



Производная



Содержание:

- Приращение функции
- Понятие о производной
- Определение производной
- Правила вычисления производной
- Производная сложной функции
- Производные тригонометрических функций



Приращение функции.

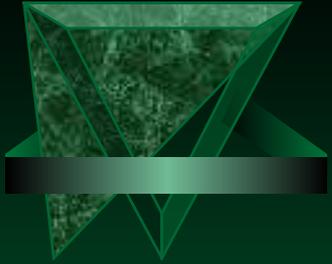
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение, при Δx , стремящемся к нулю.

Кон
ец.



Понятие о производной.

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \Delta y / \Delta x = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 / \Delta x = x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \\ &+ \Delta x^2 - x_0^2 / \Delta x = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 / \Delta x = 2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0 \end{aligned}$$



0

Наз
ад



Определение производной.

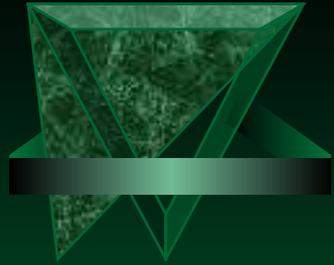
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f(x)$ -дифференцируема

$$c' = 0; x' = 1; (c x)' = c (x)' = c$$

Далее.



Правило вычисления производных.

$$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}'$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v}'$$

$$(\mathbf{u} / \mathbf{v})' = (\mathbf{u}' \mathbf{v} - \mathbf{u} \mathbf{v}') / \mathbf{v}^2$$

$$(\mathbf{x}^n)' = n \mathbf{x}^{n-1}$$

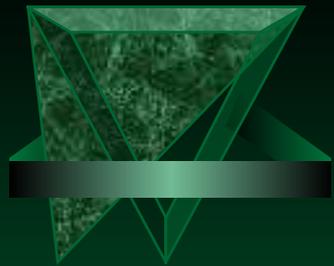


Производная сложной функции.

$$h(x) = g(f(x))$$

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Дале
е.



Производные тригонометрических функций.

$$(\sin x)' = \cos x$$

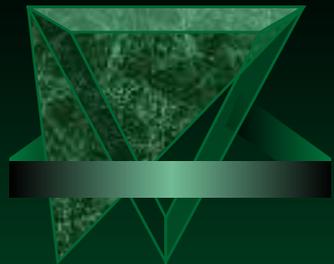
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$$

$$h(x) = g(f(x))$$

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$



Дифференцирование.

Функцию, имеющую производную в точке x_0 называют дифференцируемой в этой точке. Пусть D_1 -множество точек, в которых функция f дифференцируема. Сопоставляя каждому $x \in D_1$ число $f'(x)$, получим новую функцию с областью определения D_1 . Эта функция называется производной функции

$y = f(x)$. Мы получаем формулы $(x^3)' = 3x^2$
 $(x^2)' = 2x$, $(kx + b)' = k$. В формуле $k=0$, $b=C$
где C произвольная постоянная получаем
что $C' = 0$, производная постоянная равна нулю.



Приращение функции.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 значениями этой функции в различных

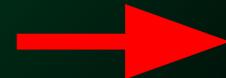
Точках x лежащих в окрестности x_0 , удобно выражать разность $f(x) - f(x_0)$

Через разность $x - x_0$, пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции».

$$\Delta x = x - x_0 \rightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

Вследствие этого функции f изменится на

$$\text{Величину } f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$





Приращение функции.

Эта разность называется приращением
Функции f в точке x_0 соответствующим
приращению Δx , и обозначается Δf ,
Т.е. по определению $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,
откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

Обратите внимание : при фиксированном x_0
Приращение Δf есть функция от Δx .

Δf называют также приращением зависимой
Переменной и обозначают через Δy для функции
 $y = f(x)$.

ДА
ЛЬ
ШЕ



Производная сложной функции

Если функция f имеет производную в точке x_0 , а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная

функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.





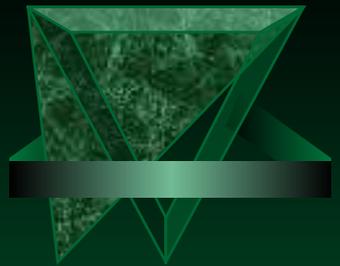
Приращение функции.

Пример 1. Найдем приращения Δx и Δf в точке x_0 , если $f(x) = X^2$, А) $X_0 = 2$ и: $X = 1,9$;

$$\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = - 0,1;$$

$$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = - 0,39$$

[НАЗАД](#)



Производная сложной функции.

