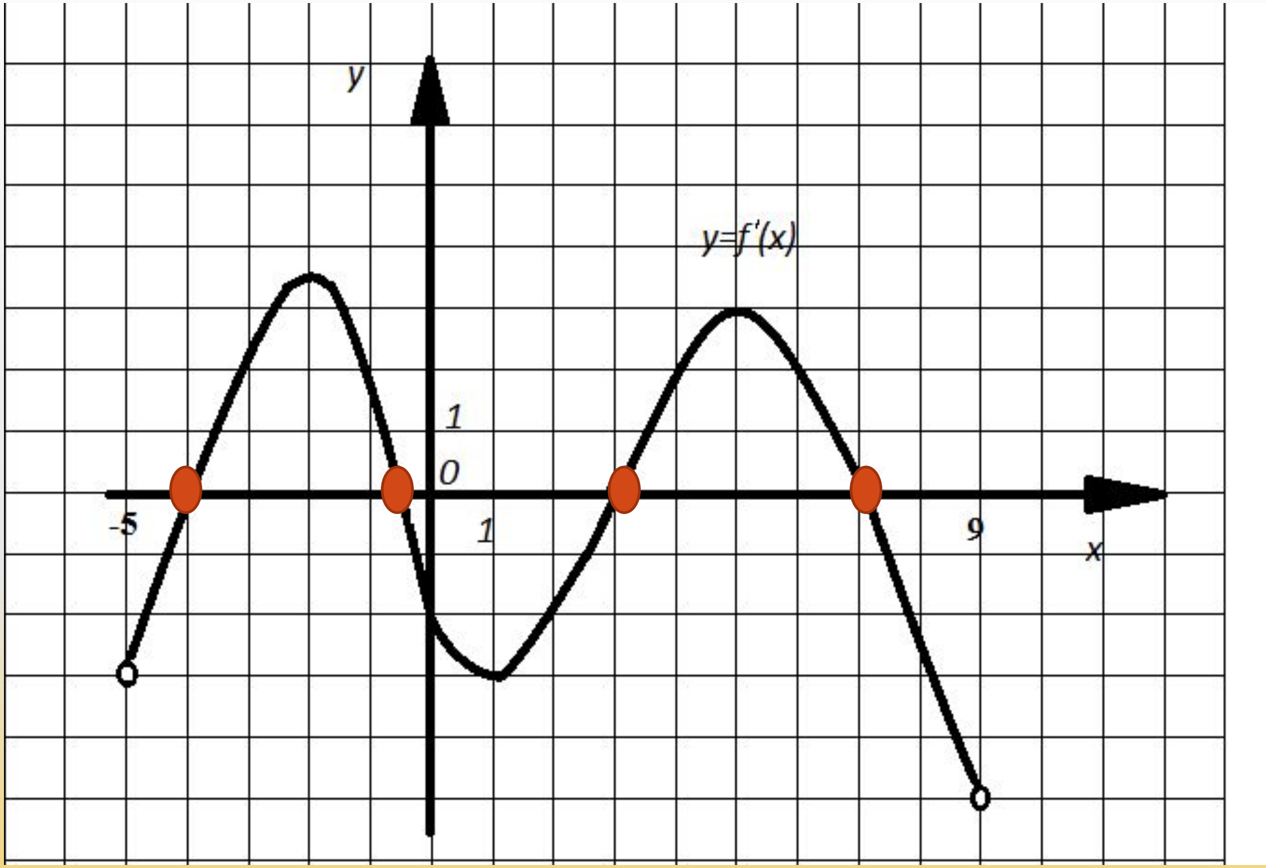


Рис.4

Ответ: -4; -0,5; 3; 7.

Пример 3.

- На рисунке 5 изображен график функции *y=f(x)*, определенной на промежутке . Определите количество целых точек, в которых производная функции *f(x)* положительна.

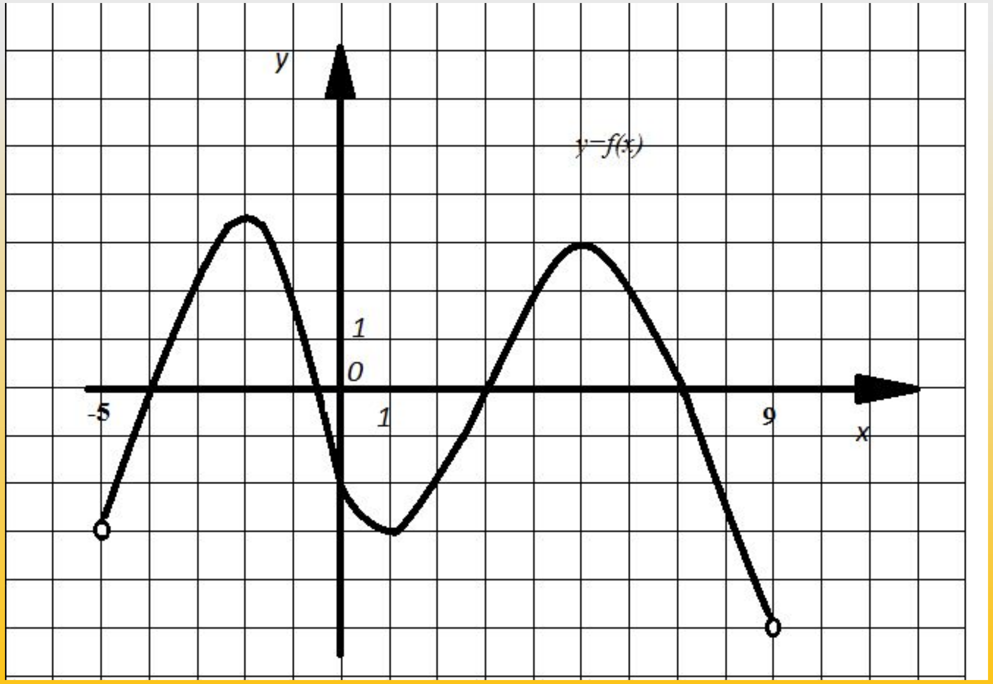


Рис.5

Решение.

- Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси *OX*) или не существует. По рисунку 2 определяем абсциссы таких точек: -4; -3; 2; 3; 4. Таких точек пять.

