Тема 6
Использование математических методов процессе массовой оценки

6.1 Сущность и виды прогнозирования

6.2 Прогнозирование с помощью методов экстраполяции

6.3 Сущность и цели корреляционно-регрессионого анализа (КРА)

6.4 Методика проведения КРА

6.1 Сущность и виды прогнозирования

Основные понятия:

- Сущность прогнозирования
- Виды прогнозов

6.2 Прогнозирование с помощью методов экстраполяции

Основные понятия:

- Установление цели и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования
- Подготовка исходных данных
- Фильтрация исходного временного ряда
- Логический отбор видов аппроксимирующей функции
- Оценка математической модели прогнозирования
- Выбор математической модели прогнозирования

1. Установление цели и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования

- Анализ зависимости рассматриваемого объекта (параметра, показателя) от других систем одного уровня и субсистемы (системы более высшего уровня);
- взаимосвязи между данным объектом и другими объектами системы;
- установления характера предоставления статистических данных об объекте.

2. Подготовка исходных данных:

- проверка временного ряда;
- формирование массива функций.

3. Фильтрация исходного временного ряда (сглаживание и выравнивание)

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{3}\left(y_{-1} + y_0 + y_{+1}\right) \qquad (1)$$

$$\tilde{y}_{-1} = \frac{1}{6}\left(5y_{-1} + 2y_0 - y_{+1}\right) \qquad (2)$$

$$\tilde{y}_{+1} = \frac{1}{6}\left(-y_{-1} + 2y_0 + y_{+1}\right) \qquad (3)$$

где $y_0, \tilde{y}_0$ - значения исходной и сглаженной функции в средней точке группы;

$y_{-1}, \tilde{y}_{-1}$ - значение исходной и сглаженной функции в левой точке группы;

$y_{+1}, \tilde{y}_{+1}$ - значения исходной и сглаженной функции в правой точке группы.

Сглаживание по 5 точкам

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{5}\left(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_{+1} + y_{+2}\right) \qquad (4)$$

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1}{10}\left(4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_{+1}\right); \qquad (5)$$

$$\bar{y}_{+1} = \frac{1}{10}\left(y_{-1} + 2y_0 + 3y_{+1} + 4y_{+2}\right) \qquad (6)$$

$$\bar{y}_{-2} = \frac{1}{5}\left(3y_{-2} + 2y_0 + y_{+1} - y_{+2}\right) \qquad (7)$$

$$\bar{y}_{+2} = \frac{1}{5}\left(-y_{-2} + y_0 + 2y_{+1} + 3y_{+2}\right) \qquad (8)$$

Выравнивание (логарифмирование или замена замена переменных)

$$y = f(t, a, b) \qquad (9)$$

где t - время,

a, b - параметры

$$Y = a_1 T + b_0 \qquad (10)$$

Пример 1

Исходная функция $y = at^b$

Логарифмируя, получим $\lg y = \lg a + b \cdot \lg t$

Вводя замену переменных, имеем:

$T = \lg t \quad Y = \lg y$

$$Y = a_1 T + b_1$$

где $a_1 = b$

$$b_1 = \lg a$$

4. Логический отбор видов аппроксимирующей функции

а) является ли исследуемый показатель величиной монотонно возрастающей (убывающей), стабильной, периодической, имеющей один или несколько экстремумов;

б) ограничен ли показатель сверху или снизу каким-либо пределом;

в) имеет ли функция, определяющая процесс, точку перегиба;

г) обладает ли анализируемая функция свойством симметричности;

д) имеет ли процесс четкое ограничение развития во времени.

Виды используемых полиномов

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, t^i \qquad (11)$$

$$y(t) = \exp\left[a + \sum_{i=1}^{n} a_i t^i\right] \qquad (12)$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i\, t^i} \qquad (13)$$

$$y(t) = a + bt \tag{14}$$

$$y(t) = a + bt + ct^2 \tag{15}$$

$$y(t) = at^b \tag{16}$$

$$y(t) = a\exp(bt) \tag{17}$$

$$y(t) = k - a\,e^{-bt} \tag{18}$$

$$y(t) = a + \frac{b}{c+t} \tag{19}$$

$$y(t) = \frac{k}{1 + b\,e^{-et}} \tag{20}$$

5. Оценка математической модели прогнозирования

Метод наименьших квадратов (МНК)

Метод экспоненциального сглаживания

Метод наименьших квадратов

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{y}_i - y_i \right)^2 \rightarrow \min$$

где $\tilde{y}_i$ - расчетные (теоретические) значения исходного ряда;

y_i - фактические значения исходного ряда;

n - число наблюдений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\tilde{y}_i - y_i \right)^2 \to \min$$

