Основные понятия и определения теории нечетких множеств

Термин **«нечеткое множество»** (*fuzzy set*) был введен в работе Л.А. Заде.

Допустим, что объектом исследования является множество «взрослых людей», к которому формально можно отнести всех людей, достигших совершеннолетия (18 лет). Пусть x (объектная переменная) «возраст человека», а функция

Пример

Рассмотрим множество «взрослых людей», к которому можно отнести всех людей, достигших совершеннолетия (18 лет).

Пусть x (объектная переменная) «возраст человека», а функция $\mu(x)$

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \geq 18;\\ 0, & \text{если } x < 18,\end{cases}$$

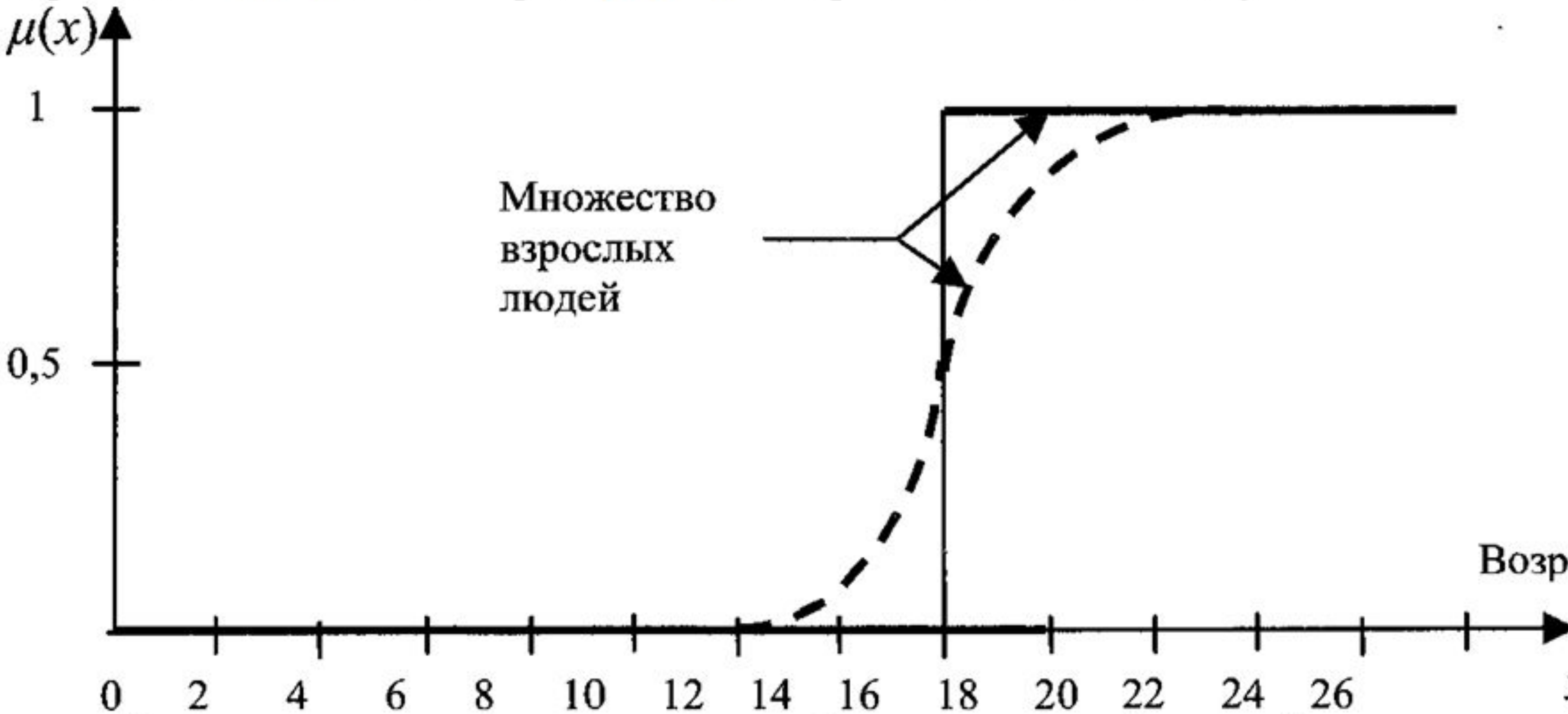
то множество «взрослых людей» *A* может быть задано с помощью выражения

$$A = \{x \mid \mu(x) = 1, x \in X\}$$

Пример

$$A = \{x \mid \mu(x) = 1, x \in X\}$$

где X — множество всех возможных значений x. Множество A образуют такие «объекты» («элементы»), для которых функция $\mu(x)$, называемая **функцией принадлежности** (*membership function*), принимает значение 1. Те значения объектной переменной $x \in X$, для которых $\mu(x) = 0$, не принадлежат множеству A.



Двузначная логика (типа «да» – «нет»), определяемая функцией принадлежности $\mu(x): X \to \{0;1\}$, не учитывает возможного разброса мнений различных субъектов относительно границ исследуемого множества A, влияния чисто биологических факторов, национальных особенностей и т.д.

Пример

- При помощи нечетких множеств можно формально определить неточные и многозначные понятия, такие как «высокая температура», «молодой человек», «средний рост» либо «большой город».

- Необходимо задать **область рассуждений** (*universe of discourse).* В случае неоднозначного понятия «много денег» большой будет признаваться одна сумма, если ограничимся диапазоном [0, 1000 руб] и совсем другая – в диапазоне [0, 1000000 руб]. Область рассуждений, называемая *пространством* или *множеством,* будет обозначаться символом **X**, где **X** – четкое множество.

Базовые определения

Определение 1.1

Нечетким множеством A в некотором (непустом) пространстве $\mathbf{X}$, что обозначается как $A \subseteq X$, называется множество пар

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\} \quad (1.1)$$

где

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

– **функция принадлежности** нечеткого множества A. Эта функция ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ степень его принадлежности к нечеткому множеству А, при этом можно выделить три случая:

1. $\mu_A(x) = 1$ – полная принадлежность элемента x к нечеткому множеству А, $x \in A$
2. $\mu_A(x) = 1$ – отсутствие принадлежности элемента x к нечеткому множеству А, $x \notin A$
3. $0 < \mu_A(x) < 1$ – частичная принадлежность элемента x к нечеткому множеству A.