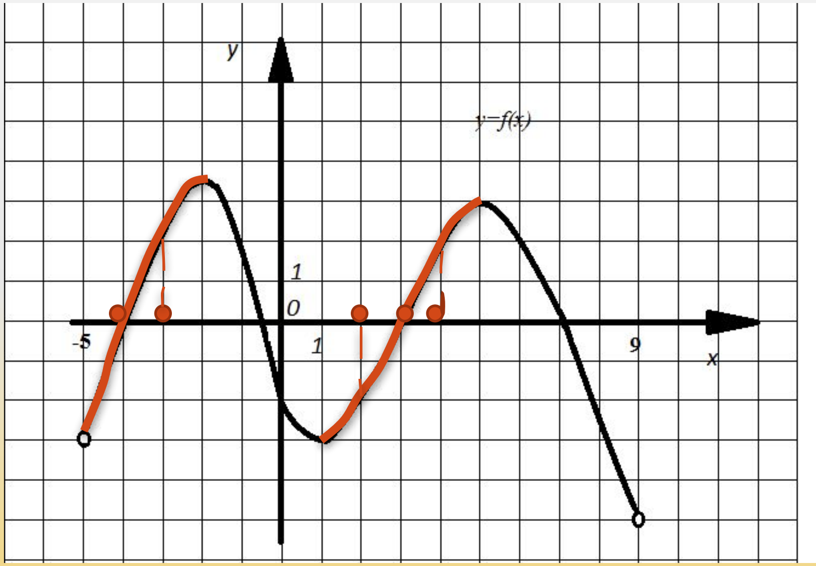


Рис.6

Пример 4.

- На рисунке 5 Рис.5 изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале *(-5;9)*. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение. Производная функции отрицательна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку убывания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси *OX*) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: -1; 0; 6; 7; 8. Таких точек пять.

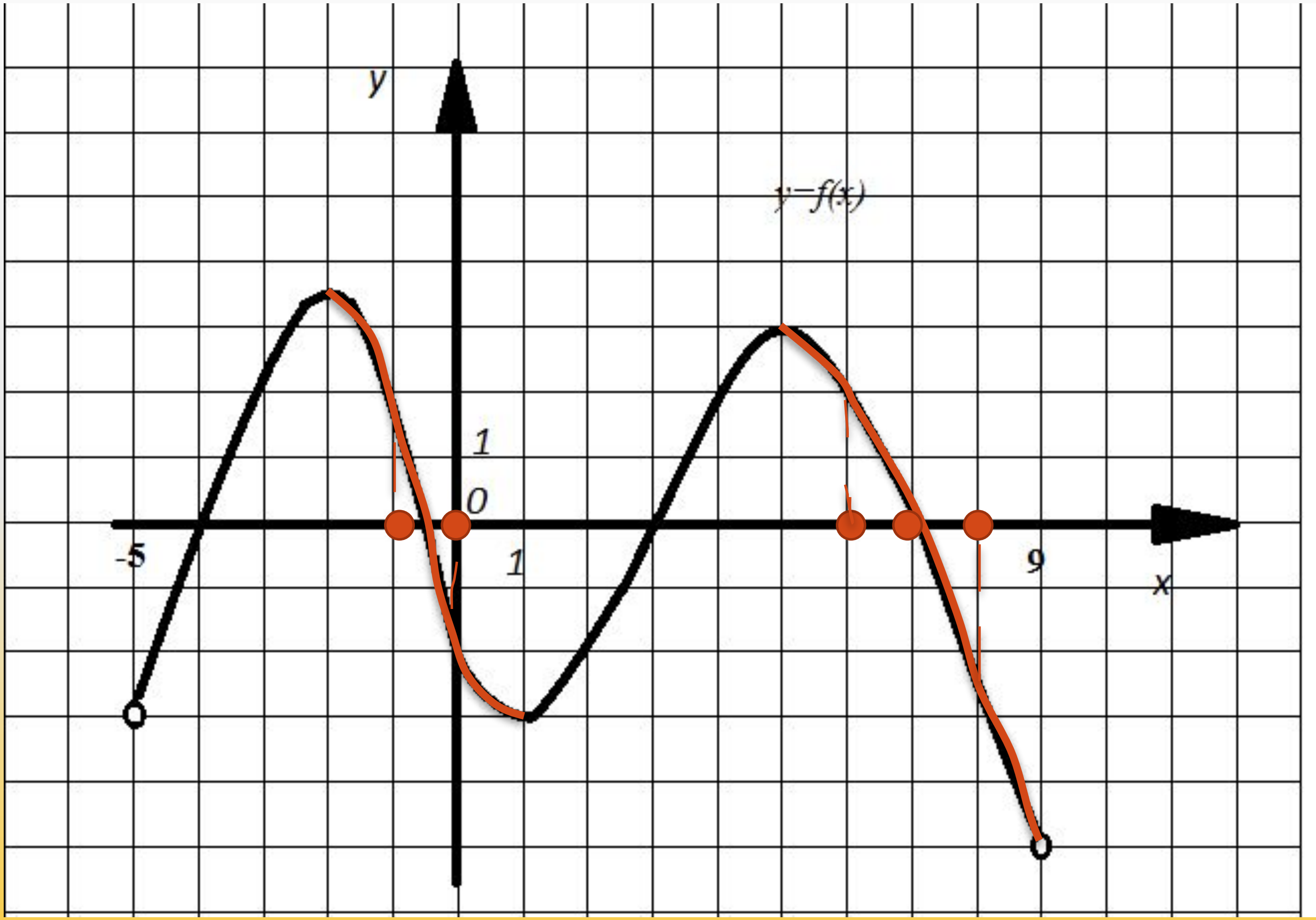


Рис.7

Ответ:5

Пример 5.

- На рисунке 2 Рис.2 изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;9)$. Найдите промежутки возрастания функции $y=f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.
- *Решение.* Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков имеет длину 4.

