Действительные числа

Л. А. Янкина,

канд. пед. наук, доцент

1. **Понятие иррационального числа**
2. **Построение отрезка заданной длины**
3. **Понятие положительного действительного числа**
4. **Действия над действительными числами**
5. **Геометрическая интерпретация множества действительных чисел**

Понятие иррационального числа

При измерении длины отрезка a при единичном отрезке e могут возникнуть следующие ситуации:

1. Единичный отрезок e укладывается в отрезке a целое число раз (n раз):

$$m_e(a) = n \text{ или } a = ne$$

Длина отрезка a при единице длины e выражается натуральным числом n

Отрезки a и e в этом случае называются соизмеримыми

2. Единичный отрезок е не укладывается в отрезке а целое число раз. Разобьем отрезок е на n равных частей и выберем в качестве единицы длины n-ную часть отрезка е:

$$m_{e1}(e) = n \text{ или } e = ne_1,\ e_1 = \frac{1}{n}e$$

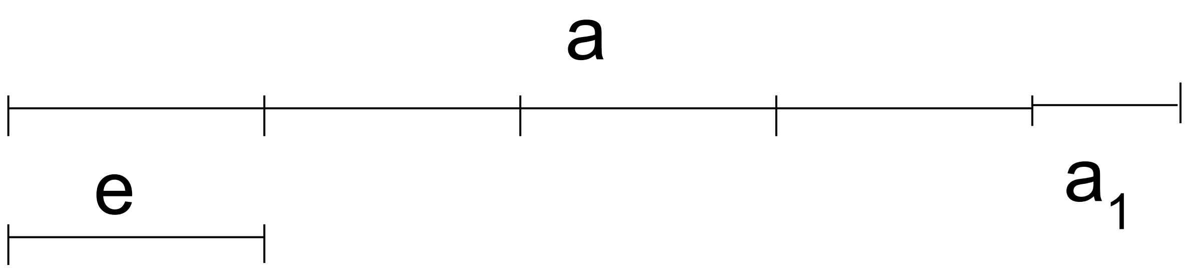
Если n-ная часть отрезка е укладывается в отрезке а целое число раз (m раз), то

$$m_e(a) = \frac{m}{n} \text{ или } a = \frac{m}{n}e$$

Длина отрезка а выражается парой натуральных чисел (m; n)

3. Единичный отрезок е и любая его часть не укладывается в отрезке а целое число раз, т. е. его длину нельзя выразить ни натуральным числом, ни обыкновенной дробью. Длины таких отрезков выражаются иррациональными числами.

Рассмотрим процесс измерения длины отрезка



$$ne < a < (n+1)\ e$$

n и **n+1** **есть** **приближенные значения длины отрезка а при единице длины е *с недостатком* и *с избытком* с точностью *до единицы***

$$e_1 = \frac{1}{10}e \Rightarrow$$

Будем укладывать e_1 в отрезке a_1

1) отрезок e_1 уложился в отрезке a_1 точно n_1 раз. Тогда длина отрезка a выражается конечной десятичной дробью: $a = ne + \frac{n_1}{10}e = \left(n + \frac{n_1}{10}\right)e = n, n_1 e$. Например, $a = 3{,}4e$.

2) Отрезок a_1 состоит из n_1 отрезков e_1 и отрезка a_2, который короче e_1.

Тогда $n,n_1 e < a < n,n_1' e$, где $n_1' = n_1 + 1$

n,n_1 и n,n_1' - приближенные значения длины отрезка а *с недостатком* и *с избытком* с точностью до 0,1.

Процесс десятичного измерения длины отрезка a можно продолжить, взяв новый единичный отрезок $e_2 = \frac{1}{100} e$.