Символьное описание нечетких множеств. Конечное количество элементов

1. Если X – это пространство с **конечным** количеством элементов $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, то нечеткое множество $A \subseteq X$

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=n}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \qquad (1.3)$$

Знак «/» не означает деления, а означает приписывание конкретным элементам $x_1, \dots, x_N$ степеней принадлежности $\mu_A(x_1), \dots, \mu_A(x_N)$. Запись

$$\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \; i = 1, \dots, n \qquad (1.4)$$

означает пару

$$(x_i, \mu_A(x_i)), \; i = 1, \dots, n \qquad (1.5)$$

Знак «+» в выражении (1.3) не означает операцию сложения, а интерпретируется как множественное суммирование элементов (1.5).

Подобным образом можно записывать и четкие множества. Например, множество школьных оценок можно символически представить, как

$$D = 2 + 3 + 4 + 5, \qquad (1.6)$$

что равнозначно записи

$$D = \{2, 3. 4, 5\}. \qquad (1.7)$$

Символьное описание нечетких множеств. Бесконечное количество элементов

2. Если X – это пространство с **бесконечным** количеством элементов, то нечеткое множество $A \subseteq X$ символически записывается в виде

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} dx . \tag{1.8}$$

Символьное описание нечетких множеств

Пример 1.1

Допустим, что **X = N** – множество натуральных чисел. Определим понятие множества натуральных чисел, «близких числу 7». Определим нечеткое множество $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0,2}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10} \tag{1.9}$$

Пример 1.2

Если **X = R,** где **R** - множество действительных чисел, то множество действительных чисел, «близких числу 7», можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 7)^2} \tag{1.10}$$

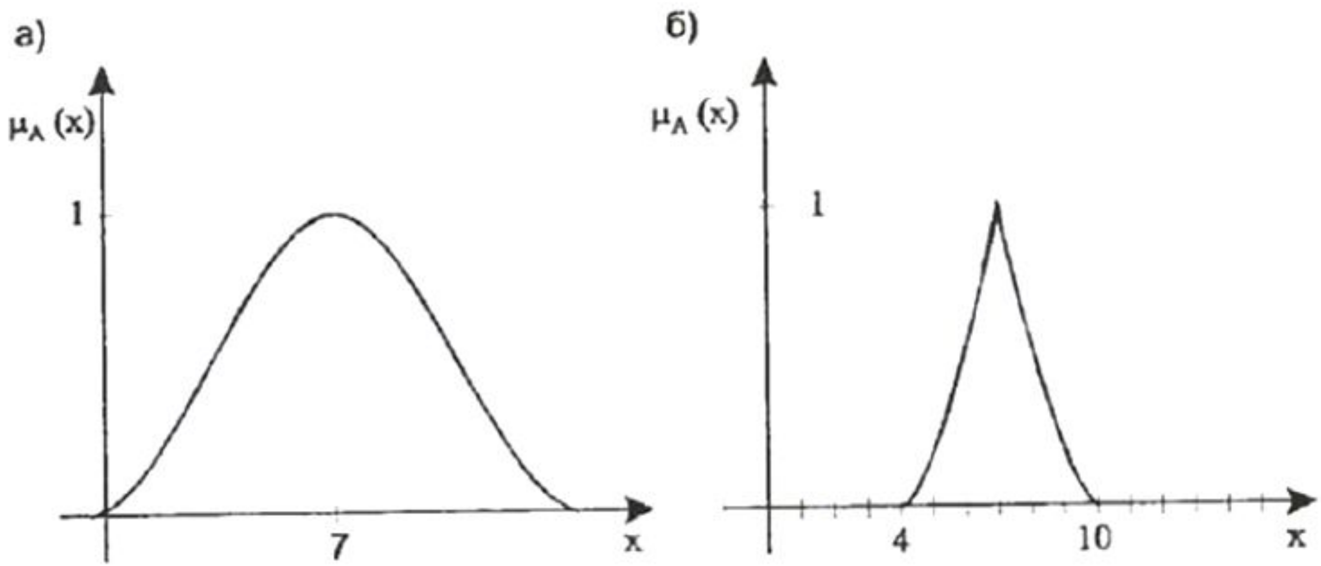
Поэтому нечеткое множество действительных чисел, «близких числу 7», описывается выражением

$$A = \int_X \frac{[1 + (x - 7)^2]^{-1}}{x}\, dx. \tag{1.11}$$

Символьное описание нечетких множеств

Нечеткие множества натуральных или действительных чисел, «близких числу 7», можно записать различными способами. Например, функцию принадлежности (1.10) можно заменить выражением

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{\dfrac{|x-7|}{3}} & \text{при } 4 \le x \le 10, \\ 0 & \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{1.12}$$



Функции принадлежности нечеткого множества действительных чисел, «близких числу 7»

Символьное описание нечетких множеств

Пример 1.3

Формализуем неточное определение «подходящая температура для купания в море». Зададим область рассуждений в виде множества X = [15°, ..., 25°]. Отдыхающий **I**, лучше всего чувствующий себя при температуре 21°, определил бы для себя нечеткое множество

$$A = \frac{0{,}1}{16} + \frac{0{,}3}{17} + \frac{0{,}5}{18} + \frac{0{,}8}{19} + \frac{0{,}95}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0{,}9}{22} + \frac{0{,}8}{23} + \frac{0{,}75}{24} + \frac{0{,}7}{25} \tag{1.13}$$

Отдыхающий **II,** предпочитающий температуру 20°, предложил бы другое определение этого множества:

$$B = \frac{0{,}1}{15} + \frac{0{,}2}{16} + \frac{0{,}4}{17} + \frac{0{,}7}{18} + \frac{0{,}9}{19} + \frac{1}{20} + \frac{0{,}9}{21} + \frac{0{,}85}{22} + \frac{0{,}8}{23} + \frac{0{,}75}{24} + \frac{0{,}7}{25} \tag{1.14}$$

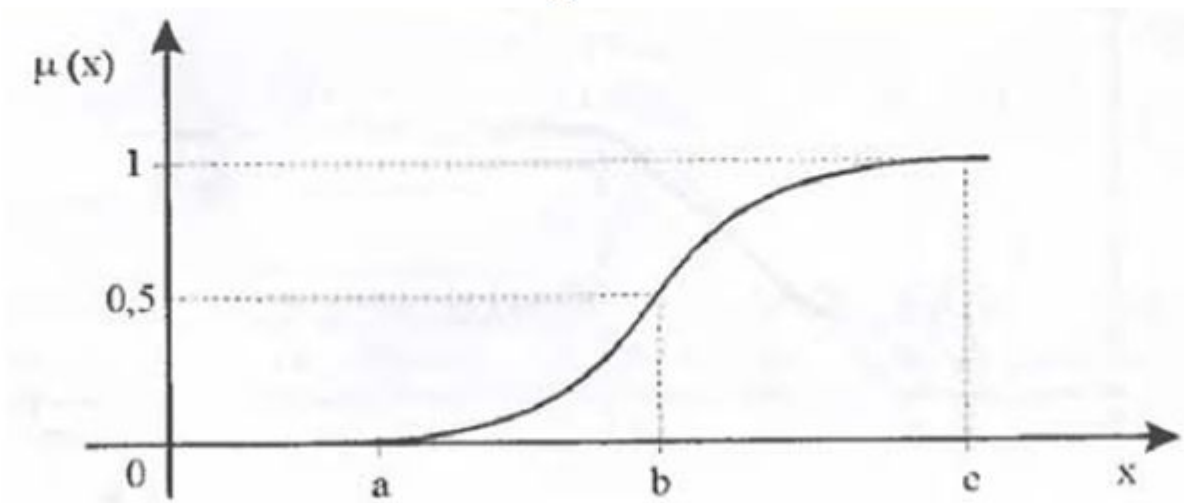
С помощью нечетких множеств *A* и *B* мы формализовали неточное определение понятия «подходящая температура для купания в море».