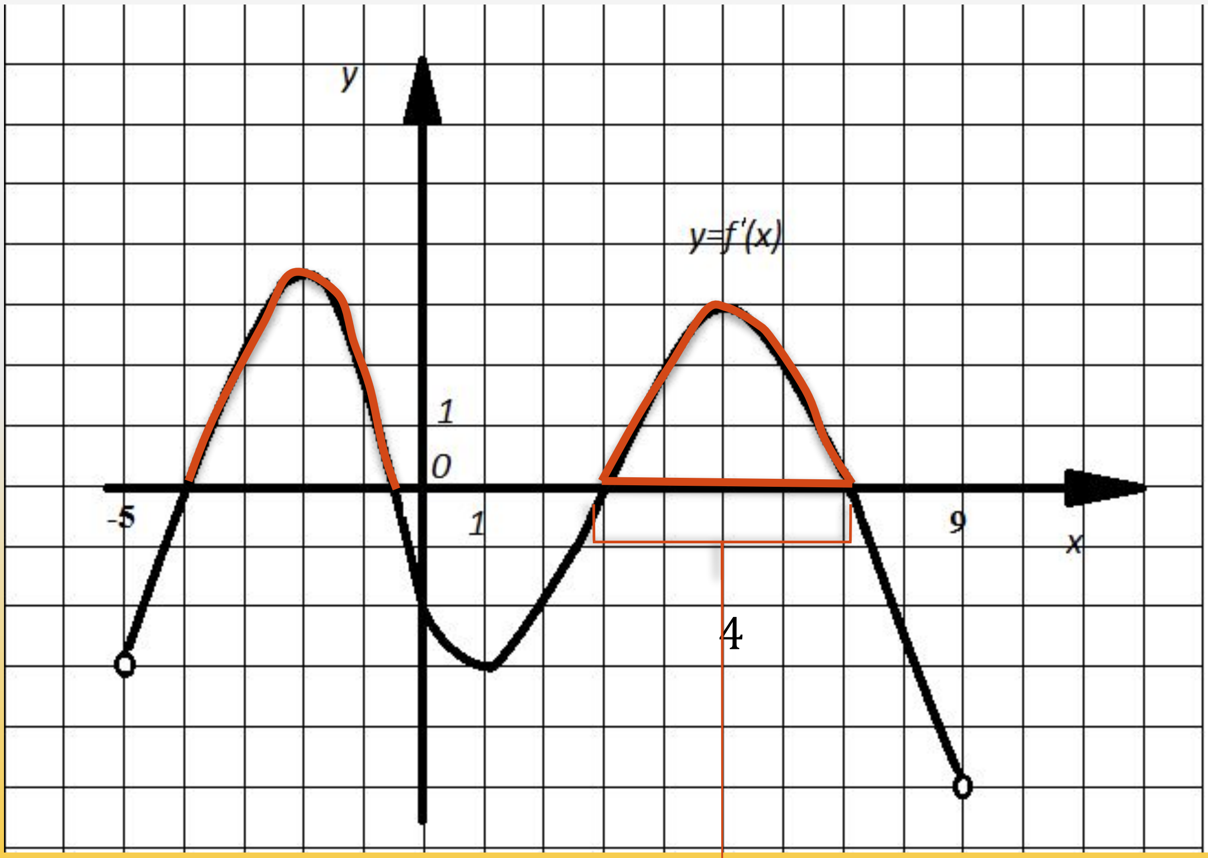


Рис.8

Пример 6.

- На рисунке 2 Рис.2 изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;9)$. Найдите промежутки убывания функции $y=f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.
- *Решение.* Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков имеет длину 3,5.

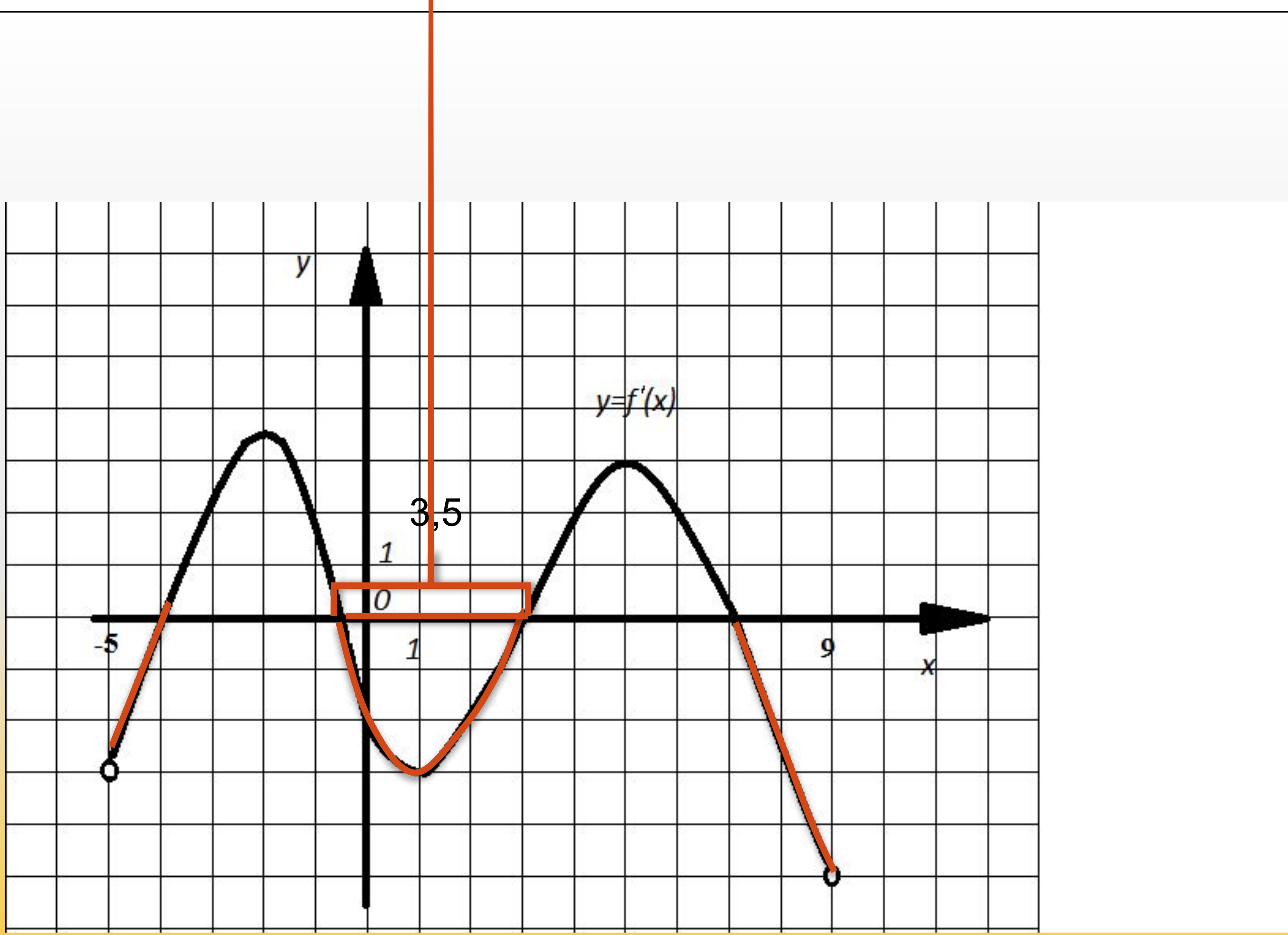


Рис.9

Пример 7.

- На рисунке Рис.2 изображен график производной функции *y=f(x)*, определенной на интервале *(-5;9)*. Найдите количество точек максимума функции *y=f(x)*.
- *Решение.* Точек максимума здесь две, так как график производной 4 раза меняет знак на интервале *(-5;9)*, из них два раза с плюса на минус. Это и есть точки максимума.