$$\beta_i < 1$$

Метод экспоненциального сглаживания

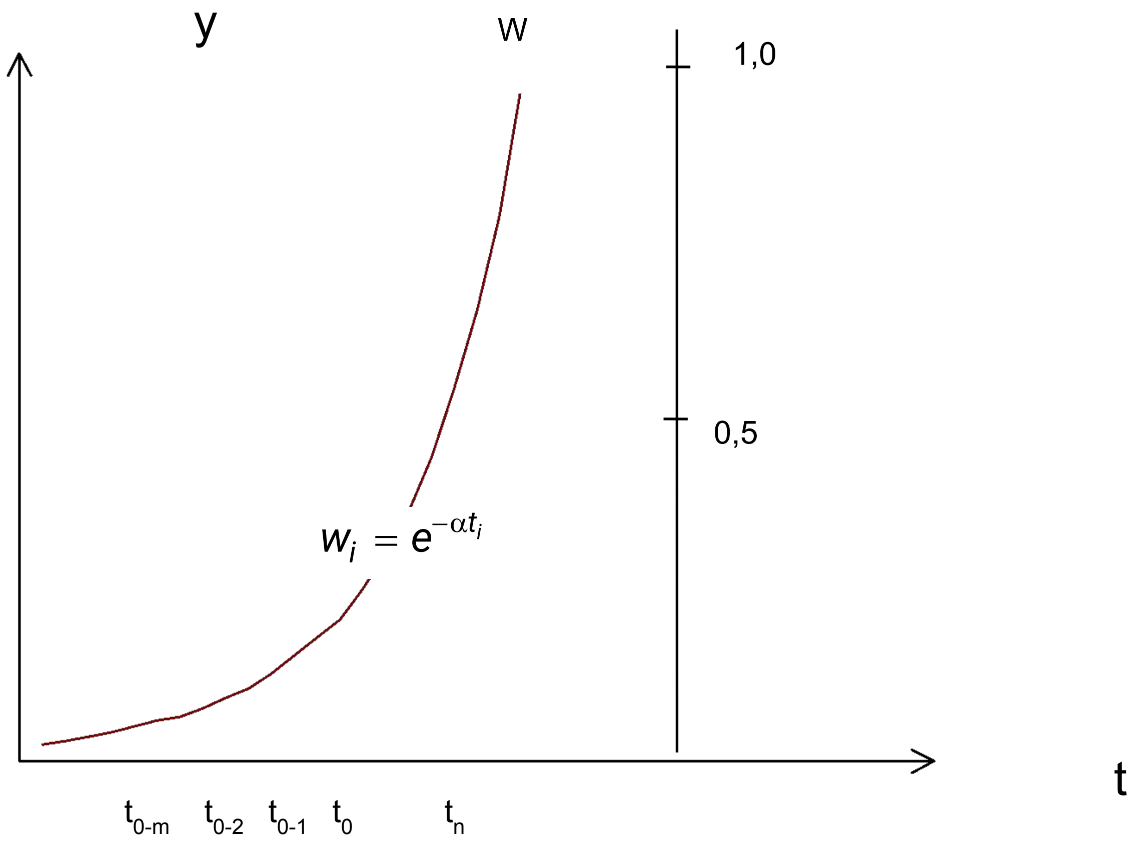


Рис. 1. Коэффициент экспоненциального сглаживания

$$y_t = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{b_p}{p!}t^p + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{p} \frac{b_j}{j!}t^j + \varepsilon_t$$

где $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ - коэффициенты;

p - порядок полинома;

ε_t - случайная ошибка.

$$S_t^{[k]}(y) = \alpha \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^t S_{t-1}^{[k-1]}(y)$$

где α - параметр сглаживания

Формула Брауна

$$S_t^{[k]}(y) = \alpha S_t^{[k-1]}(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^{[k]}(y)$$

Начальные условия

$$S_0^{[1]},\ S_0^{[2]},\ S_0^{[k]}$$

Формула Брауна-Мейера

$$S_t^{[k]}(y) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \cdot \frac{\hat{b}_p}{p!} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)}{(k-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j^p (1-\alpha)^j \frac{(p-1+j)!}{j!},$$

где $p = 1, 2, \ldots, n+1$

$\hat{b}$ - оценки коэффициентов.

Линейная модель Брауна

$$y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$$

Начальные приближения для случая линейного тренда равны

$$S_0^{[1]}(y) = b_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_1 \quad ; \qquad (27)$$

$$S_0^{[2]}(y) = b_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_1 \qquad (28)$$

$$S_t^{[1]}(y) = \alpha\, y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{[1]}(y) \qquad (29)$$

$$S_t^{[2]}(y) = \alpha\, S_t^{[1]} + (1-\alpha) S_{t-1}^{[2]}(y)$$

Оценки коэффициентов линейного тренда

$$\hat{b}_0 = 2S_t^{[1]}(y) - S_t^{[2]}(y) \qquad (31)$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_t^{[1]}(y) - S_t^{[2]}(y)\right] \qquad (32)$$

Прогноз на ⊠ шагов (на t_l) время равен

$$y_{t_{\boxtimes}} = b_0 + b_1 t$$

Ошибка прогноза

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon_t} \sqrt{\frac{\alpha}{(2-\alpha)^3}\left[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)t_{\boxtimes} + 2\alpha^2 t_{\boxtimes}^2\right]}$$

Оценка α

$$\alpha = \frac{2}{N+1}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_\varepsilon}$$

$$\sigma^2_{x\tau} = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2}\left[1 + 4\beta + 5\beta^2 + 2\alpha(1+3\beta)\tau + 2\alpha^2\tau^3\right]\sigma^2_{\varepsilon}$$

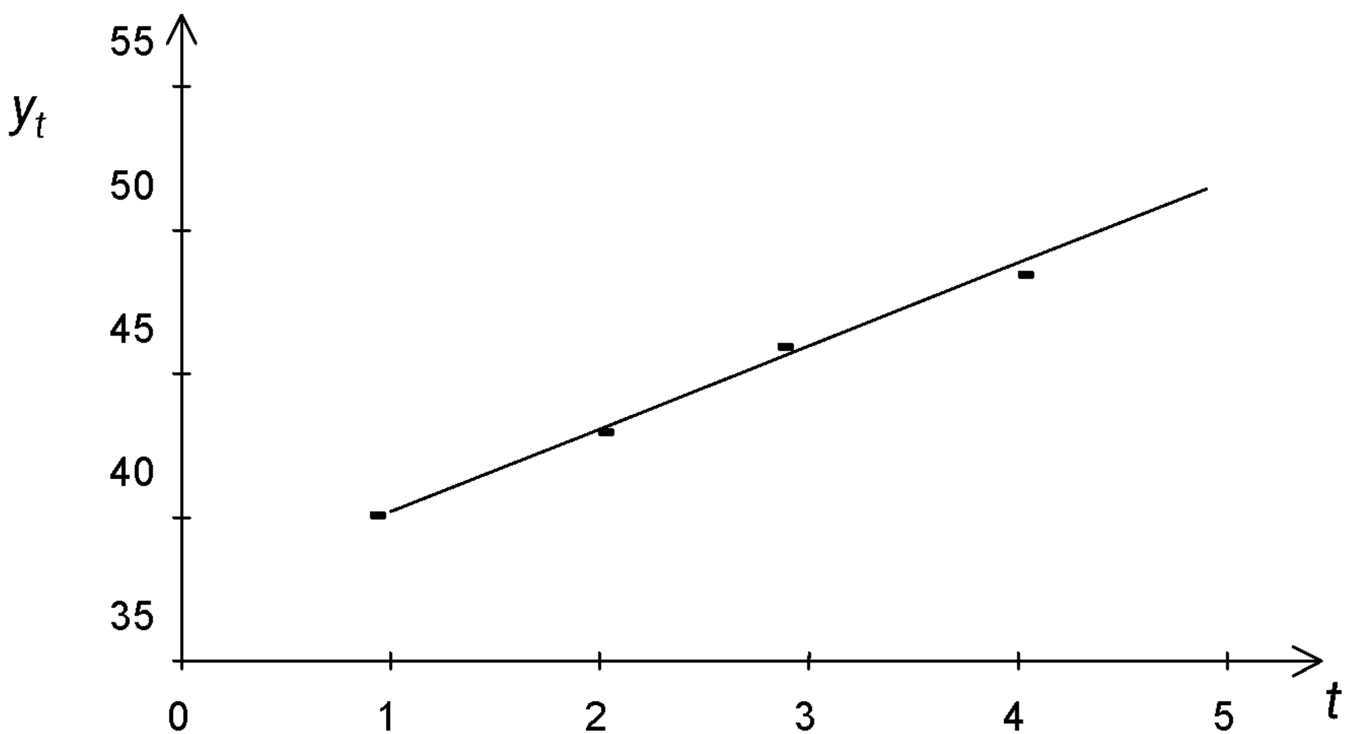
где $\beta = 1 - \alpha$

τ - период прогноза;

σ_{ε} - среднеквадратическая ошибка аппроксимации исходного динамического ряда.