Стандартные формы функций принадлежности

1. **Функция принадлежности класса** s

$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x\le a\,,\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{для}\quad a\le x\le b\,,\\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{для}\quad b\le x\le c\,,\\ 1 & \text{для}\quad x\ge c\,,\end{cases} \qquad (1.15)$$

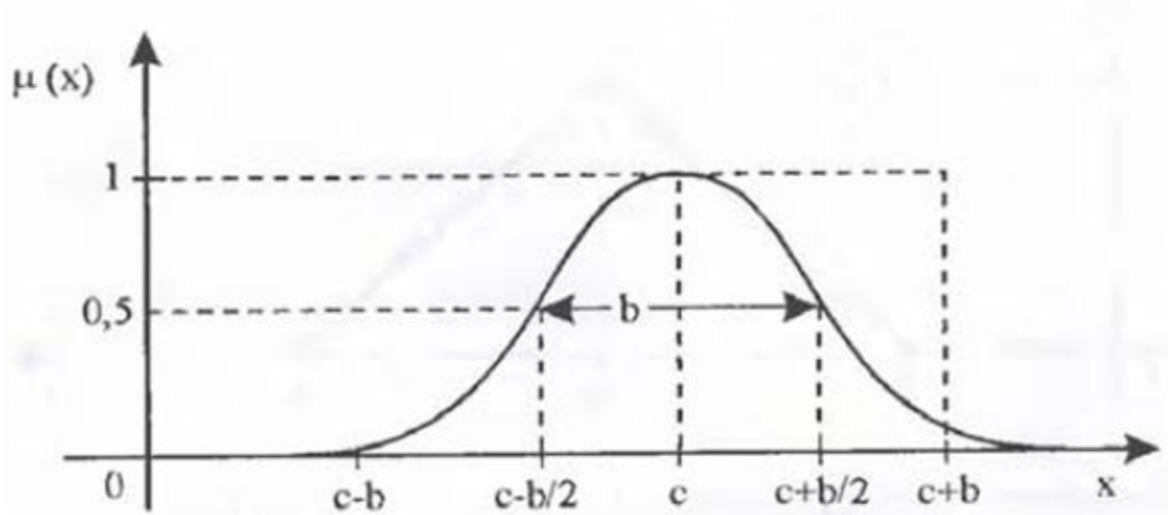
$$b=\frac{a+c}{2}$$



Стандартные формы функций принадлежности

2. **Функция принадлежности класса** π

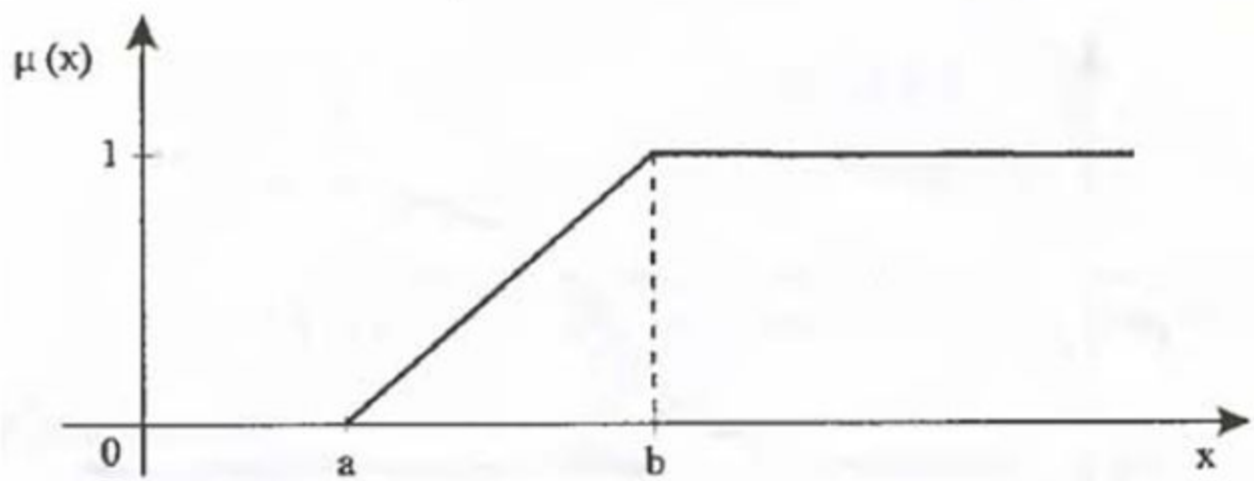
$$\pi(x; b, c) = \begin{cases} s(x; c-b, c-b/2, c) & \text{для } x \le c, \\ 1 - s(x; c, c+b/2, c+b) & \text{для } x \ge c. \end{cases} \quad (1.16)$$