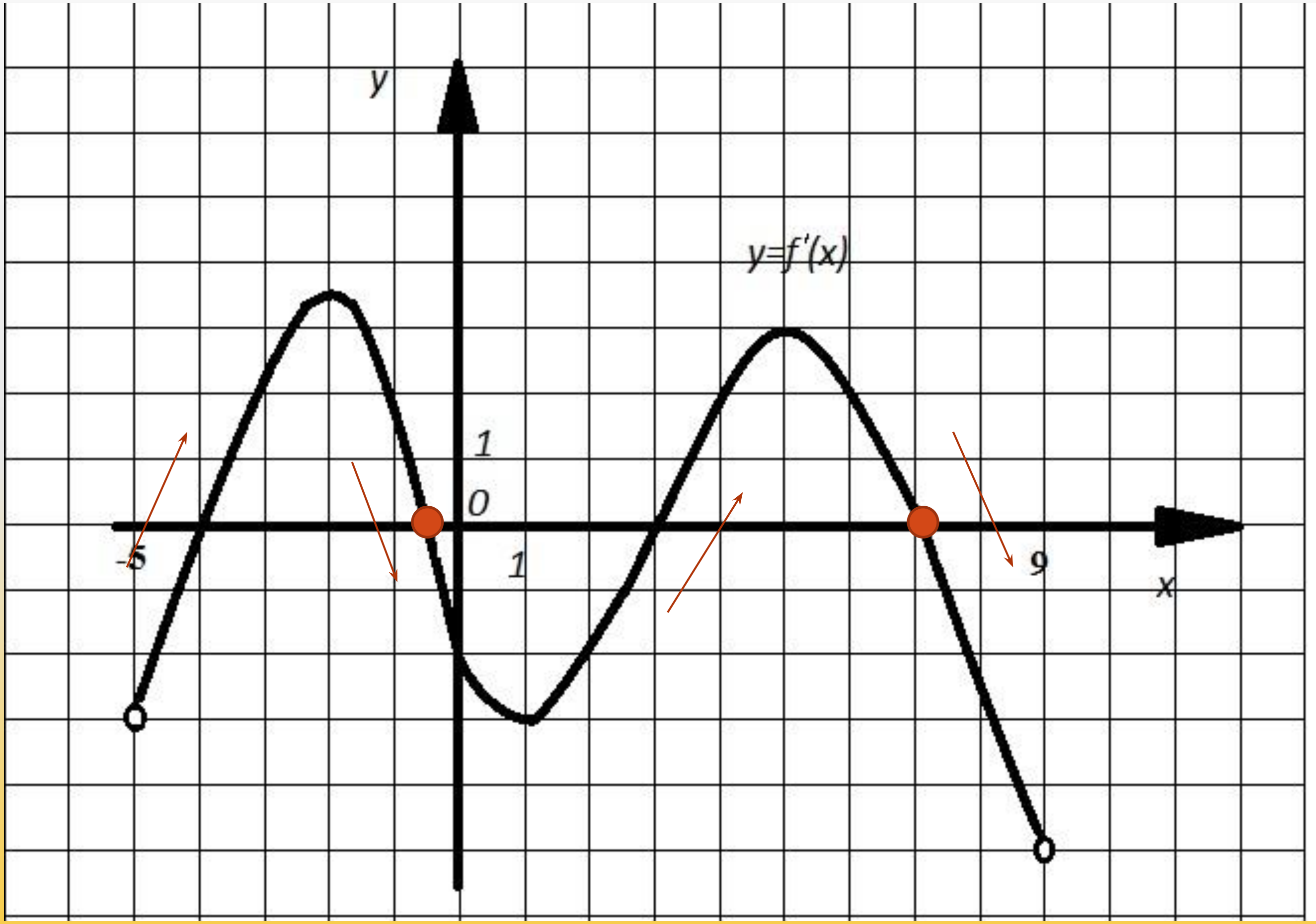


Рис.10

Пример 8.

- На рисунке Рис.2 изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;9)$. Найдите точки минимума функции $y=f(x)$.
- *Решение.* На графике производной видно, что на интервале $(-5;9)$производная 4 раза меняет знак в точках $x=-4$; $x=-0,5$; $x=3$; $x=7$. Причем в точках $x=-4$; $x=3$ он меняется с минуса на плюс. Значит, эти точки являются точками минимума, так как в точках $x=-4$ и $x=3$ характер монотонности функции $f(x)$ меняется с убывания на возрастание.

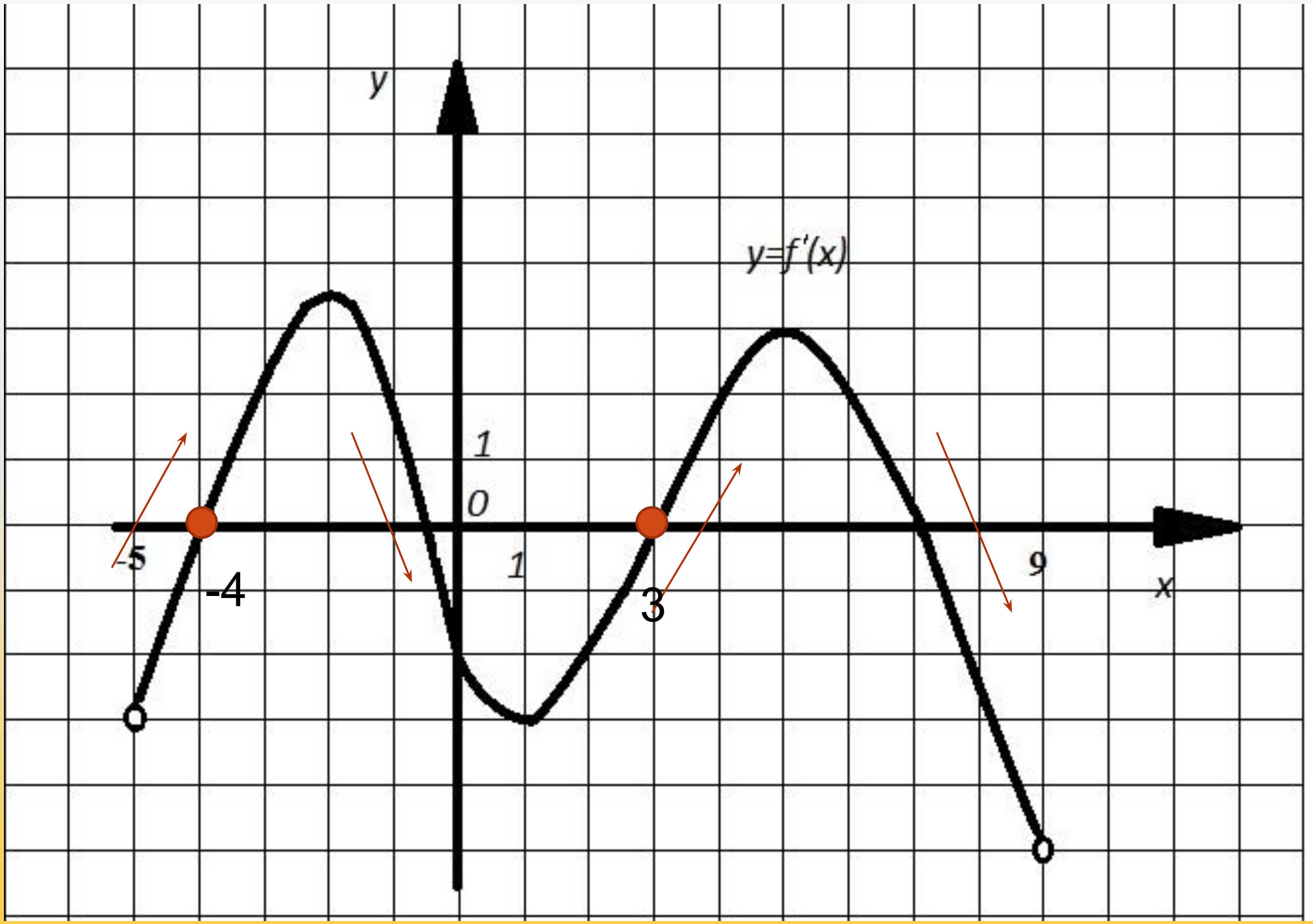


Рис.11

Пример 9.