Пример 1. Найдем производную функции

$$h(x) = (2x+3)^{100}$$

Функцию h можно представить в виде сложной функции

$$h(x) = g(f(x)), \text{ где } g(y) = y^{100}, y = f(x) = 2x+3.$$

Так как $f'(x) = 2$ и $g'(y) = 100y^{99}$, имеем

$$h'(x) = 2 \cdot 100y^{99} = 200(2x+3)^{99}$$



Правила вычисления производных.

Правило 1. Если функции U и v дифференцируемые в точке x_0 , то их сумма дифференцируема в этой точке и производная суммы равна сумме производных.

$$(U + v)' = U' + v'.$$

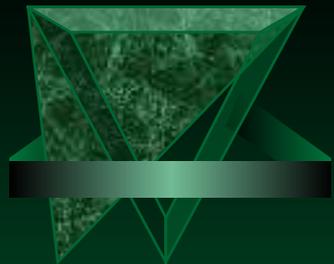
Правило 2. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их произведение дифференцируемо в этой точке $(u v)' = u' v + u v'$.

Правило 3. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке то

Частное u/v также дифференцируемо в x_0 и

$$(u/v)' = (u' v - u v')/v^2.$$





Правила вычисления производных.

Пример 1. Найдем производные функций:

$$A) f(x) = x^2 - 1/x$$

$$(1/x)' = -x'/x^2 = -1/x^2, \text{ поэтому } (x^2 - 1/x)' = \\ = (x^2)' - (1/x)' = 2x - (-1/x^2) = 2x + 1/x^2$$

Кон
ец.



Производные тригонометрических функций.

Формула производной синуса. Докажем, что функция синуса имеет производную в любой точке и $(\sin x)' = \cos x$.

Применяя формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

Находим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \cos(x_0 + \Delta x/2) \sin \Delta x/2}{\Delta x} = \\ &= \sin \Delta x/2 / \Delta x/2 \cos(x_0 + \Delta x/2). \end{aligned}$$





Производные тригонометрических функций.

Для вывода формулы достаточно показать, что

а) $\sin \Delta x / 2 / \Delta x / 2 \rightarrow 1$ при $\Delta x \rightarrow 0$;

б) $\cos(x_0 + \Delta x / 2) \rightarrow \cos x_0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

Опираясь на эти утверждения, можно получить формулу. Действительно, при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0 + \Delta x / 2) - \sin x_0}{\Delta x} &= \frac{\sin \Delta x / 2}{\Delta x / 2} \cdot \cos \rightarrow \\ &\rightarrow 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0. \end{aligned}$$

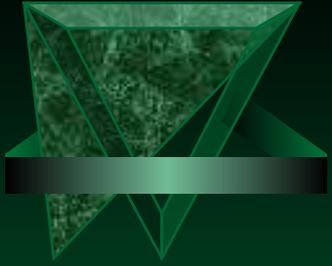
Кон
ец.



Формула приближенного вычисления.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$



Производная в физике и технике.

$$V_{\text{ср}}(\Delta t) = \Delta x / \Delta t \rightarrow v(t_0)$$

$$\Delta x / \Delta t \rightarrow x'(t_0)$$

$$V(t) = x'(t)$$

$$a = v'(t)$$



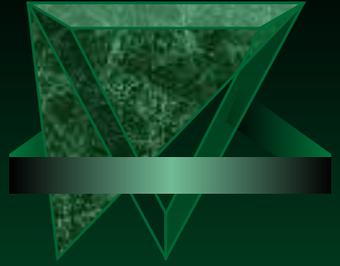
Метод интервалов.

$$1 f' \Leftrightarrow \Delta f \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow (a) \text{ при } x \rightarrow a$$

$$f' \Rightarrow f$$

$$2 f' = 0 \text{ и } f \neq 0 \Rightarrow (\pm \text{cons})$$



Метод интервалов.

$$Y = kx + b \quad A(x_0; f(x_0))$$

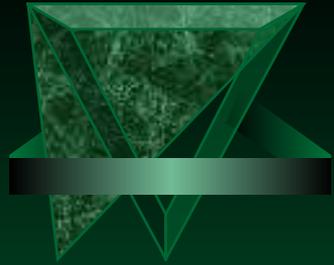
$$Y = f'(x) \cdot x + b$$

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$Y = f'(x_0) x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

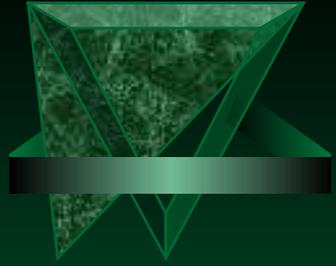


Касательная к графику функции.

$$k=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$$

$$f'(x_1)>0; f'(x_2)=0; f'(x_3)<0$$

$$f'(x_1)=1; f'(x_2)=0; f'(x_3)=-1$$



Касательная к графику функции.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$