Пример

Год	2007	2008	2009	2010
t	1	2	3	4
y_t	40	43	46	48



Год	Период времени	Фактическое значение y_t	Расчетные значения			
			t^2	t_{y_t}	$y = 37,5 + 2,7 \cdot t$	$\Delta y = y - y_t$
2007	1	40	1	40	40,2	0,2
2008	2	43	4	86	42,9	-0,1
2009	3	46	9	138	45,6	-0,4
2010	4	48	16	192	48,3	0,3
Итого	10	177	30	456	-	-

$$y = a_0 + a_1 t$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} = 120 - 100 = 20\,;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum t_i \\ \sum y_i t_i & \sum t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 177 & 10 \\ 456 & 30 \end{vmatrix} = 750\,;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum t_i & \sum t_i y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 177 \\ 10 & 456 \end{vmatrix} = 54\,;$$

$$a_0 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{750}{20} = 37,5\ ;$$

$$a_1 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{54}{20} = 2,7$$

$$y = 37,5 + 2,7\,t$$

Прогноз на 2011

У = 37,5 + 2,7*5= 51

Основная ошибка

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{0{,}2^2 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}4)^2 + 0{,}3^2}{3}} = 0{,}3$$

Параметр сглаживания

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{4+1} = 0{,}4$$

$$S_0^{[1]} = 37{,}5 - \frac{1-0{,}4}{0{,}4} \cdot 2{,}7 = 33{,}45 \;;$$

$$S_0^{[2]} = 37{,}5 - \frac{2(1-0{,}4)}{0{,}4} \cdot 2{,}7 = 29{,}4$$

Для $t = 2$ вычислим экспоненциальные средние и коэффициенты

$$S_2^{[1]} = 0,4 \cdot 40 + 0,6 \cdot 33,45 = 36\ ;$$

$$S_2^{[2]} = 0,4 \cdot 36 + 0,6 \cdot 29,4 = 32\ ;$$

$$a_0 = 2 \cdot 36 - 32 = 40,$$

$$a_1 = \frac{0,4}{1-0,4} \cdot \left(36 - 32\right) = 2,6;$$

$$y_2^* = 40 + 2{,}6 \cdot 1 = 42{,}6\,;$$

$$\Delta y_2^* = 42{,}6 - 43 = -0{,}4\,.$$

Год	Период времени t	Фактическое значение Yt	Расчетные значения					
			$S_t^{[1]}$	$S_t^{[2]}$	a_0	a_1	y_t^*	$\Delta y^* = y_t^* - y_t$
2007	1	40						
2008	2	43	36	32	40	2,6	42,6	-0,4
2009	3	46	38,6	34,6	42,6	2,7	45,3	-0,7
2010	4	48	41,6	37,4	45,8	2,8	48,6	0,6
2011	$\square = 1$	-	44,2	40,1	48,3	2,7	51	-

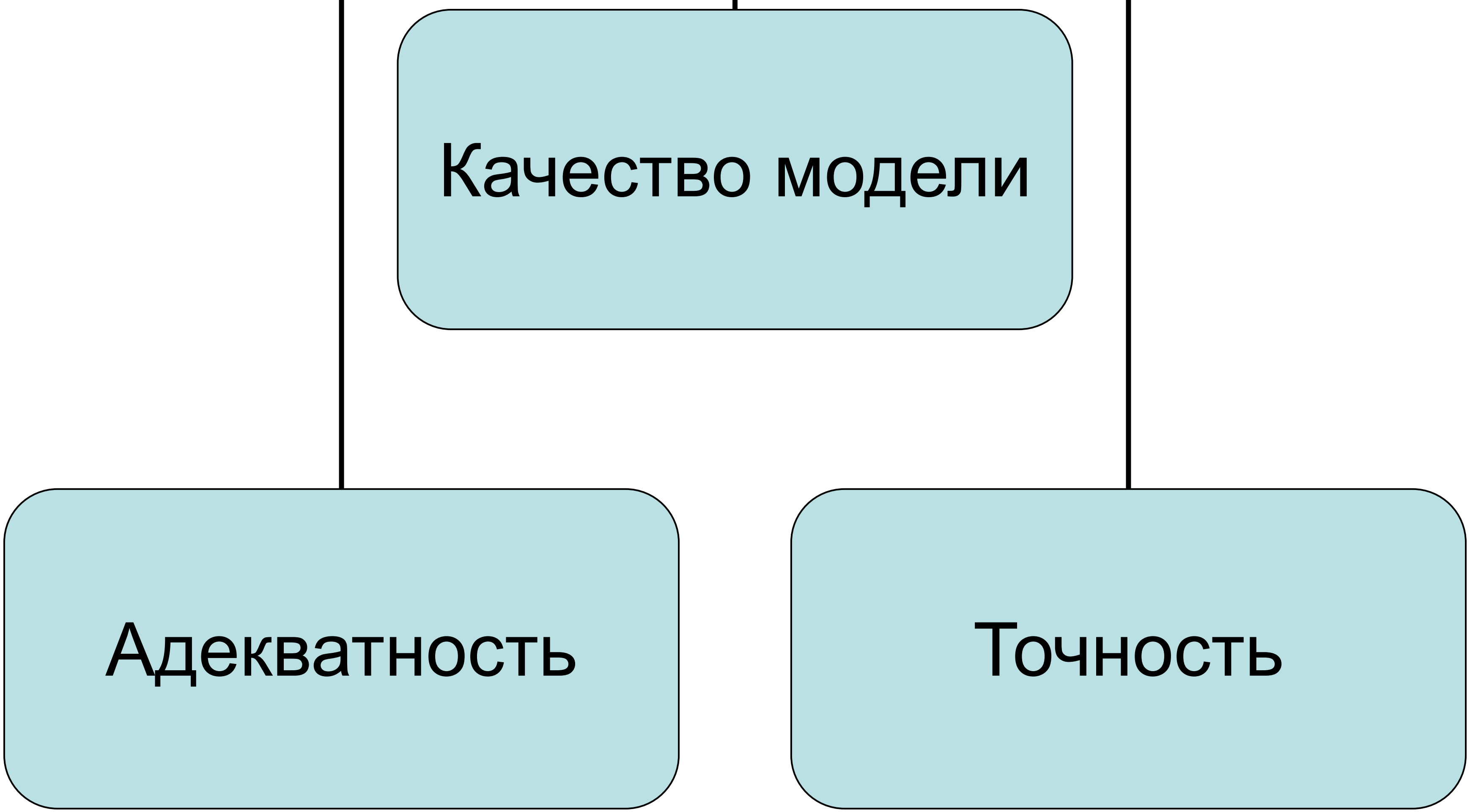
$$y_{t+\square} = 48{,}3 + 2{,}7 \cdot \square$$