- На рисунке Рис.2 изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;9)$. Найдите количество точек экстремума функции $y=f(x)$.
- *Решение.* На промежутке (-5;9) точек экстремума функции $y=f(x)$ ровно четыре: -4; -0,5; 3; 7.

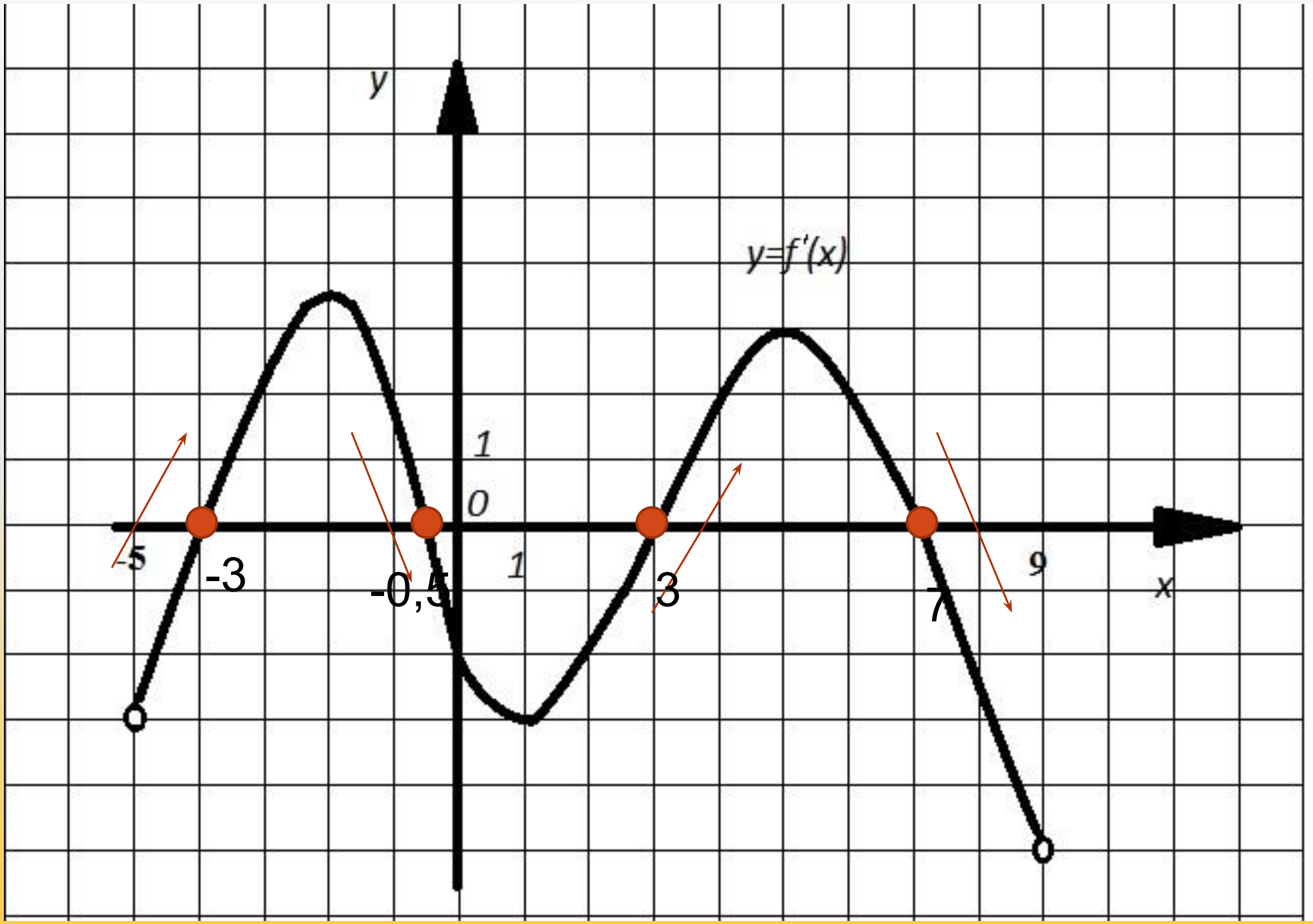


Рис.12

Пример 10

- На рисунке 13 изображен график производной функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;4)$. Укажите абсциссы точек, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ имеет наименьший и наибольший угловой коэффициент.

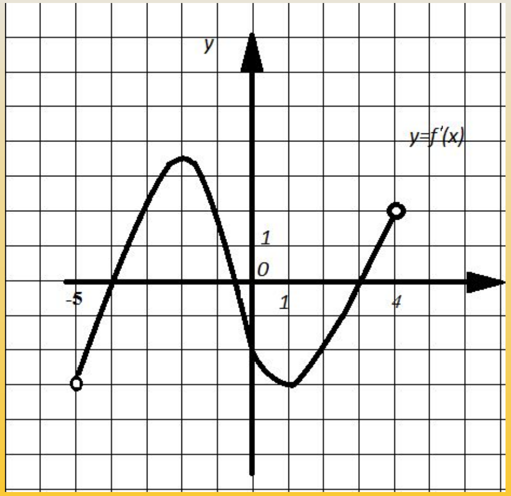


Рис.13

Решение.

- Угловой коэффициент касательной $k_{кас.} = f'(x_0)$. По графику определяем, что наименьшее значение функция $y = f'(x)$ достигает при $x_0 = 1$. А наибольшее значение функция $y = f'(x)$ достигает при $x_0 = -2$.

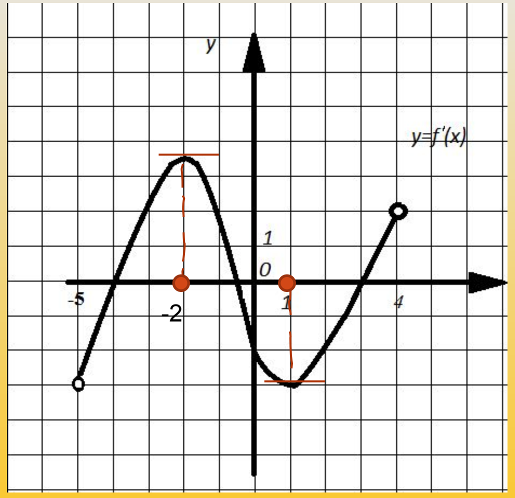


Рис.14

Пример 11.