Стандартные формы функций принадлежности

3. **Функция принадлежности класса** γ

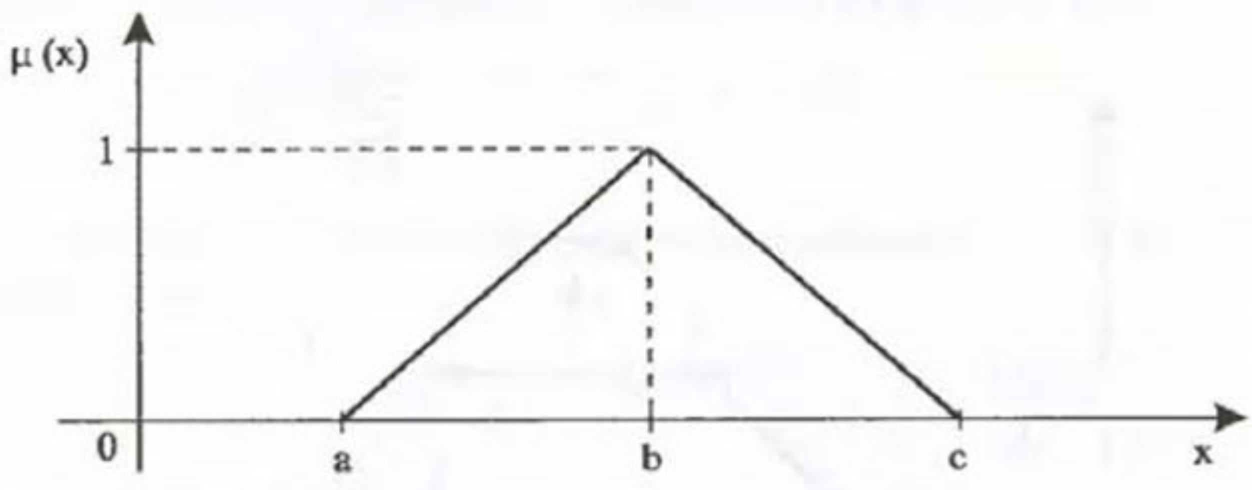
$$\gamma(x; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{для} \quad a \le x \le b, \\ 1 & \text{для} \quad x \ge b. \end{cases} \tag{1.17}$$



Стандартные формы функций принадлежности

4. **Функция принадлежности класса** t

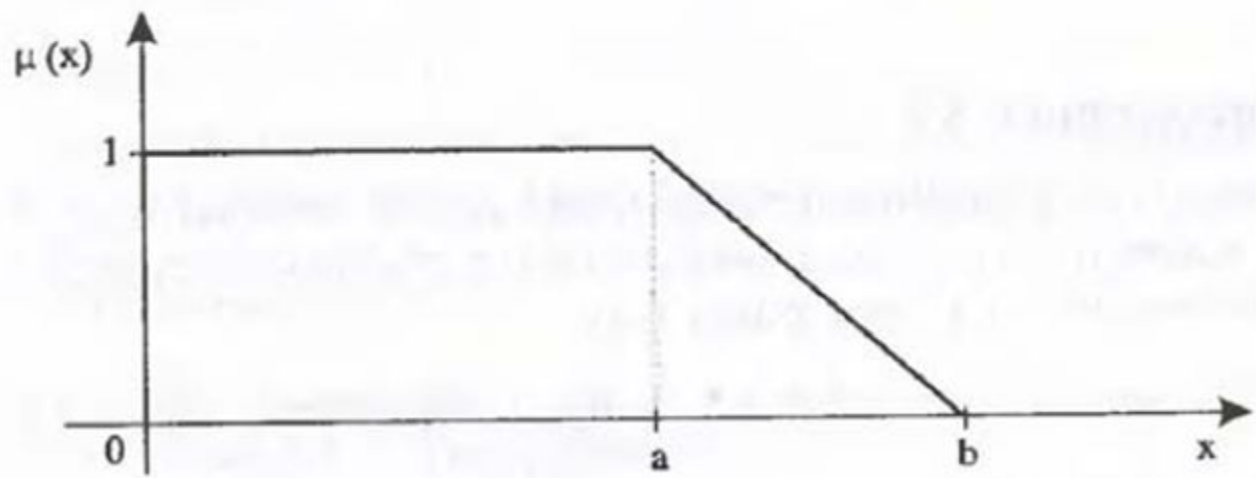
$$t(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{для} \quad a \le x \le b, \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{для} \quad b \le x \le c, \\ 0 & \text{для} \quad x \ge c. \end{cases} \qquad (1.18)$$



Стандартные формы функций принадлежности

5. **Функция принадлежности класса** L

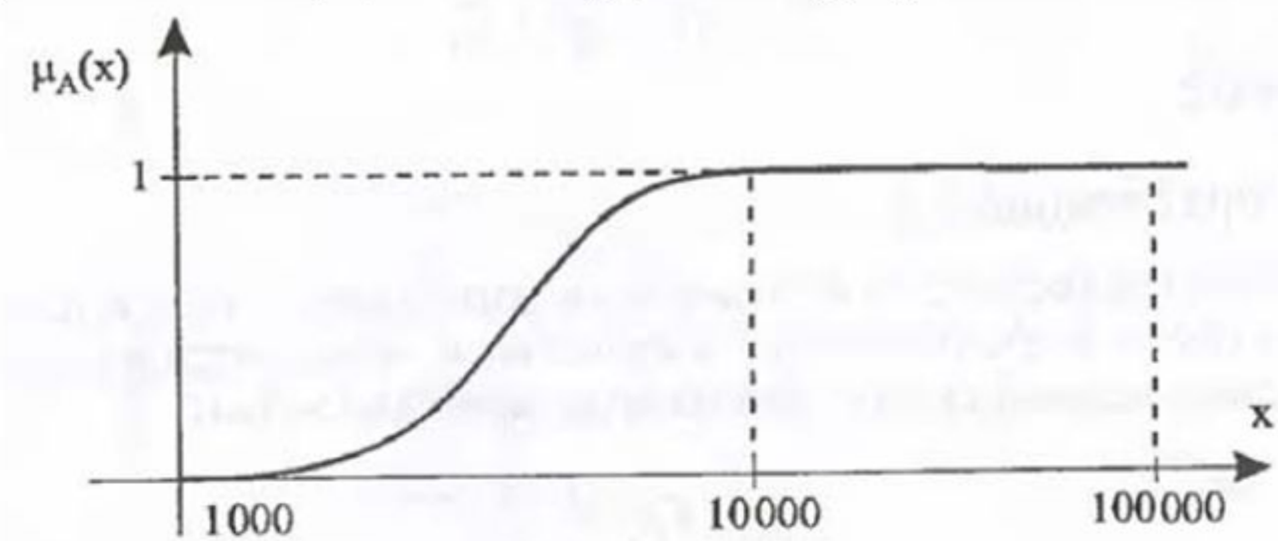
$$L(x; a, b) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \le a, \\ \dfrac{b-x}{b-a} & \text{для} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{для} \quad x \ge b. \end{cases} \tag{1.19}$$



Стандартные формы функций принадлежности. Пример про деньги

Пример 1.5

На рис. показана функция принадлежности нечеткого множества «большие деньги». Это функция класса s, причем X = [0, 100000 руб.],



a = 1000 руб., c = 10000 руб. Следовательно, суммы, превышающие 10000 руб., можно совершенно определенно считать «большими», поскольку значения функции принадлежности при этом становятся равными 1. Суммы, меньшие чем 1000 руб., не относятся к «большим», так как соответствующие им значения функции принадлежности равны 0. Конечно, такое определение нечеткого множества «большие деньги» имеет субъективный характер. Это представление будет отражаться иными значениями параметров *a* и *c* функции класса s.