Если представить процесс десятичного измерения длины отрезка в идеале, то возможны два исхода:

1) На некотором k-м шагу процесс измерения окончится. Тогда длина отрезка а выразится *конечной* десятичной дробью вида $n,n_1n_2 \ldots n_к$

2) Описанный процесс измерения длины отрезка бесконечен. Длина отрезка а выражается *бесконечной* десятичной дробью $n,n_1n_2 \ldots n_к\ldots$

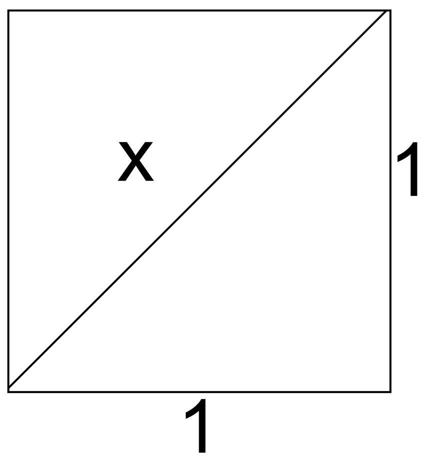
Итак в процессе десятичного измерения длин отрезков могут получаться бесконечные десятичные дроби. Это могут быть бесконечные десятичные *периодические* дроби:

5,33… = 5,(3) = $5\frac{3}{9} = 5\frac{1}{3}$

3,4(6) = 3 $\frac{46-4}{90} = 3\frac{42}{90} = 3\frac{7}{15}$

Бесконечные десятичные периодические дроби являются рациональными числами (они могут быть представлены в виде обыкновенных дробей)

В VI в. до н.э. в школе Пифагора, где была поставлена и решена <u>задача</u>: существует ли рациональное число, выражающее длину диагонали квадрата со стороной, равной 1?



Если за единицу длины взять сторону квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Доказать, что $x \notin Q_+$

Доказательство («от противного»)

Пусть $x \in Q_+ \Rightarrow x = \dfrac{m}{n}$ - *несократимая* дробь

$x^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ – четное $\Rightarrow$

m – четно, т. е. $m = 2k$, $k \in N \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow$

$2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ – четное $\Rightarrow n$ – четное $\Rightarrow$

$\dfrac{m}{n}$ - *сократимая* дробь $\Rightarrow$ *противоречие*

$$\sqrt{2} \notin Q_+$$

$\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}_+$ $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}_+$

Доказательство аналогично

Иррациональным числом **называется** ***бесконечная десятичная непериодическая дробь***

$$\mathbf{n,n_1n_2 \ldots n_к \ldots}$$

Множество положительных иррациональных чисел обозначают $\mathbf{I}_+$

К понятию иррационального числа можно прийти не только через процесс десятичного измерения длин отрезков, но при выполнении некоторых действий (извлечение корня из некоторых рациональных чисел, логарифмирование и др.)

$\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\boldsymbol{lg5}$, $sin31^{\circ}$, π = **3,14… и** е = **2,78…- иррациональные числа**

Покажем, как вводятся иррациональные числа на примере извлечения квадратного корня из числа 2: $\sqrt{2}$

$1^2 < 2 < 2^2$ $\qquad$ $1 < \sqrt{2} < 2$

$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ $\qquad$ $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

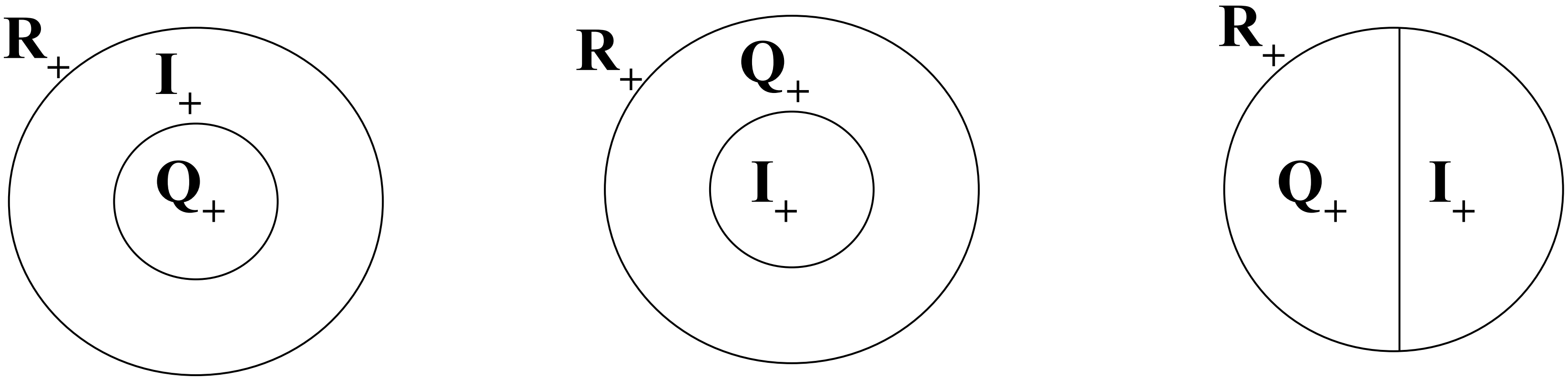
$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ $\qquad$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$ $\qquad$ $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