- На рисунке Рис.2 изображен график производной функции *y=f(x)*, определенной на интервале *(-5;9)*. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *y=f(x)* параллельна прямой *y=-4x+3* или совпадает с ней.
- Касательная к графику функции *y=f(x)* в некоторой точке параллельна прямой *y=-4x+3*, если значение производной функции в этой точке равно угловому коэффициенту прямой, то есть $f'(x)=-4$. По графику (рис. 15) видно, что принимает значение -4 в одной точке.

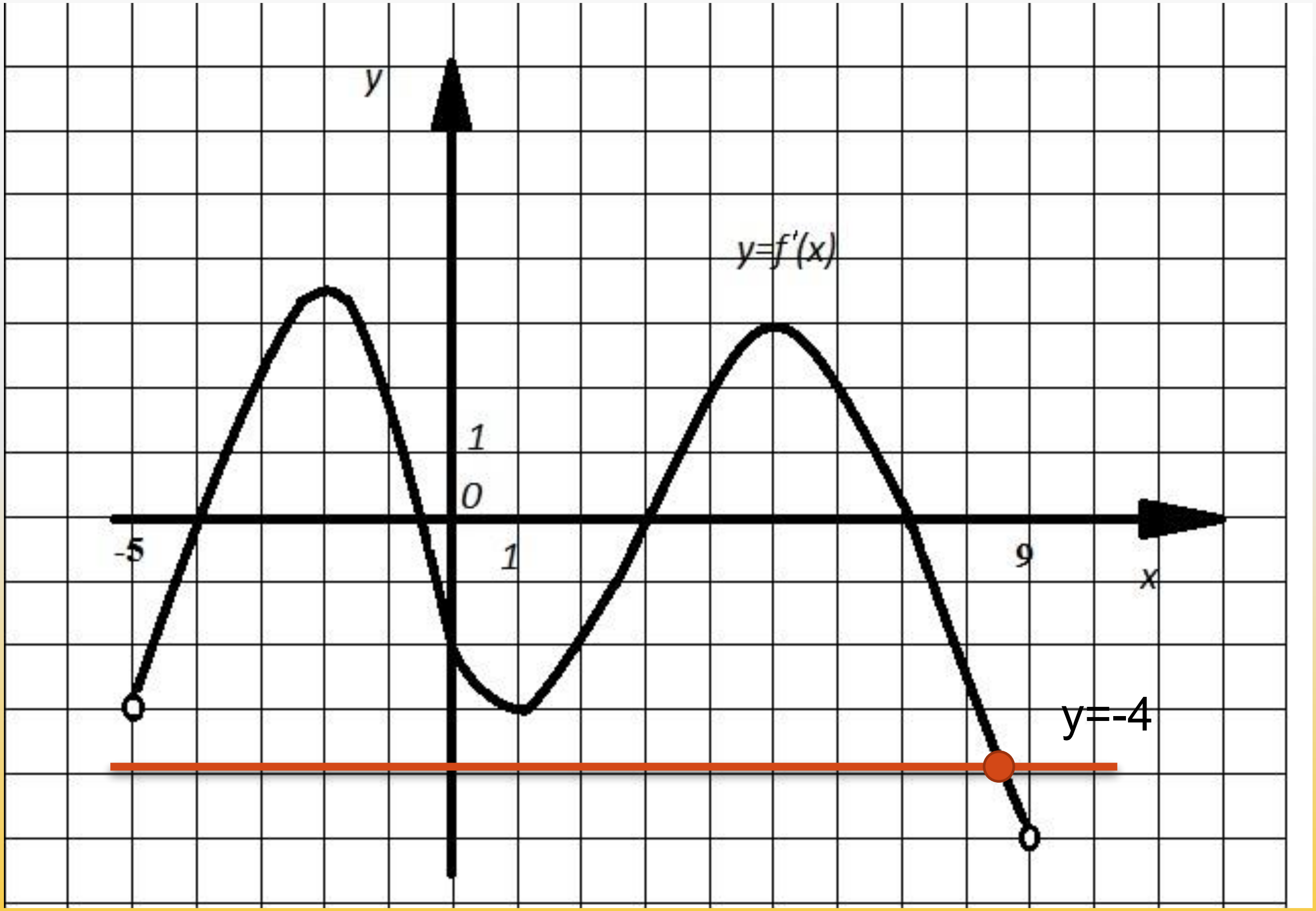


Рис.15

Пример 12.

- К графику функции *y=f(x)* проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = -4$. На рисунке 16 изображен график производной этой функции. Определите градусную меру угла наклона касательной.

Решение. Пусть α – угол наклона данной касательной к оси абсцисс. Так как $f'(-4) = -1$, то $tg\alpha = -1$.

Отсюда получаем $\alpha = 135^0$

.

Ответ: 135^0

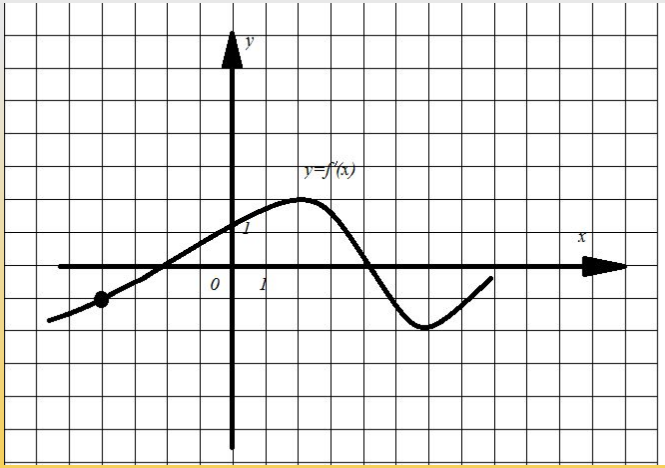


Рис. 16

Пример 14.

- На Рис.5 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на промежутке $(-5;9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=-7$.
- *Решение.* Так как касательные параллельны прямой $y=-7$, то они параллельны оси OX, следовательно, производные функции $f(x)$ в точках касания должны ровняться нулю. Это стационарные точки. На рисунке все они являются точками экстремума (максимумами или минимумами). Их три.