Носитель и высота НМ

Определение 1.2

Множество элементов пространства X, для которых $\mu_A(x) > 0$, называется **носителем** нечеткого множества А и обозначается supp A *(support)*. Формальная его запись имеет вид

$$A = \{x \in \mathbf{X};\ \mu_A(x) > 0\}.$$

Определение 1.3

Высота нечеткого множества *A* обозначается *h(A)* и определяется как

$$h(A) = \max_{x \in A} \mu_A(x)$$

Пример 1.6

Если X = {1, 2, 3, 4, 5} и

$$A = \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}7}{4}$$

то supp A = {1, 2, 4}.

Если X = {1,2, 3, 4} и

$$A = \frac{0{,}3}{2} + \frac{0{,}8}{3} + \frac{0{,}5}{4}$$

то h(A) = 0,8.

Нормальное НМ

Определение 1.4

Нечеткое множество A называется ***нормальным*** тогда и только тогда, когда $h(A) = 1$. Если нечеткое множество A не является нормальным, то его можно нормализовать при помощи преобразования

$$\mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

где $h(A)$ - высота этого множества.

Пример 1.7

Нечеткое множество

$$A = \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}5}{4} + \frac{0{,}3}{6}$$

$h(A) = 0.5$ после нормализации принимает вид

$$A_N = \frac{0{,}2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}6}{6}$$

Пустое НМ и включения НМ

Определение 1.5

Нечеткое множество A называется ***пустым*** и обозначается $A = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 0$ для каждого $x \in X$.

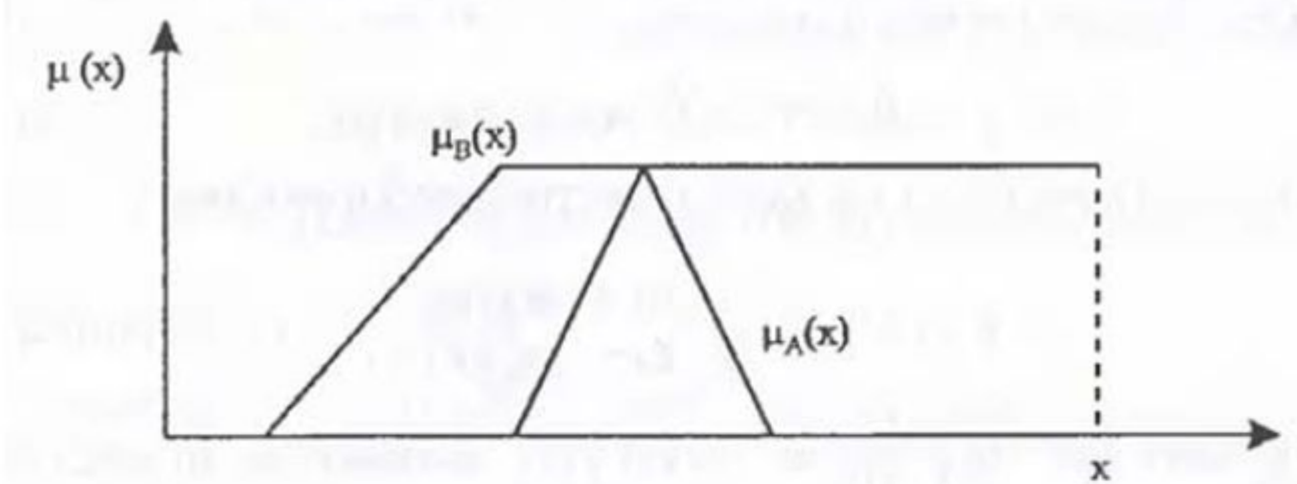
Определение 3.6

Нечеткое множество A содержится в нечетком множестве В, что записывается как $A \subset B$, тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

для каждого $x \in X$.

Пример *включения* (содержания) нечеткого множества A в нечетком множестве B иллюстрируется на рис. Степень включения нечеткого множества A в нечеткое множество B равна **1** (полное включение).

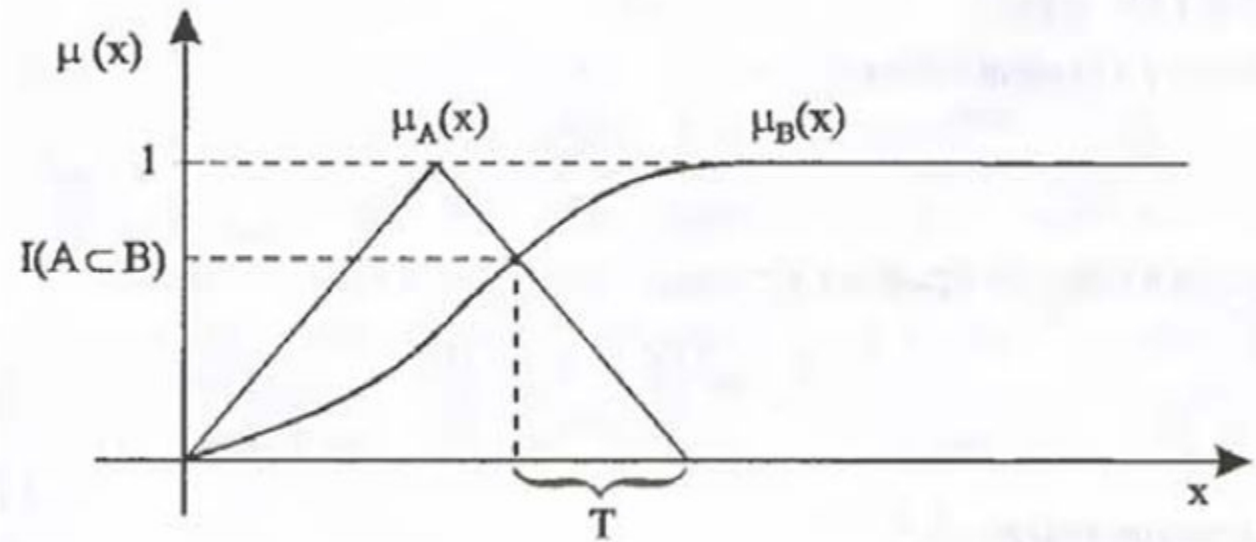


Включения НМ. Равенство НМ

Нечеткое множество A содержится в нечетком множестве B в степени

$$I(A \subset B) = \min_{x \in T} \mu_B(x), \tag{3.28}$$

где $T = \{x \in \mathbf{X};\ \mu_A(x) \le \mu_B(x),\ \mu_A(x) > 0\}$.