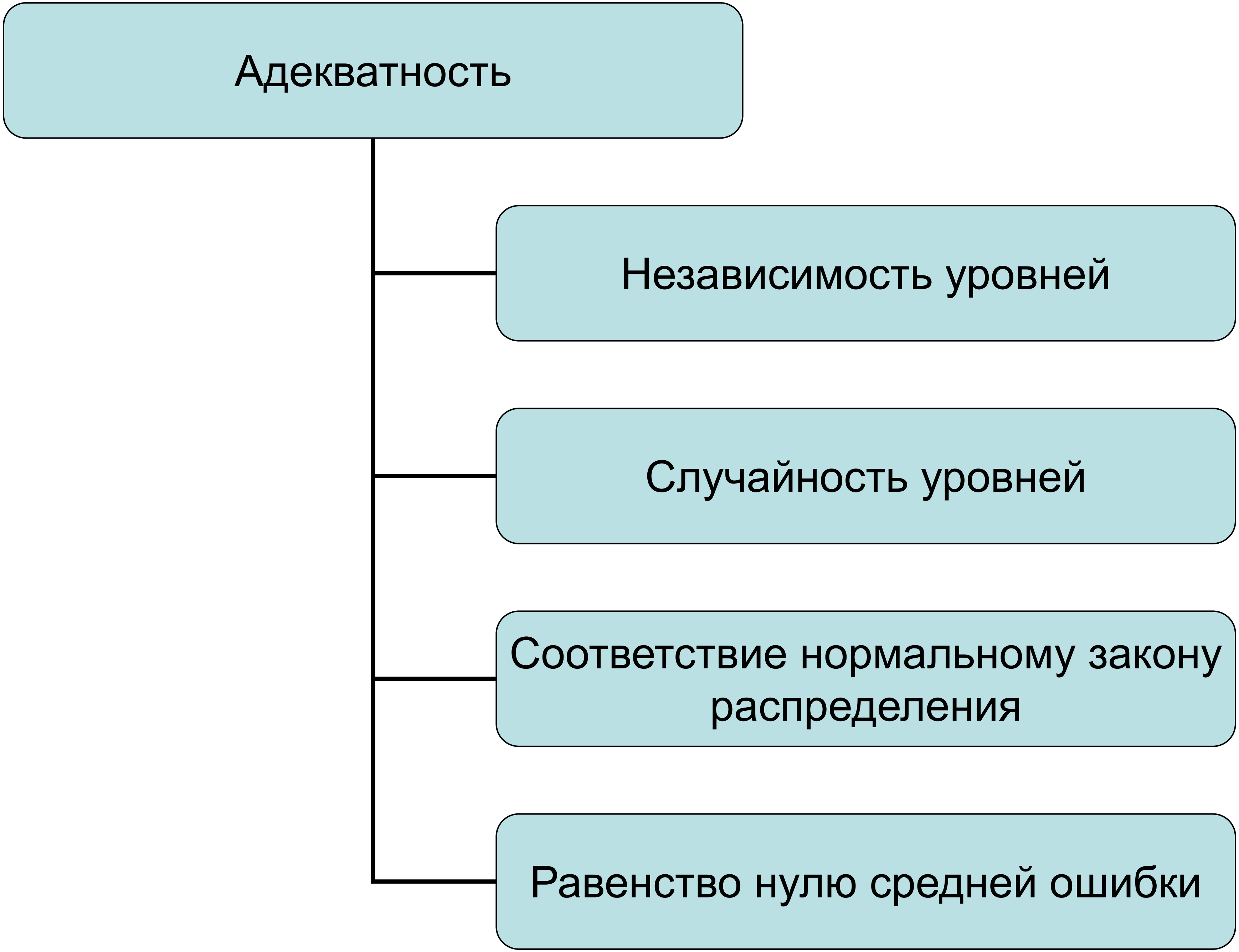
$\square$ =1, 2, ...

Ошибка прогноза

$$\sigma_{y^*} = 0,3\sqrt{\frac{0,4}{1,6^3}\left[1+4\cdot 0,6+50\cdot 0,6^2+0,8\cdot 2,8\cdot 1+0,32\cdot 1^2\right]} = 0,3\cdot 0,87 = 0,46$$

6. Выбор математической модели прогнозирования




Адекватность
Независимость уровней
Случайность уровней
Соответствие нормальному закону распределения
Равенство нулю средней ошибки

Независимость уровней. Критерий Дарбина-Уотсона

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}\left[(y_i - y_{\text{т}i}) - (y_{i-1} - y_{\text{т}i-1})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{\text{т}i})^2}$$

$y_i;\ y_{i-1}$ уровни фактического динамического ряда

$y_{\text{т}i};\ y_{\text{т}i-1}$ теоретические (прогнозные) уровни динамического ряда

n - объем выборки.

$d_в \le d \le 4 - d_в$	принимается гипотеза: автокорреляция отсутствует;
$0 \le d \le d_н$	принимается гипотеза о существовании положительной автокорреляции остатков;
3. $d_н \le d \le d_в$ и $4 - d_в \le d \le 4 - d_н$	при выбранном уровне значимости нельзя прийти к определенному выводу;
$4 - d_н \le d \le 4$	принимается гипотеза о существовании отрицательной автокорреляции остатков.

$$r_a = 1 - \frac{d}{2}$$

где d - статистика Дарбина-Уотсона.