и т. д.

$\sqrt{2}$ **= 1,414…**

Понятие положительного действительного числа



$$Q_+ \cup I_+ = R_+$$

Любое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью – *периодической* (если оно является рациональным) и *непериодической* (если оно иррационально)

$$a = n,n_1n_2 \ldots n_к \ldots$$

ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВЕ R_+

$$x = n,n_1n_2 \ldots n_к\ldots$$
$$y = m,m_1m_2 \ldots m_к\ldots$$

$x < y$, если $n < m$,

или существует такое k, что $n = m$, $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, … , $n_{к-1} = m_{к-1}$, $n_к < m_к$

Два положительных действительных числа считаются равными, если их десятичные представления одинаковы

$$(\forall\ x, y \in R)\ x = y,\ x < y,\ x > y$$

$a = n,n_1n_2 \ldots n_к\ldots$ - некоторое действительное число

$a_к = n,n_1n_2 \ldots n_к$ – приближенное значение числа а *__по недостатку__* с точностью до $\dfrac{1}{10^к}$

(получается если взять целую часть числа и первые k цифр после запятой, а все остальные цифры отбросить)

$a'_к = n,n_1n_2 \ldots n'_к$ – приближенное значение

числа a ***по избытку*** с точностью до $\dfrac{1}{10^к}$

(получается если в числе $a_к = n,n_1n_2 \ldots n_к$

увеличить последнюю цифру на 1)

Пример: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

$a_1 = 1{,}4$ $a'_1 = 1{,}5$

$a_2 = 1{,}41$ $a'_2 = 1{,}42$

$a_3 = 1{,}414$ $a'_3 = 1{,}415$

$$(\forall\ a \in R)\ a_к \le a < a'_к$$

Любое действительное число разбивает множество рациональных чисел на два подмножества $\{a_к\}$ и $\{a'_к\}$, причем $\{a_к\}$ никогда не достигает своей верхней границы a (если $a \in I_+$), $\{a'_к\}$ – своей нижней границы

$$\{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots\} \le \sqrt{2} < \{2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots\}$$

$a_к = НГ_а$ – нижняя граница числа а

$a'_к = ВГ_а$ – верхняя граница числа а

Основные свойства десятичных приближений числа а:

1) Любая НГ данного действительного числа а меньше любой ВГ этого числа: $a_к < a'_р$.

2) Любая ВГ данного действительного числа а больше любой НГ этого числа: $a'_к > a_р$.

3) С увеличением порядка приближений данного действительного числа разность между верхней и нижней границами его десятичных приближений неограниченно уменьшается (стремится к 0)

ДЕЙСТВИЯ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Пусть даны действительные числа

a и b

$a_к$ и $b_к$ – их приближенные значения по недостатку,

$a_к´$ и $b_к´$ – их приближенные значения по избытку.

