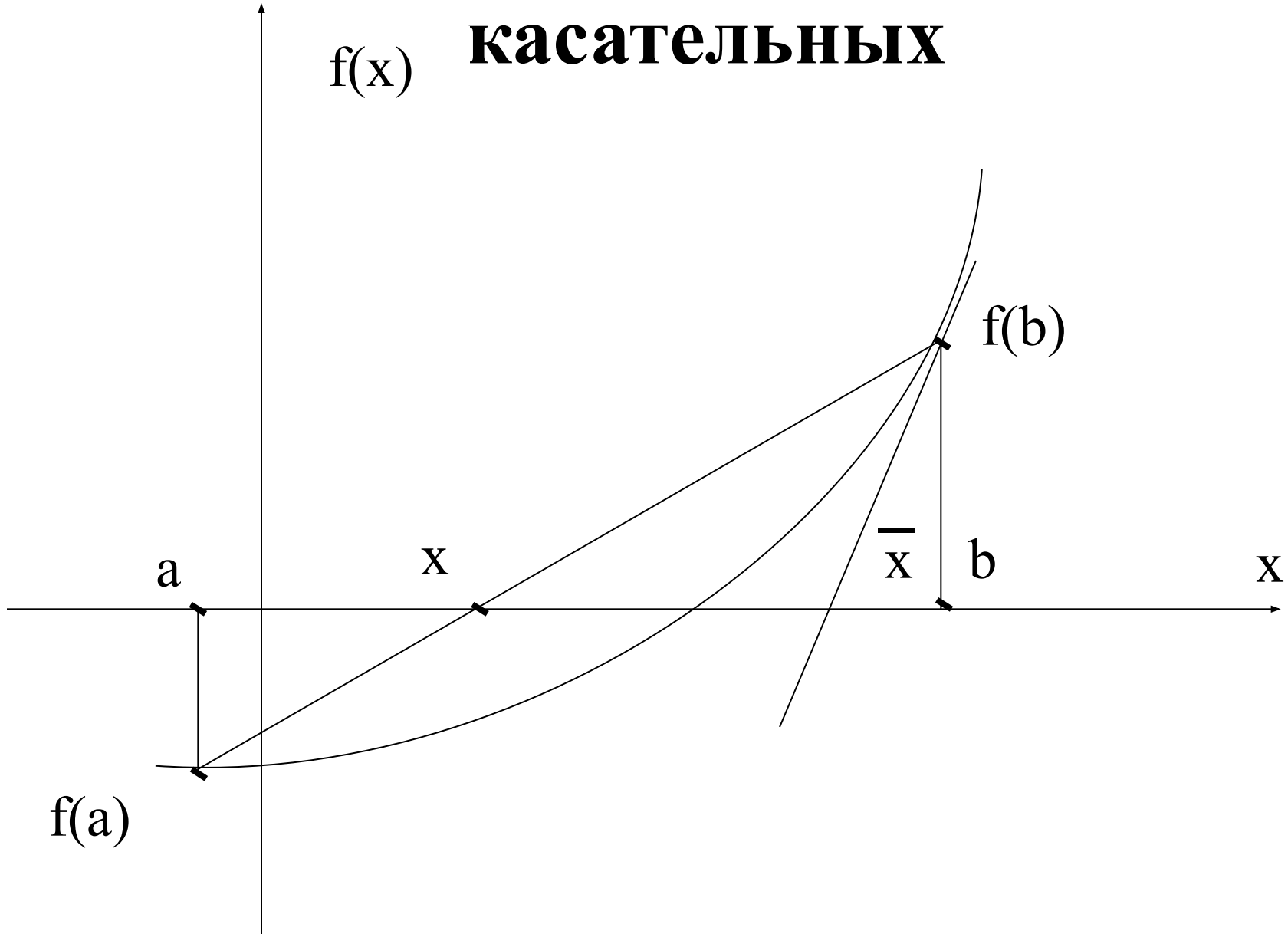


Комбинированный метод хорд и касательных

$f(x)$ касательных



Суть метода:

Предположим:

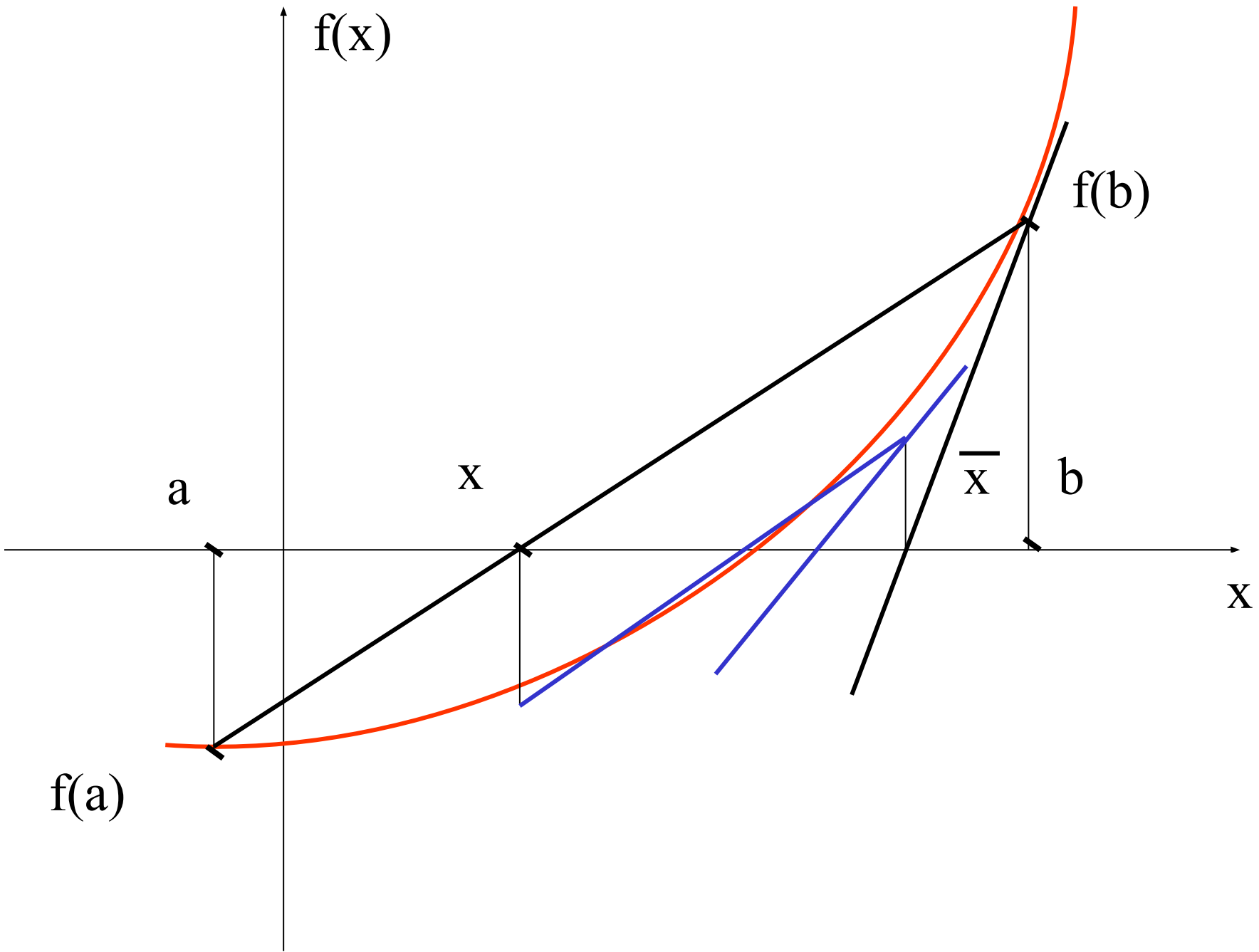
1. Что функция на интервале $[a; b]$ определена и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) * f(b) < 0$
2. Что на отрезке $[a; b]$ вторая производная $f''(x)$ определена и не меняет знак. Тогда приближения к корню, полученные методом хорд и методом касательных, будут на любом шаге расположены по разные стороны от корня.

1. В качестве начальной точки для получения приближений по методу касательных выберем тот конец отрезка $[a; b]$ для которого выполняется условие $f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0$, обозначим его a , второй конец отрезка обозначим b . x

2. Вычислим новые значения x_{n+1} : \bar{x}

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

3. Если $|x - \bar{x}| \leq \epsilon$, то задача решена, за приближенное значение корня можно принять величину $X = \frac{x + \bar{x}}{2}$. В противном случае переходим к пункту 2.



Пример:

Задана функция: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$;

Находим производную: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$;

Определяем корни: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3}$;

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 2.$$

Составляем таблицу знаков функции :

х	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
Знак f(x)	-	+	-	+

Уравнение имеет три действительных корня:

$$x_1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]; \quad x_2 \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]; \quad x_3 \in [2; +\infty)$$

Уменьшим промежутки, содержащие корни:

x	-2	-1	0	1	2	3
Знак f(x)	-	+	+	+	-	+

Значит, $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [1; 2]$; $x_3 \in [2; 3]$.

Уточним корни:

1. $x_1 \in [-2; -1]$;

$$\underline{f(-2) < 0; f(-1) > 0; f''(x) = 6x - 4}$$

$$\text{При } -2 \leq x \leq -1 \quad \underline{f''(x) < 0}$$

Для расчетов принимаем формулы:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}; \quad x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}$$

Полагаем, что

$$\bar{x}_0 = -2; \quad x_0 = -1$$

Обозначим :

$$h_{1n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}; \quad h_{2n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} (x_n - \bar{x}_n)$$

n	\bar{x}_n	$x_n - x_n$	$f(\bar{x}_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	h_{1n}
	x_n		$f(x_n)$		
0	-2	1			
	-1				
1					
2					

Т.к. $|x - \bar{x}| < \epsilon$ вычисления прекращаем,
 $x_1 \approx -1,935$ $f(x_1) \approx 0,0001$

$$2. x_2 \in [1; 2] \text{ при } 1 \leq x \leq 2$$

$f(1) > 0; f(2) < 0$; $f''(x) > 0$ Для расчетов применяем те же формулы, полагая $\bar{x}_0 = 1; x_0 = 2$

$$3. x_3 \in [2; 3] \text{ при } 2 \leq x \leq 3$$

$$f(2) < 0; f(3) > 0; f''(x) > 0$$

Для расчетов применяем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}$$

Полагаем, что $\bar{x}_0 = 2; x_0 = 3$

Обозначим
$$h_{1n} = \frac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}; \quad h_{2n} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

n	\bar{x}_n	$x_n - x_n$	$f(\bar{x}_n)$
	x_n		$f'(x_n)$
0	2	1	$f(x_n)$
	3		
1			
2			

h_{1n}

h_{2n}

$$|x - \bar{x}| < E$$

$$x_1 \approx 2,473$$

$$f(x_1) \approx 0,0001$$