Определение 1.7

Нечеткое множество A равно нечеткому множеству B, что записывается как $A = B$, тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

для каждого $x \in X$.

Операции на нечетких множествах. Пересечение

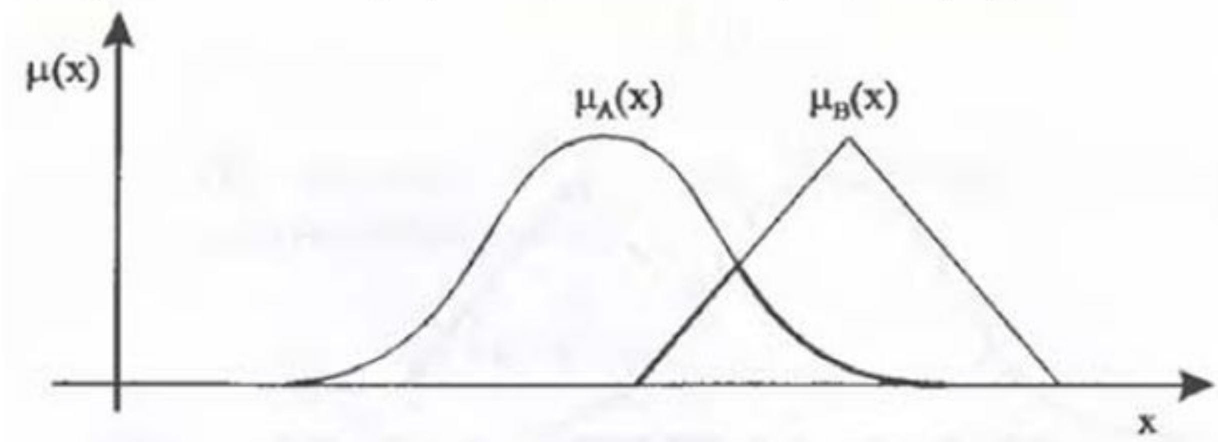
Определение 1.11

Пересечением нечетких множеств $A, B \subseteq X$ называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

для каждого $x \in X$.

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис.



Пересечение нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{A_i}(x) = \min[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)]$$

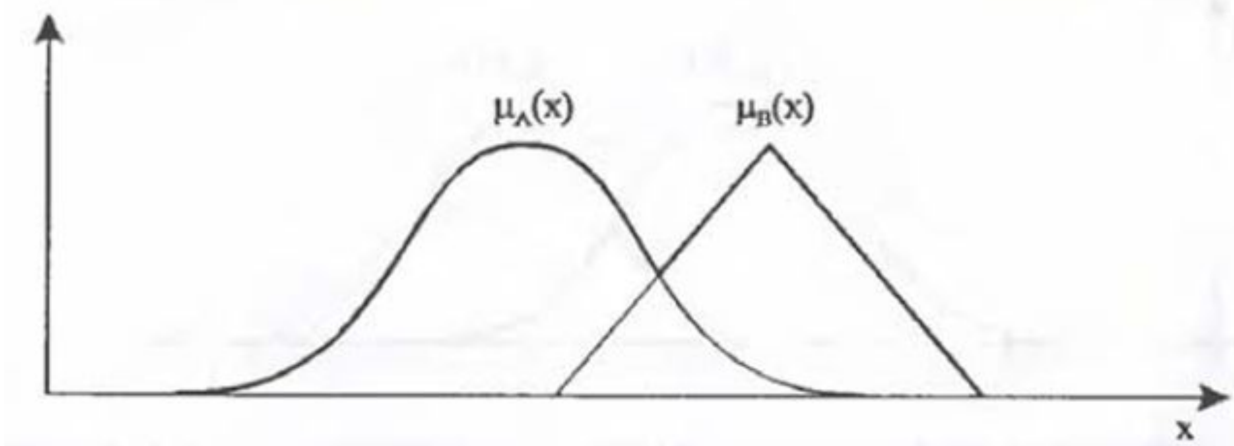
Операции на нечетких множествах. Сложение

Определение 1.12

Сумма нечетких множеств A и В - нечеткое множество С = A и В, определенное функцией принадлежности

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

для каждого $x \in X$.



Функция принадлежности суммы нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ выражается зависимостью

$$\mu_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}(x) = \bigcup_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x) = \max[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)]$$

Операции на нечетких множествах. Сложение, пересечение на примере

Пример 3.9

Допустим, что X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$$A = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6}$$

$$B = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6}$$

$$A \cap B = \frac{0,7}{3} + \frac{0,4}{6}$$

$$A \cup B = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,6}{6}$$

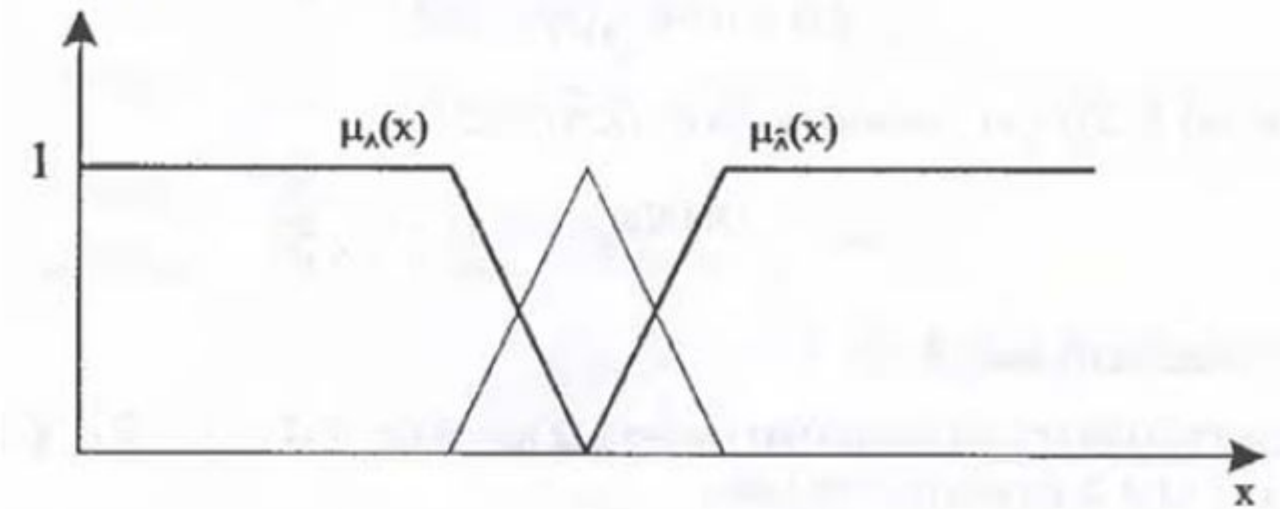
Операции на нечетких множествах. Дополнение НМ

Определение 1.3

Дополнением нечеткого множества $A \subseteq X$ называется нечеткое множество $\hat{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

для каждого $x \in X$.