$$r_a \le r_{aт}$$

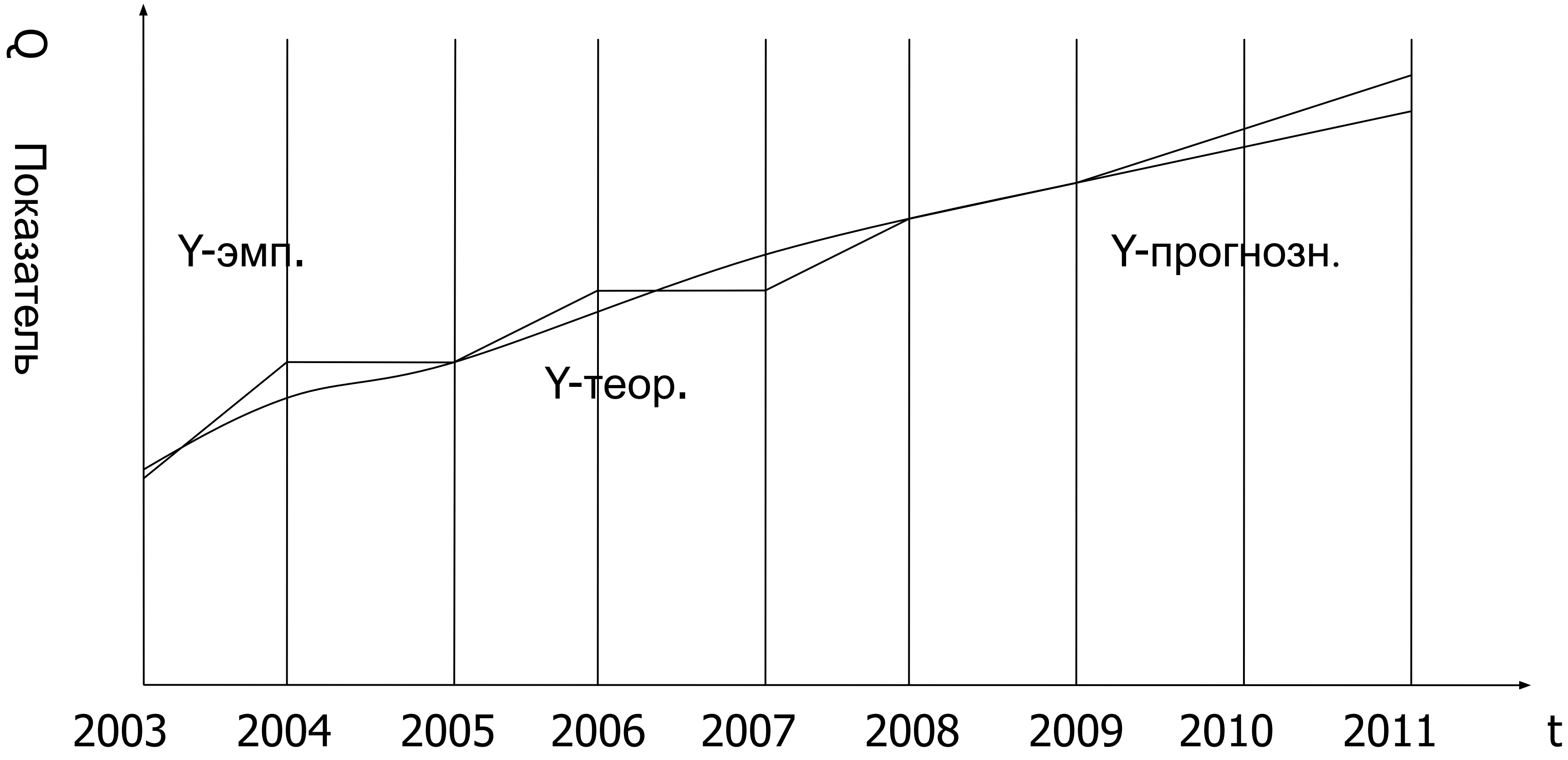
Случайность уровней

$$K > \left[\frac{(2n-1)}{3} - 2 \cdot \sqrt{\left(16n - \frac{29}{90}\right)} \right]$$

Соответствие нормальному закону распределения

$$A_c = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{\text{т}\,\text{i}} \right)^3 \right] \Bigg/ \sqrt{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{\text{т}i} \right)^2 \right]^3}$$

$$Э_k = \left[\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{\text{т}\,\text{i}} \right)^4 \right) \Bigg/ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{\text{т}i} \right)^2 \right)^2 \right] - 3$$



Фактические и прогнозные значения показателя

$$S_a = \frac{6(n-2)}{(n+1)\cdot(n+3)}$$

$$S_э = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

$$A_c \le 1{,}5S_a \qquad Э_k \le 1{,}5S_э$$

$$A_c > 2S_a \qquad Э_k > 2S_э$$

$$RS = (E_{\max} - E_{\min})/S$$

где $E_{\max}$ - максимальный уровень ряда остатков ($y_i - y_{\text{т}i}$), $i = \overline{1,n}$

$E_{\min}$ - минимальный уровень ряда остатков ($y_i - y_{\text{т}i}$), $i = \overline{1,n}$

S - среднеквадратическое отклонение остатков.

t –критерий Стьюдента

$$t_p = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{\text{т}i} \right) \right| \cdot \sqrt{\frac{n}{S}}$$

$$f_1 = (n-1)$$

Точность

- Оценка стандартной ошибки
- Средняя относительная ошибка
- Среднее линейное отклонение
- Ширина доверительного интервала

Оценка стандартной ошибки

$$S_{1,\, f(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i)\right]^2}{n-p}}$$

n - число наблюдений;

p - число определяемых коэффициентов модели

Средняя относительная ошибка оценки

$$\overline{m}_{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - f(x_i)}{f(x_i)}\cdot 100\%$$

Среднее линейное отклонение

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| y_i - f(x_i) \right|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

Ширина доверительного интервала в точке прогноза

$$a_0 = \tilde{a}_0 \pm t_p \cdot \sigma_{\tilde{a}_0}$$

$$a_1 = \tilde{a}_1 \pm t_p \cdot \sigma_{\tilde{a}_1}$$

$$V_1 = n - m - 1$$

Стандартные ошибки коэффициентов регрессии

$$\sigma_{a_0} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

Несмещенная оценка дисперсии случайной составляющей

;

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{\text{т}i}\right)^2$$

x_i, y_i - фактические значения динамических рядов x и y

.

$y_{\text{т}i}$ - теоретическое значение, рассчитанное по уравнению регрессии;

$\overline{X}$ - среднее значение фактора x

Верхняя $Y^{в}$ и нижняя $Y^{н}$ границы доверительного интервала в точке прогноза

$$Y^{в} = f\left(a_0^{в}; a_1^{в}; x_n\right);$$

$$Y^{н} = f\left(a_0^{н}; a_1^{н}; x_n\right),$$

$a_0^{в}$; $a_0^{н}$ - верхнее и нижнее значения параметра a_0 модели прогноза;

$a_1^{в}$; $a_1^{н}$ - верхнее и нижнее значение параметра a_1 - модели прогноза;