Тогда для любого $k \in N$

$$a_к \le a < a_к´, \quad b_к \le b < b_к´$$

Суммой положительных действительных чисел a и b называется такое число $a + b$, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$$a_к + b_к \le a + b < a_к' + b_к'$$

Пример: Найти три первых десятичных знака суммы $a = \frac{1}{3}$, $b = 1,57079\ldots$

$$a = 0,33333\ldots$$

$$a_4 = 0,3333; \quad a_4' = 0,3334$$

$$b_4 = 1,5707; \quad b_4' = 1,5708$$

$$a_4 + b_4 = 1,9040; \quad a_4' + b_4' = 1,9042$$

$a + b = 1,904$ с точностью до $0,001$

ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ

Сложение во множестве R_+

коммутативно:

$$(\forall\ a, b \in R_+)\ a + b = b + a;$$

ассоциативно:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ (a + b) + c = a + (b + c)$$

сократимо:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

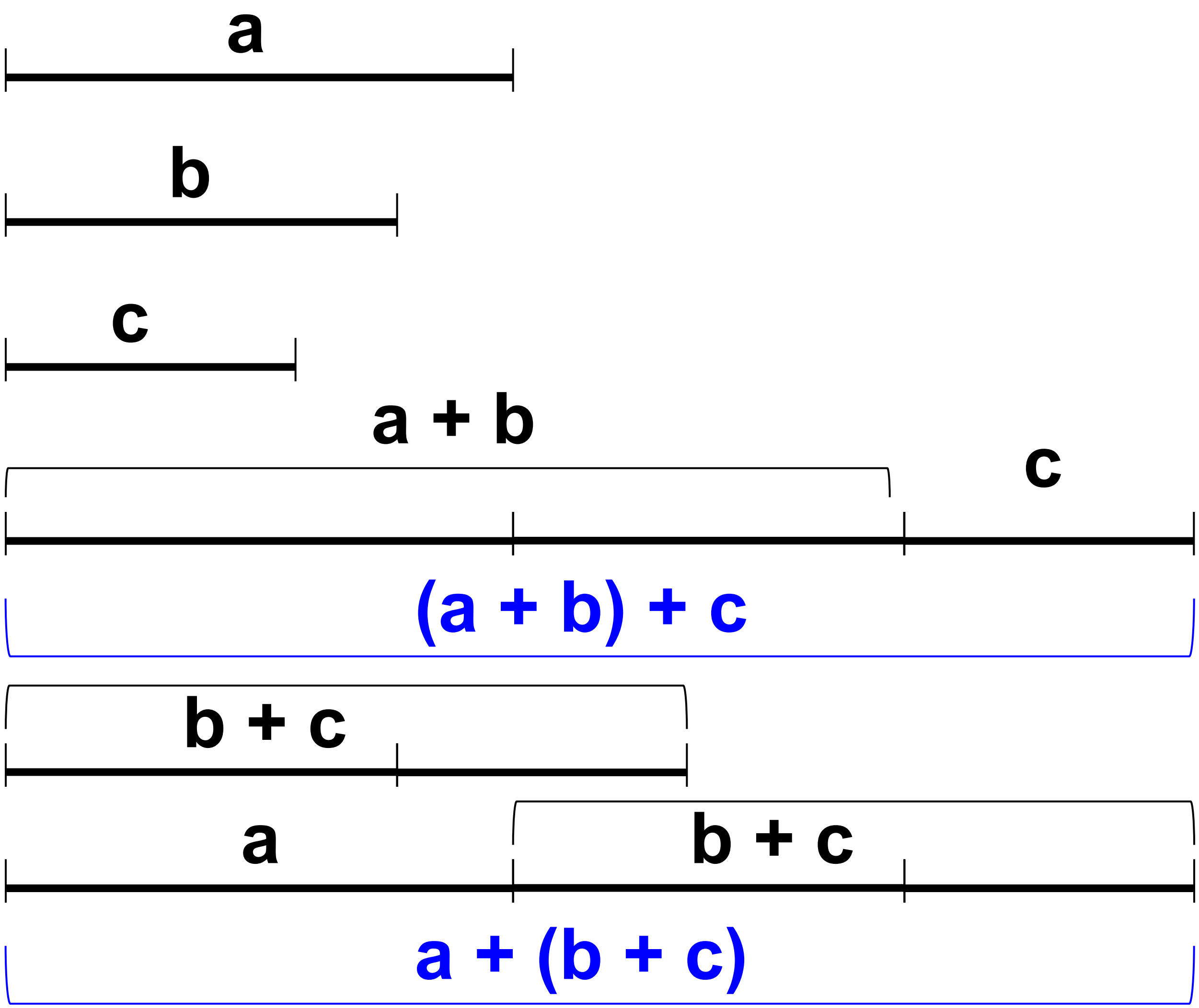
монотонно:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