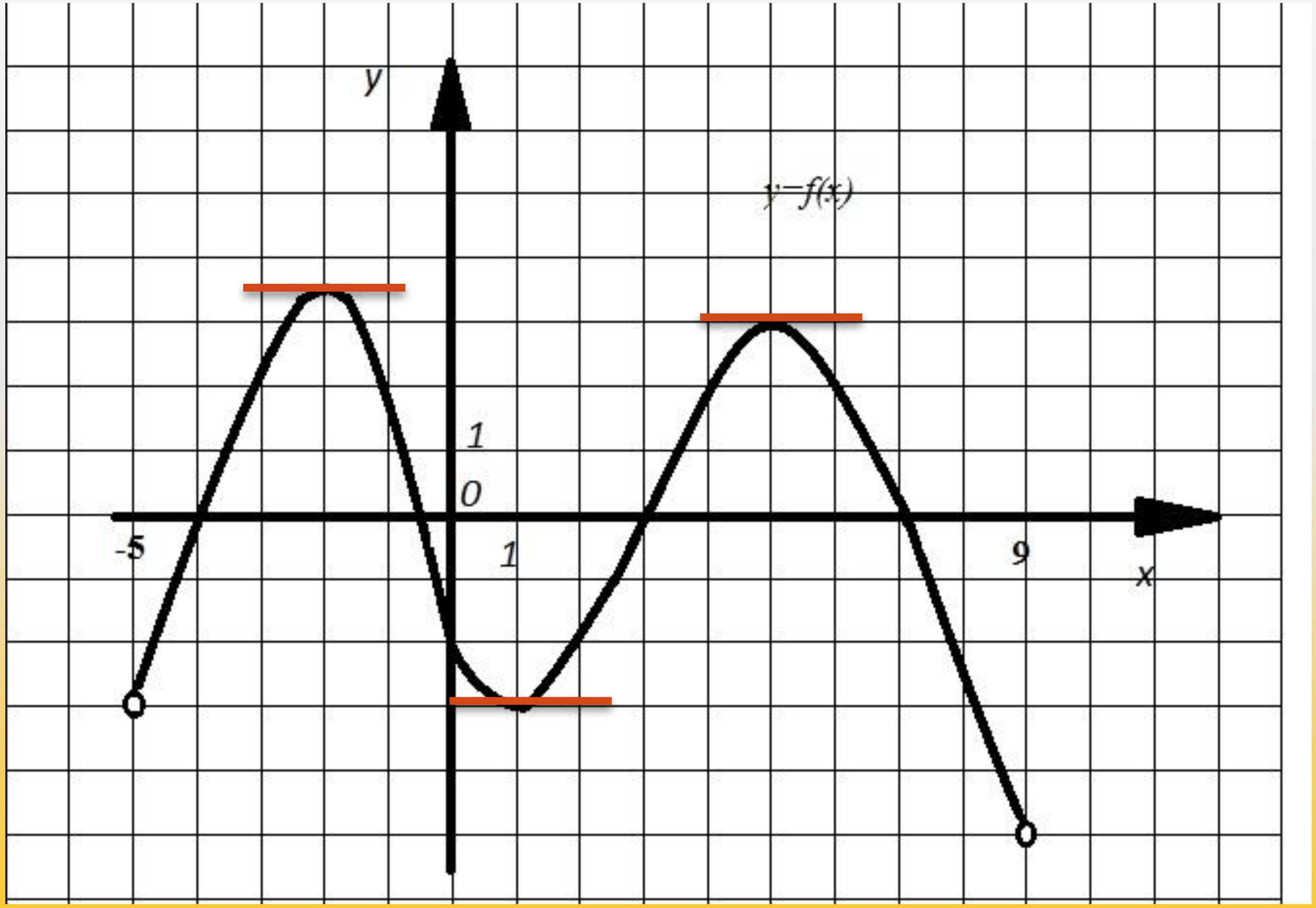


Рис.17

Ответ: 3.