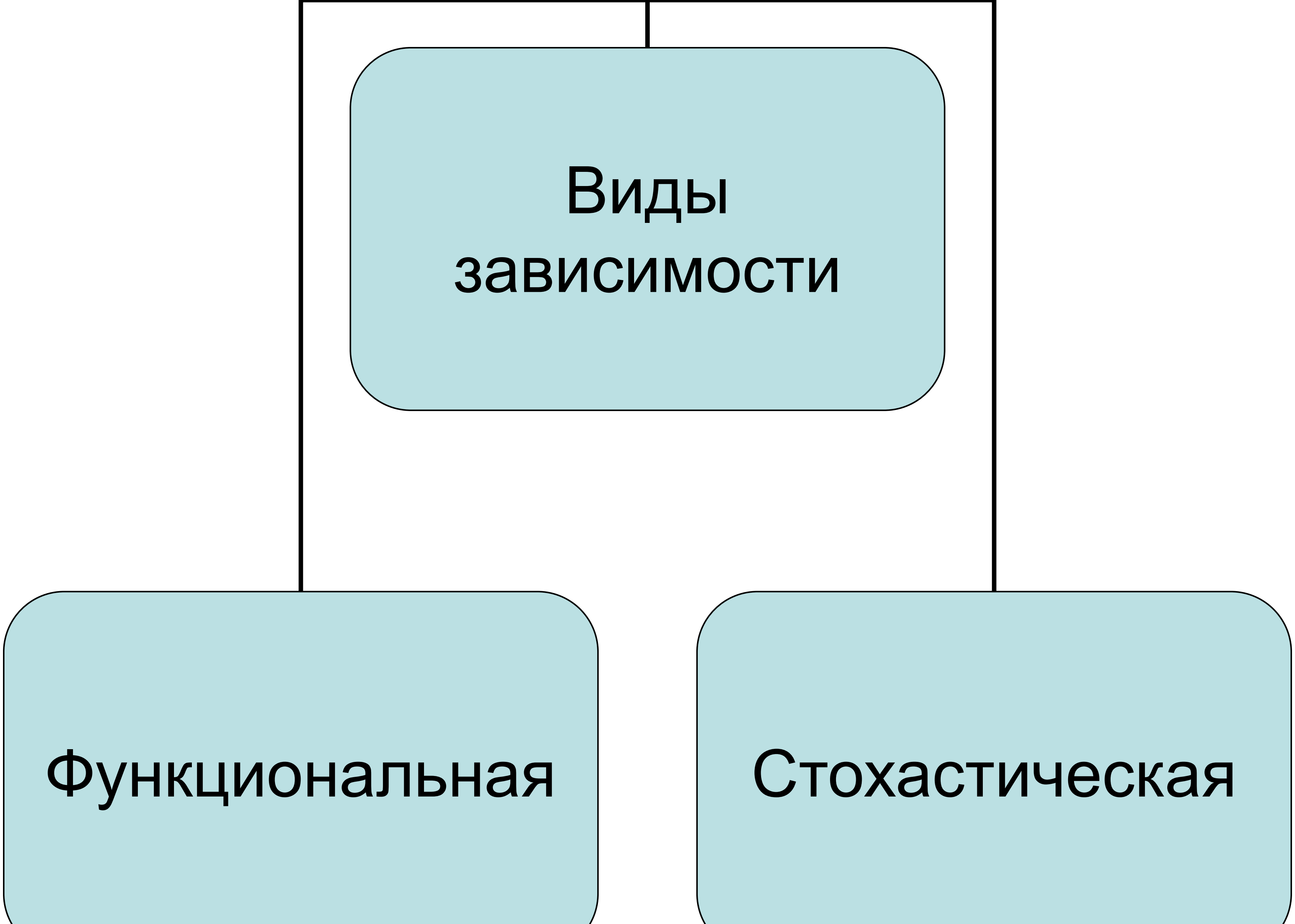
x_n - значение фактора времени в точке прогноза.

$$\Delta = Y^{В} + Y^{Н}$$

6.3 Сущность и цели корреляционно-регрессионого анализа (КРА)

Основные понятия:

- Зависимости
- Регрессия
- Корреляция
- Задачи анализа
- Уравнение регрессии
- Дисперсия
- Ковариация


Виды зависимости
Функциональная
Стохастическая

Виды регрессий

- По числу переменных
  - Простая
  - Множественная
- По форме зависимости
  - Линейная
  - Нелинейная
- По характеру регрессии
  - Положительная
  - Отрицательная
- По типу соединения явлений
  - Непосредственная
  - Косвенная
  - Ложная

Задачи регрессионного анализа

1. Установление формы зависимости.
2. Определение функции регрессии и установление влияния факторов на зависимую переменную.
3. Оценка неизвестных значений переменой (экстраполяция и интерполяция).

Виды корреляции

- По числу переменных
  - Простая
  - Множественная
  - Частная
- По типу соединения явлений
  - Непосредственная
  - Косвенная
  - Ложная
- По характеру
  - Положительная
  - Отрицательная
- По форме связи
  - Линейная
  - Нелинейная

Задачи корреляционного анализа

1. Измерение степени связности (тесноты, силы).
2. Отбор факторов, оказывающих существенное влияние.
3. Обнаружение неизвестных причинных связей.

Основные понятия КРА

Среднее значение переменной

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Дисперсия

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Ковариация
:

$$\mathrm{Cov}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(x_i - \bar{x} \right) \cdot \left(y_i - \bar{y} \right) \right]$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(x_i - \bar{x} \right) \cdot \left(y_i - \bar{y} \right) \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2}}$$

Коэффициент множественной корреляции

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{ост}}}{\sigma^2_{\text{общ}}}}$$

Общая дисперсия

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Остаточная дисперсия

$$\sigma^2_{\text{ост}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i\text{т}})^2}{n-1}$$

Коэффициент детерминации

$$Д = 1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}$$

$$0 \leq Д \leq 1$$

Стандартная ошибка оценки равна

$$\sqrt{\sigma^2_{ост}}$$

Корреляционное отношение

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i\text{т}} - \overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}$$

6.4 Методика проведения КРА

Основные понятия:

Исходные предпосылки

Свойства исходных данных

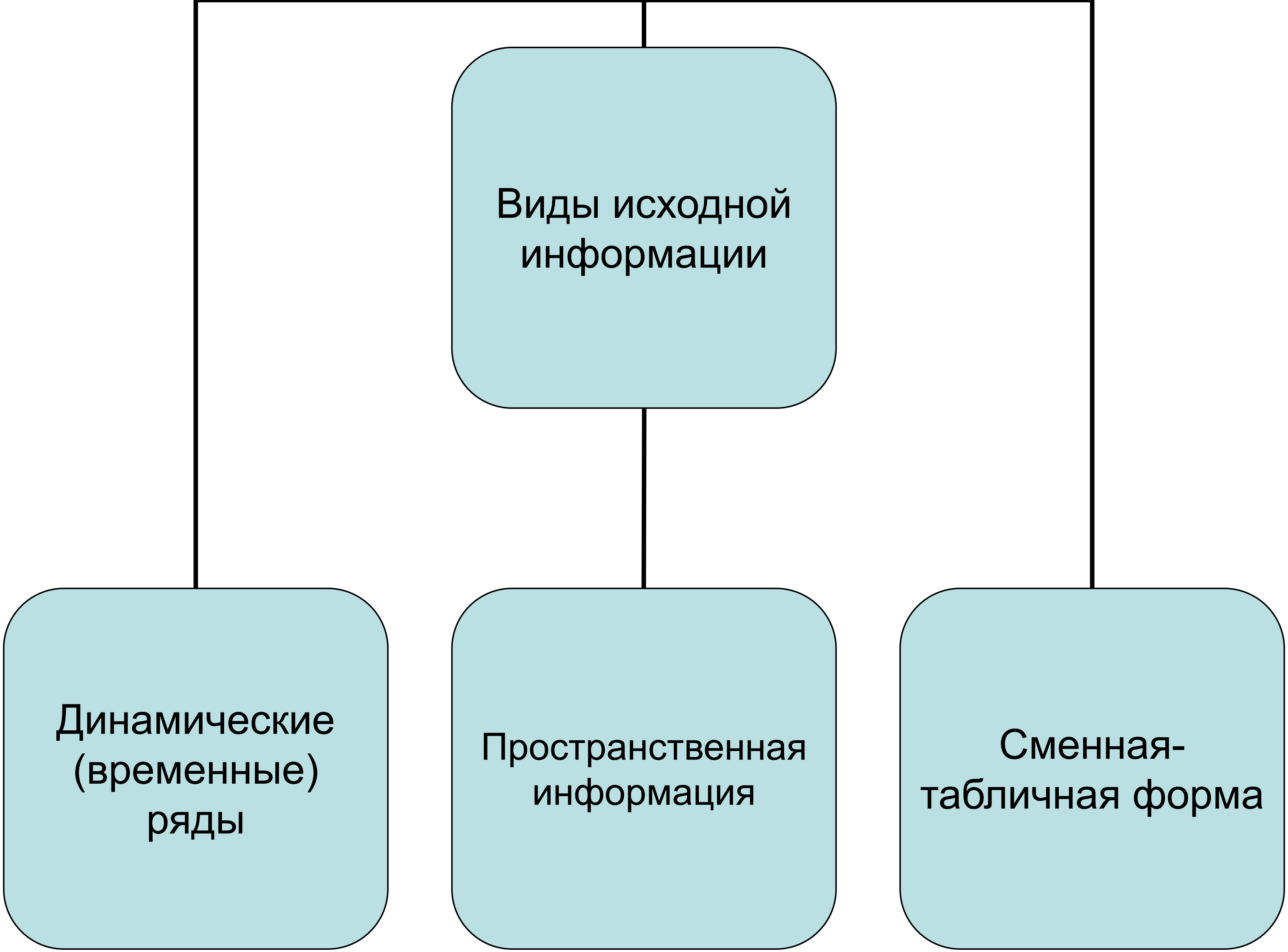
1. Априорное исследование экономической проблемы.
2. Формирование перечня факторов и их логический анализ.
3. Сбор исходных данных и их первичная обработка.
4. Спецификация функции регрессии.
5. Оценка функции регрессии.
6. Отбор главных факторов.
7. Проверка адекватности модели.
8. Экономическая интерпретация.
9. Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной

Исходные предпосылки

- При нахождении оценок переменной предполагается существование зависимости переменной только от тех объясняющих переменных, которые вошли в модель (регрессию).
- влияние неучтенных факторов постоянно
- Отсутствует автокорреляция между возмущающими переменными
- Число наблюдений должно превышать число параметров регрессии
- Предполагается односторонняя зависимость переменной от факторов
- Зависимая переменная и факторы распределены нормально

Свойства данных оценки параметров регрессии

- Несмещенность
- Состоятельность
- Эффективность
- Достаточность


Виды исходной информации
Динамические (временные) ряды
Пространственная информация
Сменная-табличная форма

$$n_{\min} = 5 \cdot (m + n) = 5 \cdot (3 + 1) = 20$$

$$r_{ij} \geq 0,70 \div 0,80$$

Отрицательное воздействие мультиколлинеарности:

1. Усложняется процедура выбора главных факторов.
2. Искажается смысл коэффициента множественной корреляции (он предполагает независимость факторов).
3. Усложняются вычисления при построении самой модели.
4. Снижается точность оценки параметров регрессии, искажается оценка дисперсии.