$$(\forall\ a, b \in R_+)\ a + b \neq a$$

Ассоциативный закон сложения

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ \ (a + b) + c = a + (b + c)$$



Произведением положительных действительных чисел a и b называется такое число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$$a_к \cdot b_к \leq a \cdot b < a_к' \cdot b_к'$$

<u>Пример</u>: Найти произведение $\sqrt{2} \cdot \pi$ с точностью до 0,1

$$\sqrt{2} = 1{,}4142$$

$$1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$3{,}14 \le \pi < 3{,}15$$

$$4{,}4274 \le \sqrt{2} \cdot \pi < 4{,}473$$

$\sqrt{2} \cdot \pi$ < 4,4 с точностью до 0,1

ЗАКОНЫ УМНОЖЕНИЯ

1) **коммутативность**: $(\forall\ a, b \in R_+)\ a \cdot b = b \cdot a$

2) **ассоциативность**:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3) **дистрибутивность относительно сложения и вычитания**:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c\ (a \geq b)$$

4) **сократимость**:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$$

5) **монотонность**:

$$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ \ a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

6) **нейтральность числа 1 относительно умножения**: $(\forall\ a \in R_+)\ a \cdot 1 = a$

Дистрибутивный закон умножения относительно сложения

$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Доказательство

$(\forall\ a, b, c \in R_+)\ (\forall\ k \in N)\ \ \{a_к\} \leq a < \{a_к´\},$

$\{b_к\} \leq b < \{b_к´\}, \qquad \{c_к\} \leq c < \{c_к´\}$

$\{a_к\}, \{b_к\}, \{c_к\}$ – десятичные приближения по недостатку,

$\{a_к'\}, \{b_к'\}, \{c_к'\}$ - десятичные приближения по избытку

Рациональные числа

$$\{(a_к + b_к)\cdot c_к\} \le (a + b)\cdot c < \{(a_к' + b_к')\cdot c_к'\}$$

$$\{a_к\cdot c_к + b_к\cdot c_к\} \le a\cdot c + b\cdot c < \{a_к'\cdot c_к' + b_к'\cdot c_к'\}$$

В Q_+ $(a_к + b_к)\cdot c_к = a_к\cdot c_к + b_к\cdot c_к$,

$$(a_к' + b_к')\cdot c_к' = a_к'\cdot c_к' + b_к'\cdot c_к' \Rightarrow$$

$$\{(a_к + b_к)\cdot c_к = a_к\cdot c_к + b_к\cdot c_к\}$$

$$\{(a_к' + b_к')\cdot c_к' = a_к'\cdot c_к' + b_к'\cdot c_к'\} \Rightarrow$$

$$(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

Разностью двух положительных действительных чисел a и b называется действительное число $c = a - b$, удовлетворяющее условию: $a = b + c$

Частным положительных действительных чисел a и b называется такое действительное число $c = a : b$, что $a = b \cdot c$