Операции на нечетких множествах. Дополнение НМ на примере

Пример 1.11

Допустим, что X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, а также

$$A = \frac{0{,}3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}9}{6}$$

В соответствии с определением 1.13 дополнением множества A считается множество

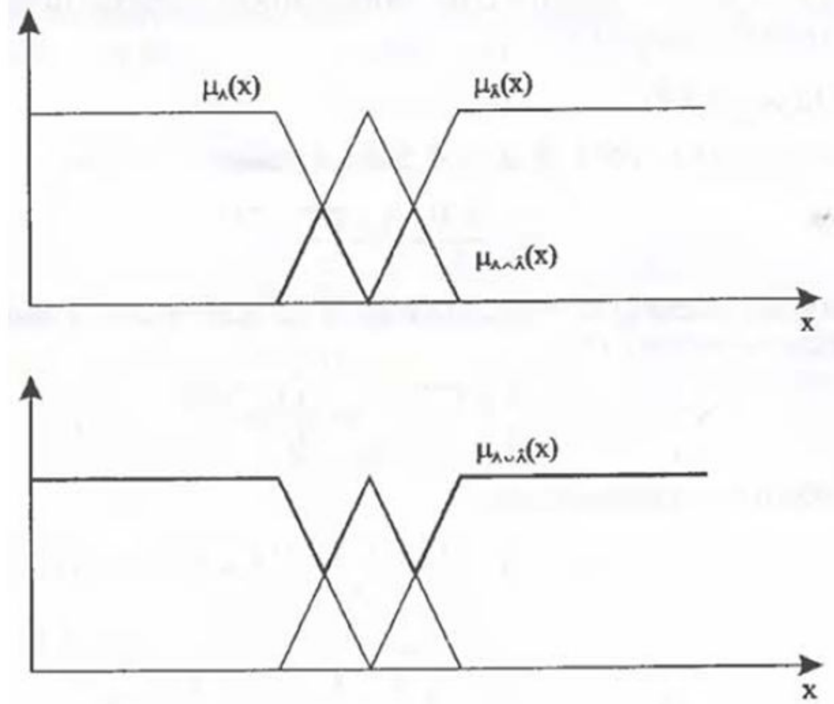
$$\hat{A} = \frac{1}{1} + \frac{0{,}7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}3}{5} + \frac{0{,}1}{6}$$

Обратим внимание, что

$$A \cap \hat{A} = \frac{0{,}3}{2} + \frac{0{,}3}{5} + \frac{0{,}1}{6} \neq \varnothing ,$$

$$A \cup \hat{A} = \frac{1}{1} + \frac{0{,}7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}9}{6} \neq X .$$

Операции на нечетких множествах. Дополнение НМ на примере - курьез



$$A \cap \hat{A} \neq \varnothing ,$$

$$A \cup \hat{A} \neq X.$$

Функция принадлежности пересечения нечетких множеств A и $\hat{A}$ отвечает неравенству

$$\mu_{A\cap\hat{A}}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\hat{A}}(x)) \leq \frac{1}{2}$$

Аналогично в случае суммирования получаем

$$\mu_{A\cup\hat{A}}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_{\hat{A}}(x)) \geq \frac{1}{2}$$

Операции на нечетких множествах. Концентрация = «Очень»

Определение 1.15

Концентрация нечеткого множества $A \subseteq X$ обозначается $CON(A)$ и определяется как

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$$

для каждого $x \in X$.

В естественном языке применение этой операции к тому или иному значению лингвистической переменной соответствует использованию усиливающего терма «очень» (например, «очень высокий», «очень старый» и т.д.).

Операции на нечетких множествах. Разбавление = «Не очень»

Определение 1.16

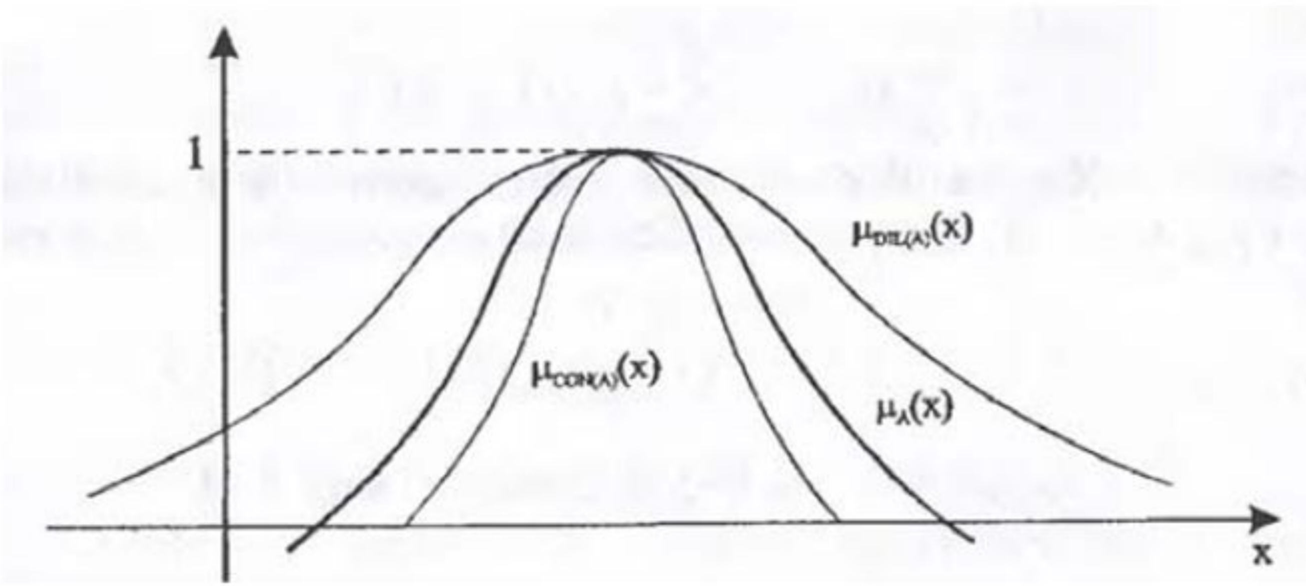
Разбавление нечеткого множества $A \subseteq X$ обозначается DIL(A) и определяется как

$$\mu_{DIL\,(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0,5}$$

для каждого $x \in X$.