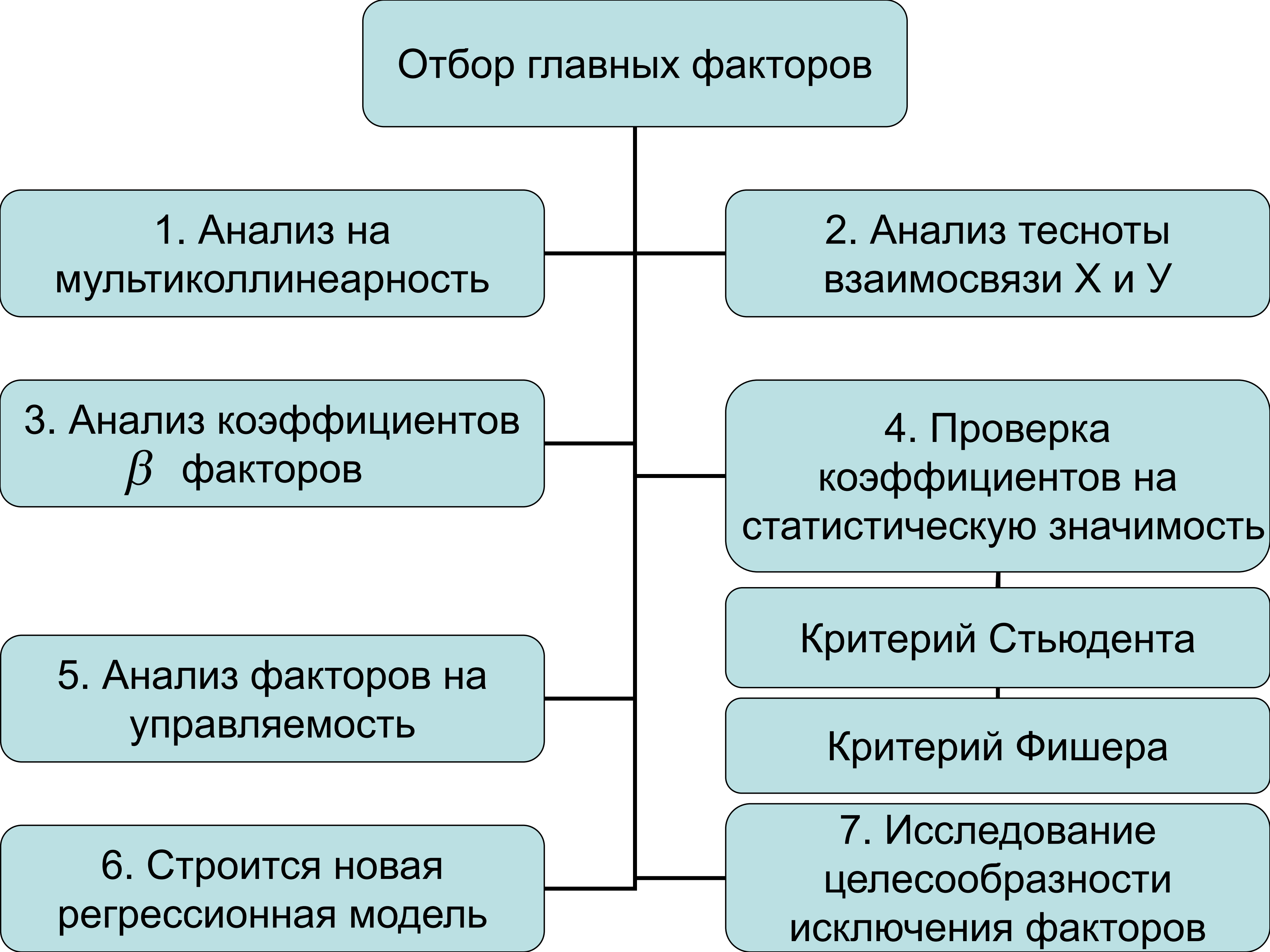
$$Д = R^2$$

$$Д = \sum_{j=1}^{m} d_{yj}$$

$$d_{yj} = r_{yj}^2$$

$$M = Д - \sum_{j=1}^{m} d_{yj}$$

$$\left| r_{yj} \right| \geq 0{,}70$$


Отбор главных факторов
1. Анализ на мультиколлинеарность
2. Анализ тесноты взаимосвязи Х и У
3. Анализ коэффициентов β факторов
4. Проверка коэффициентов на статистическую значимость
Критерий Стьюдента
Критерий Фишера
5. Анализ факторов на управляемость
6. Строится новая регрессионная модель
7. Исследование целесообразности исключения факторов

$$r_{x_i y} = 0$$

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_y}$$

где β_k коэффициент - β k -го фактора;

σ_{x_k} - среднеквадратическое отклонение к- го фактора;

σ_y - среднеквадратическое отклонение функции

a_k - коэффициент регрессии при К-ом факторе

$$t_k = \frac{a_k}{S_{a_k}}$$

$$f = n - m - 1$$

$$t_k \geq t_{f,\alpha} \qquad t_k < t_{f,\alpha}$$

$$F_k = \left(\frac{a_k}{S_{a_k}} \right)^2 = t^2$$

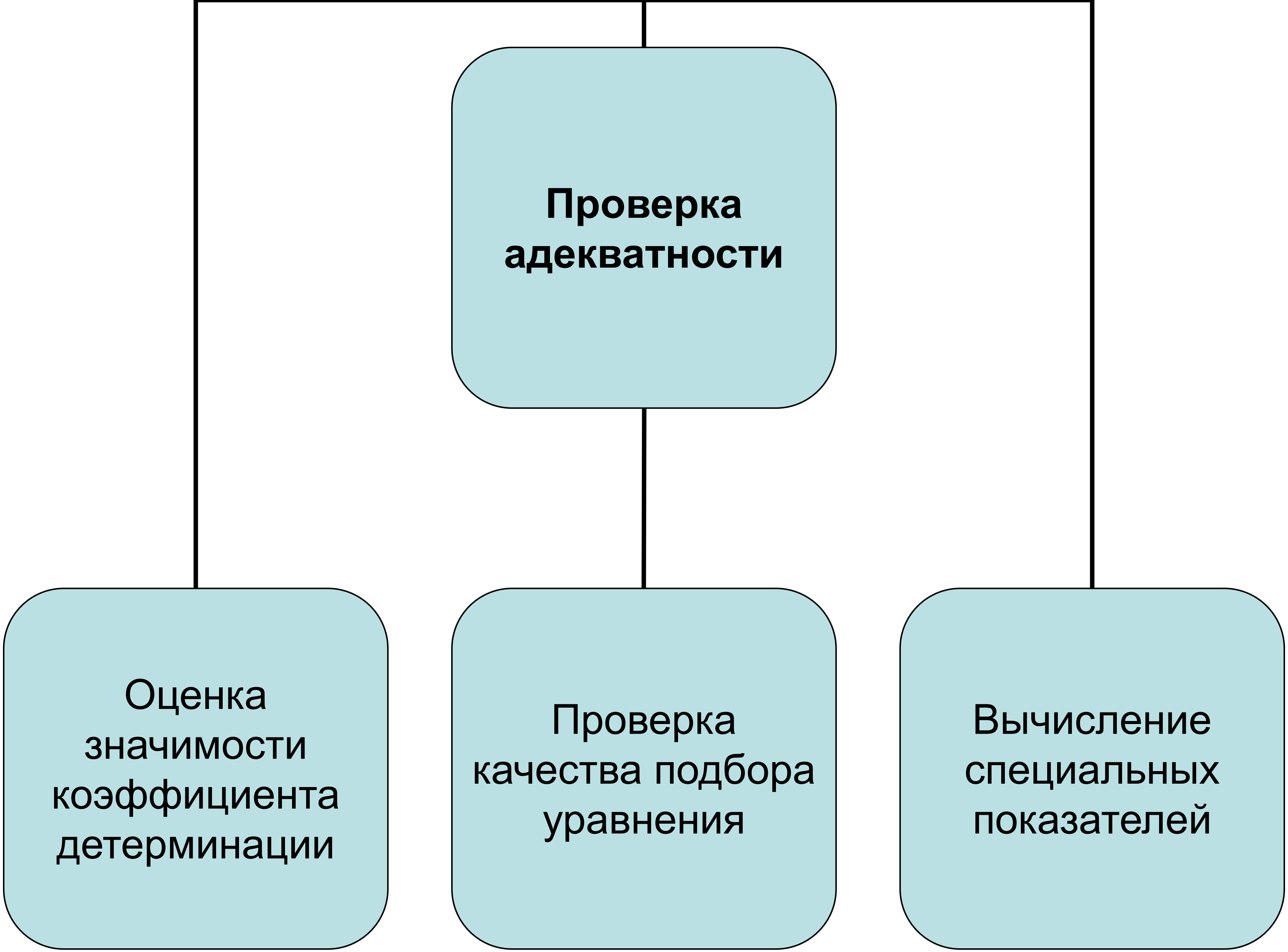
$$f_1 = 1, \ \ f_2 = n - m - 1$$

$$F_k \geq F_{f_1 f_2 \alpha} \qquad\qquad F_k < F_{f_1 f_2 \alpha}$$

$$F = \frac{\left(Д_m - Д_{m_1}\right)\cdot(n-m-1)}{(m-m_1)\cdot(1-Д_m)}$$

$$f_1 = m - m_1 = m_2 \qquad f_2 = n - m - 1$$

$$F \le F_{f_1 f_2 \alpha} \qquad F > F_{f_1 f_2 \alpha}$$


Проверка адекватности
Оценка значимости коэффициента детерминации
Проверка качества подбора уравнения
Вычисление специальных показателей

$$F = \frac{Д\left(n - m - 1\right)}{m\left(1 - Д\right)}$$

$$Д = R^2$$

$f_1 = m$ и $f_2 = n - m - 1$

$$F > F_{f_1 f_2 \alpha}$$

$$E = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - y_{i\text{T}}}{y_{i\text{T}}} \right) \cdot 100\%$$

$$Э_k = a_k \cdot \frac{\overline{x}_k}{\overline{y}}$$

$$g_i = \beta_j^2$$

$$\eta_s = R^2 - \sum_{j=1}^{m} \beta_j^2$$