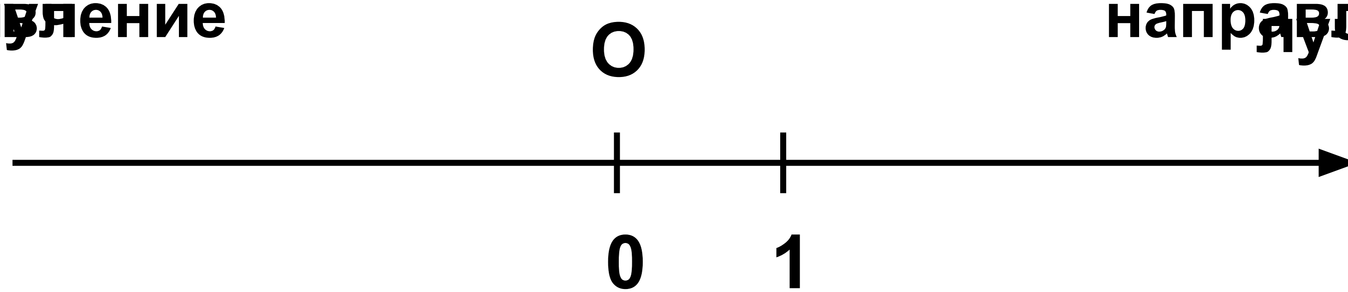
Геометрическая интерпретация действительного числа

Отрицательное направление

Отрицательный луч

Положительное направление

Положительный луч

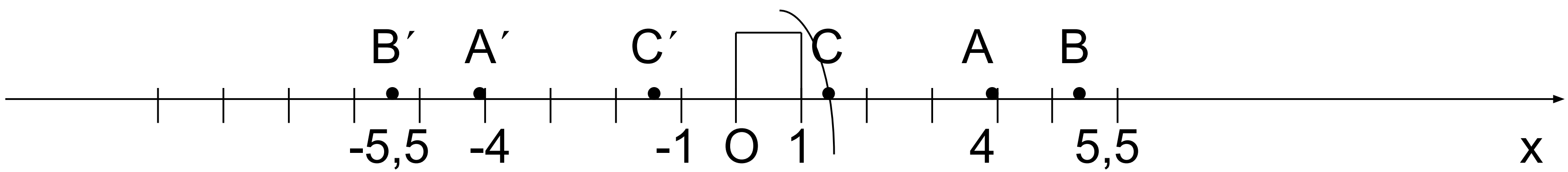


O – начало отсчета

Задан отрезок, принятый за единицу длины - введен масштаб

Горизонтальную прямую, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, называют <u>числовой прямой</u> (или <u>координатной прямой</u>)

Все точки, изображающие положительные действительные числа, располагаются справа от точки О



A (4), B (5,5), C ($\sqrt{2}$)

A (- 4), B (- 5,5), C (- $\sqrt{2}$)

4 и – 4, 5,5 и – 5,5, $\sqrt{2}$ и - $\sqrt{2}$ - противоположные числа

Числа, расположенные на координатной прямой левее точки О (т. е. на отрицательном луче), называют отрицательными

Множество отрицательных действительных чисел обозначают R_-

$$R_- \cup R_+ \cup \{0\} = R$$

Расстояние от начала отсчета до точки, координатой которой является число х, называется модулем числа х и обозначается |х|

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Примеры: |5| = 5, |- 7| = 7, |0| = 0

Каждой точке числовой прямой можно поставить в соответствие действительное число по следующему правилу:

1) выбранной точке O ставим в соответствие число 0,

2) каждой точке M на положительном луче поставим в соответствие положительное число a, где a – длина отрезка OM,

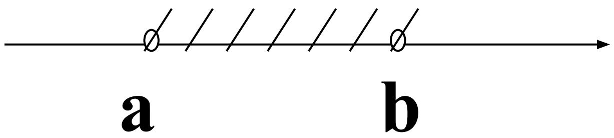
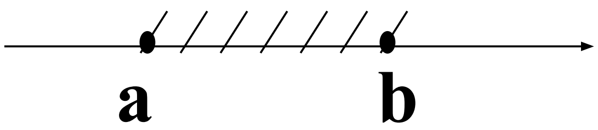
3) каждой точке M´ на отрицательном луче поставим в соответствие отрицательное число –a, где |-a| - длина отрезка OM´.