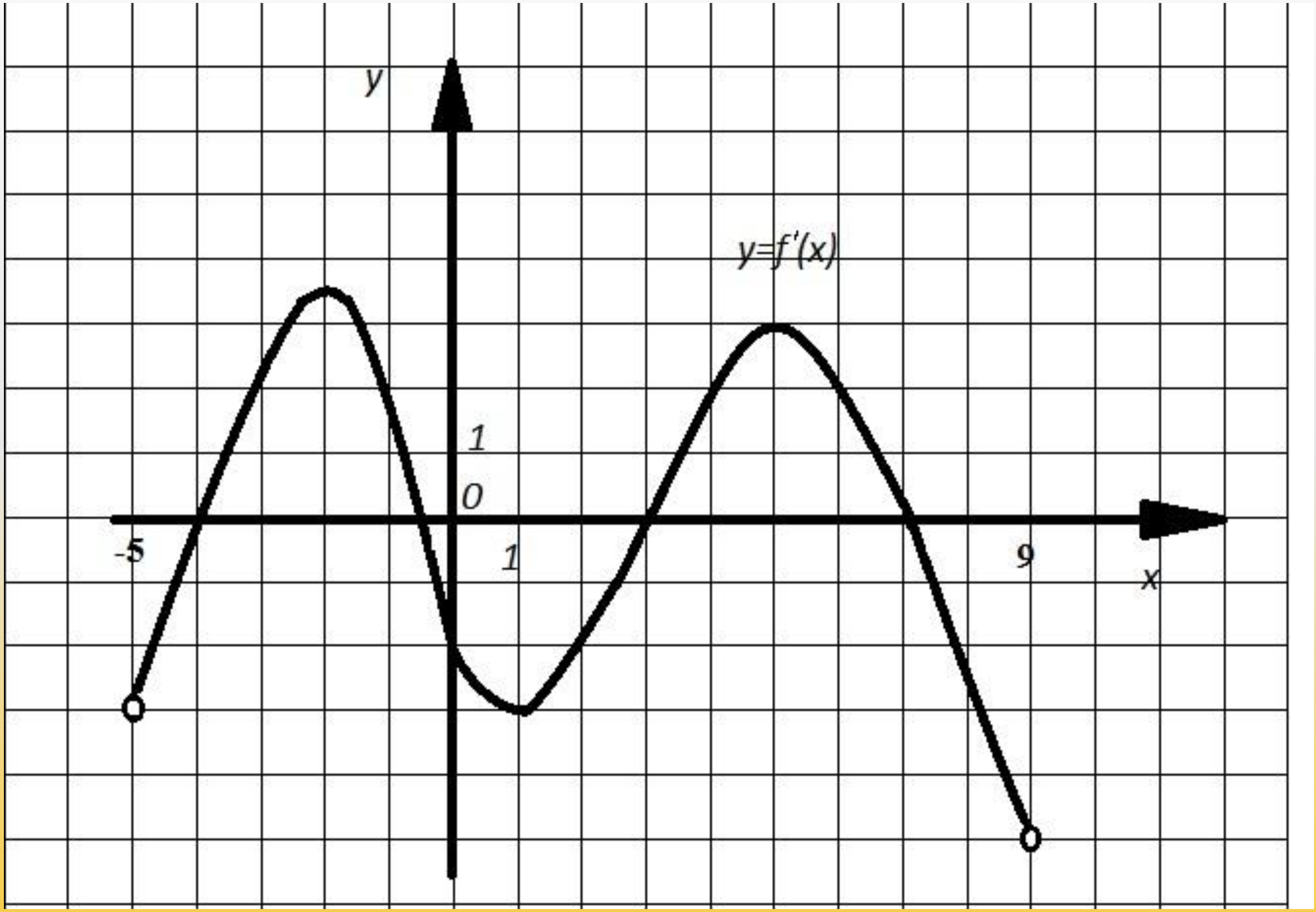


Рис.2

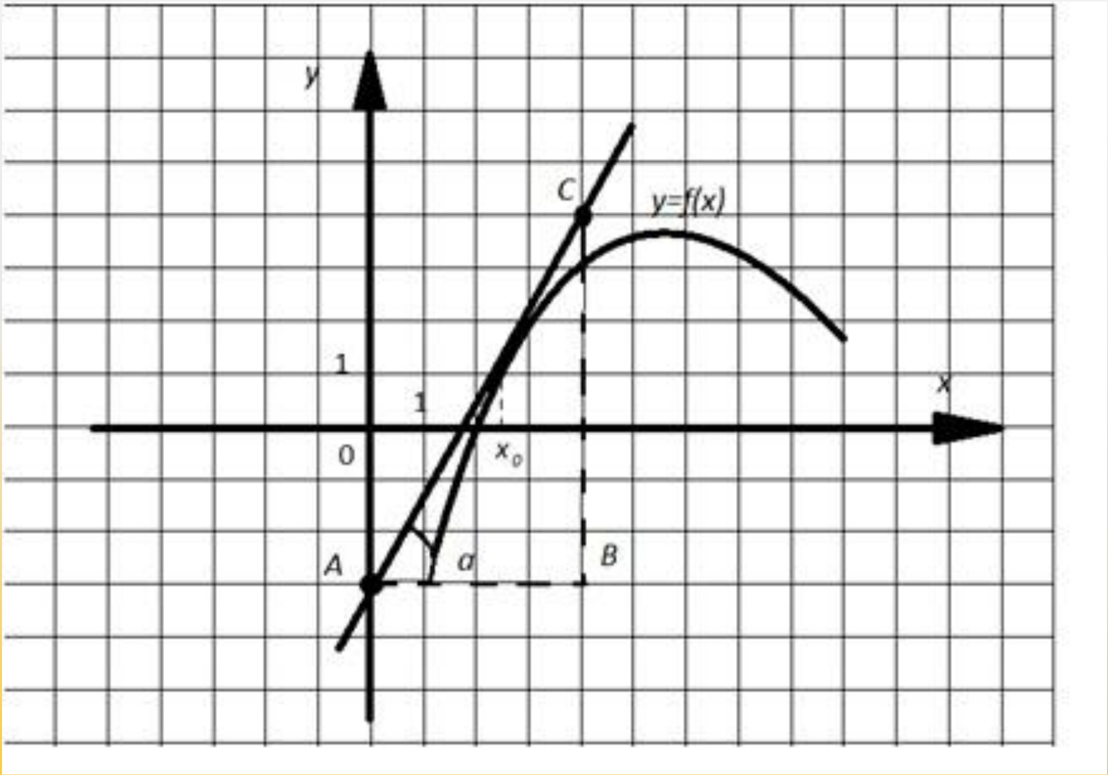
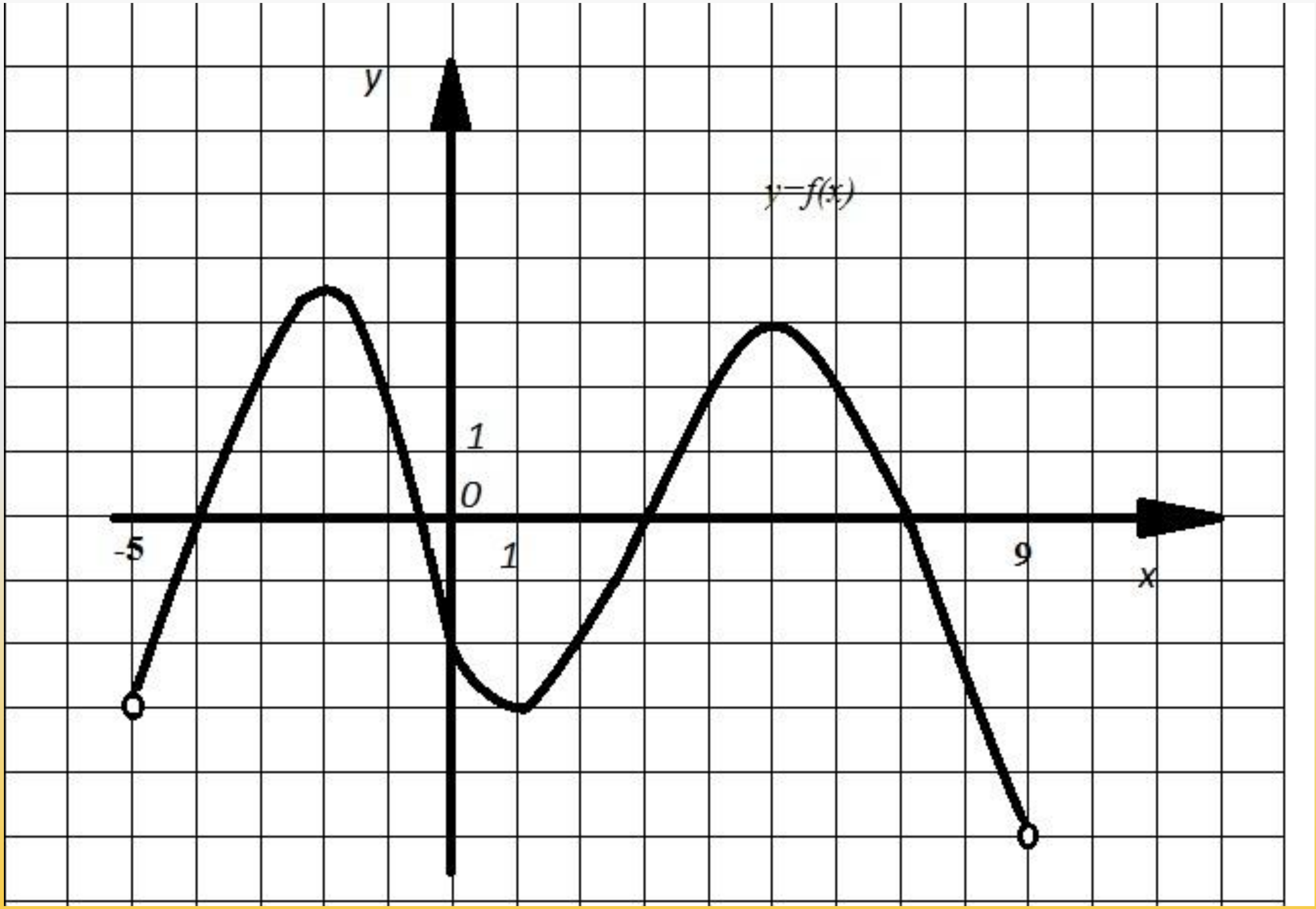


Рис.1



- Рис.5