Действие операции противоположно действию операции концентрации и соответствует неопределенному терму «довольно», выполняющему функцию ослабления следующего за ним (основного) терма А: «довольно высокий», «довольно старый» и т.п.

Операции на нечетких множествах. Концентрация - разбавление



Терм «более чем» можно определить следующим образом:

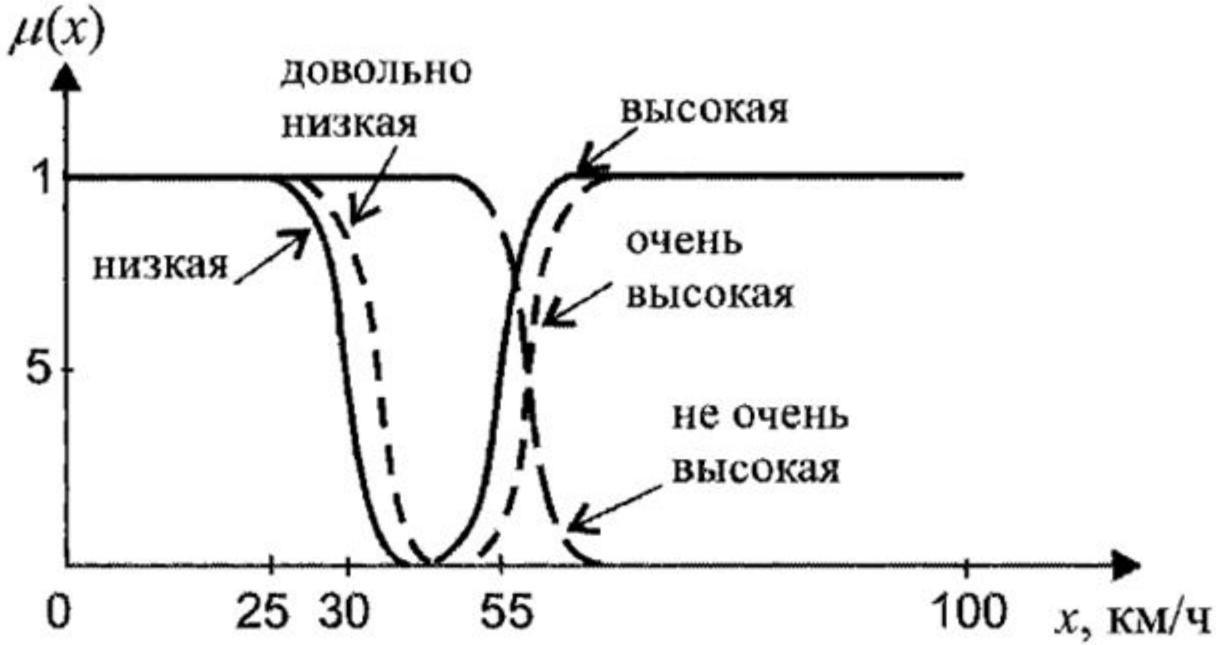
$$\text{«более чем } A\text{»} = \{(x,\ \mu_A(x)^{1,25}) \mid x \in X\},$$

составной терм «очень-очень»:

$$\text{«очень очень А»} = CON(CON(A)) = \{(x,\ \mu^4{}_A(x)) \mid x \in X\},$$

Операции на нечетких множествах Пример

Рассмотрим применение указанных операций на следующем примере. Пусть переменная x характеризует «скорость автомобиля», X - интервал [0,100]. Тогда нечеткие подмножества, описываемые термами «низкая» и «высокая», можно представить с помощью функций принадлежности:



Операции на нечетких множествах Пример

$$\mu_{\text{низкая}}(x)=\begin{cases}1, & \text{для } 0\le x\le 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{для } 25\le x\le 100.\end{cases}$$

$$\mu_{\text{высокая}}(x)=\begin{cases}0, & \text{для } 0\le x\le 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{для } 50\le x\le 100.\end{cases}$$

$$\mu_{\text{очень высоких}}(x)=\begin{cases}0, & \text{для } 0\le x\le 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2}, & \text{для } 50\le x\le 100.\end{cases}$$

$$\mu_{\text{не очень высокая}}(x)=\begin{cases}1, & \text{для } 0\le x\le 50,\\ \left[1-\left(1+\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2}, & \text{для } 50\le x\le 100,\end{cases}$$

$$\mu_{\text{довольно низкая}}(x)=\begin{cases}1, & \text{для } 0\le x\le 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-0,5}, & \text{для } 25\le x\le 100.\end{cases}$$

Треугольные нормы. *S*- и Т-нормы

Пересечение нечетких множеств можно задать в более общем виде как

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) ,$$

где функция T – это так называемая **T-норма**. Поэтому

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

можно считать примером действия T-нормы. Аналогично, сумму нечетких множеств можно определить следующим образом:

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) ,$$

где функция S – это так называемая **S-норма**.

В этом случае

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

можно считать примером действия S-нормы. T- и S-нормы относятся к классу так называемых треугольных норм. Мы будем многократно применять их в последующем, причем не только для определения операций пересечения и суммирования нечетких множеств.

Треугольные нормы. S- и Т-нормы

Каждой Т-норме соответствует своя S-норма. Зависимость между ними выражается равенством

$$S(\mu_A, \mu_B) = 1 - T(1 - \mu_A,\ 1 - \mu_B,),$$

поэтому S-норму часто называют *Т-конормой*, или дополняющей нормой.

Некоторые наиболее распространенные способы задания Т- и S-норм приведены в табл.

T-норма	*S*-норма
1. Минимум: $\min\{\mu_A, \mu_B\}$	Максимум: $\max\{\mu_A, \mu_B\}$
2. Алгебраическое произведение: $\mu_A \mu_B$	Алгебраическая сумма: $\mu_A + \mu_B - \mu_A \mu_B$
3. Произведение Лукасевича: $\max\{0, \mu_A + \mu_B - 1\}$	Сумма Лукасевича: $\min\{1, \mu_A + \mu_B\}$
4. Произведение Эйнштейна: $\mu_A \mu_B / [1 + (1 - \mu_A)(1 - \mu_B)]$	Сумма Эйнштейна: $1 - (1 - \mu_A)(1 - \mu_B)/(1 + \mu_A \mu_B)$
5. Произведение Гамахера: $\mu_A \mu_B / [1 - (1 - \mu_A)(1 - \mu_B)]$	Сумма Гамахера: $1 - (1 - \mu_A)(1 - \mu_B)/(1 - \mu_A \mu_B)$