Таким образом, каждой точке числовой прямой (при выбранном масштабе) поставлено в соответствие единственное действительное число

Разным точкам числовой прямой поставлены в соответствие разные числа. Нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой-либо точке числовой прямой

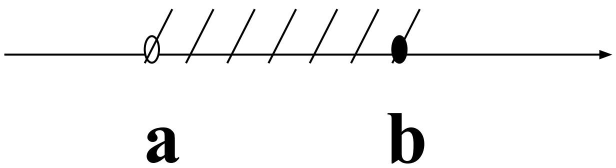
То есть между множеством всех точек числовой прямой и множеством R установлено <u>взаимно однозначное соответствие</u>

Числовые множества

Подмножество множества R	Обозначение и название	Изображение на координатной прямой
$\{x \mid x \in R,\ a < x < b\}$	$(a; b)$ **интервал**	
$\{x \mid x \in R,\ a \le x \le b\}$	$[a; b]$ **отрезок**	

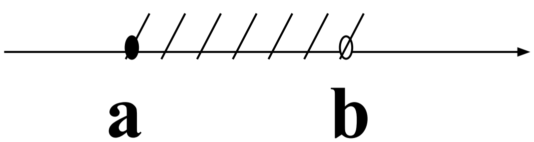
$\{x \mid x \in R,\ a < x \le b\}$ **(a; b]**

полуинтервал

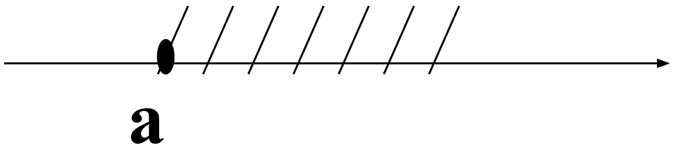


$\{x \mid x \in R,\ a \le x < b\}$ **[a; b)**

полуинтервал

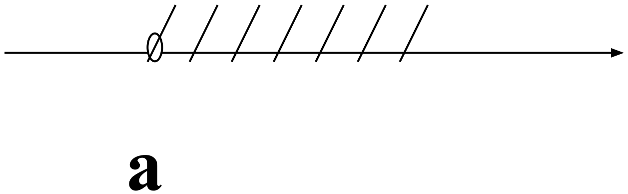


$\{x|\ x \in R,\ x \geq a\}$ $[a; +\infty)$



луч

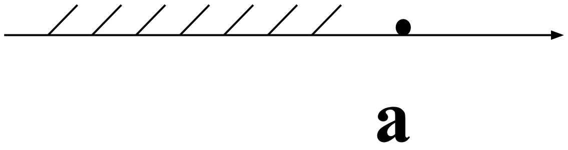
$\{x|\ x \in R,\ x > a\}$ $(a; +\infty)$



луч

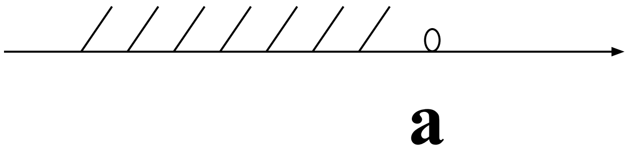
$\{x \mid x \in R,\ x \leq a\}$ $(-\infty;\ a]$

луч



$\{x \mid x \in R,\ x < a\}$ $(-\infty;\ a)$

луч



При любом расположении на координатной прямой двух разных точек A(a) и B(b) расстояние d между этими точками равно <u>модулю разности этих координат</u>, т.е.

$$d = |a - b|$$

Действия над действительными числами

Суммой двух действительных чисел называется число, удовлетворяющее условиям:

- сумма двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в множестве положительных действительных чисел;
- сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное, чтобы найти модель суммы, надо сложить модули слагаемых;
- сумма двух чисел с разными знаками есть число, имеющее тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший.

Произведением двух действительных чисел называется число, удовлетворяющее условиям:

- произведение положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в R_+;
- произведение двух отрицательных чисел есть число положительное; - произведение двух чисел с разными знаками есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел

Вычитание и **деление** действительных чисел определяется как действия, обратные соответственно сложению и умножению.

Вычитание во множестве R **выполняется всегда**, так же как и **деление**, за исключением случая деления на 0

Спасибо за внимание!