Основы теории вероятностей. Случайные события

- Случайные события. Определение. Классификация
- Относительная частота случайного события. Свойство статистической устойчивости
- Вероятность случайного события. Аксиомы теории вероятности
- Основные теоремы теории вероятностей

Лекция по математике

«Случай играет в мире столь большую роль, что обыкновенно я стараюсь отвести ему как можно меньше места в уверенности, что и без моей помощи он позаботится о себе»

А. Дюма

Историческая справка

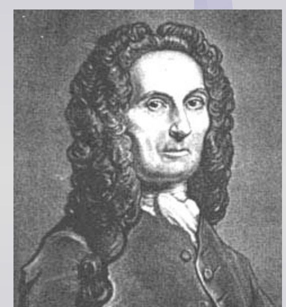
- Основателями теории вероятностей считаются французские ученые Б. Паскаль и П. Ферма, жившие в середине XVII века.
- Одно из первых исследований в области теории вероятностей работа Х. Гюйгенса «О расчетах при игре в кости».
- Большой вклад в развитие теории вероятностей внес швейцарский ученый XVIII в. Я. Бернулли, значительное влияние на ее развитие оказали А. Муавр (XVII в.), Т. Байес, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон (XVIII в.).
- Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли и *русские ученые* XIX-XX веков – П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов, А.Н. Колмогоров.

Б. Паскаль

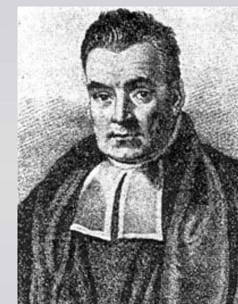
П. Ферма

Х. Гюйгенс

Я. Бернулли



А. Муавр



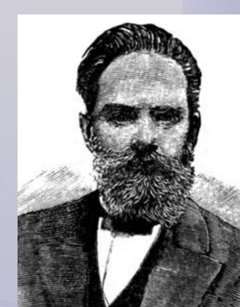
Т. Байес

П. Лаплас

К. Гаусс

С. Пуассон

П.Л. Чебышев



А.М Ляпунов

А.Н. Колмогоров

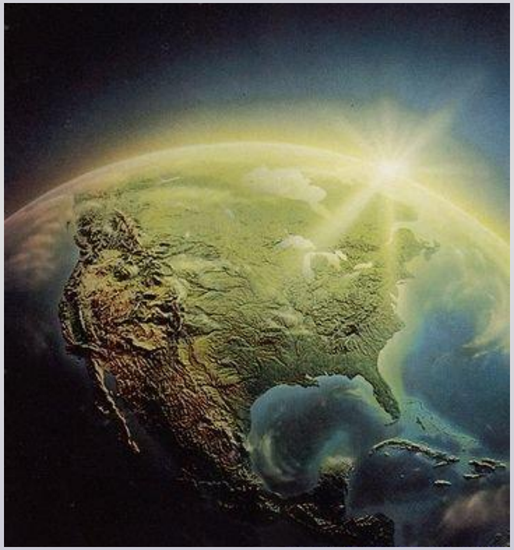
Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает закономерности, присущие случайным событиям массового характера

Теория вероятностей изучает

- Случайные события
- Случайные величины
- Случайные процессы

«Глядя на мир,
нельзя не удивляться»
Козьма Прутков

Человека окружает мир событий



С точки зрения математики **событие** является исходом опыта (или испытания).

Совокупность всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий**.

При этом **под опытом (испытанием) понимается** воспроизведение какого-либо комплекса условий для наблюдения исследуемого явления.

Пример

Испытание – спортсменка стреляет из лука по мишени

Событие – выбитое количество очков

События принято обозначать : A,B,C.D…

События, которые происходят всегда при данных условиях, называются **достоверными**.

События, которые не могут произойти при данных условиях, называются **невозможными**.

События, которые в данных условиях либо происходят, либо нет называются **случайными**.

Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется благоприятствующим этому событию (или просто благоприятным исходом).

Исходы называются равновозможными, если есть основания считать, что ни один из них не является более возможным, чем другие.

Пример 1

Бросание монеты. Испытание имеет два возможных исхода – выпадение «герба» или «решки».

Пример 2

Бросание игральной кости. Испытание имеет следующие возможные исходы – выпадение «1», «2», «3», «4», «5», «6».

Случайные события называются несовместными, если они не могут произойти одновременно.

События A_k (k = 1, 2, ..., n) образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и при испытании неизбежно произойдет одно из этих событий.

Классификация случайных событий:

- несовместные

- События А,В,С… называются несовместными, если наступление какого-либо из них исключает возможность появления другого события этой совокупности (в условиях данного испытания!)

- совместные

- События А,В,С… называются совместными, если в условиях данного испытания появление одного из них не исключает возможность появления другого события этой совокупности (в условиях данного испытания!)

- равновозможные

- События А,В,С… называются равновозможными, если в условиях данного испытания нет оснований предполагать большую возможность появления одного из них по отношению к другим

- единственно возможные

- События А,В,С… называются единственновозможными, если в условиях данного испытания хотя бы одно из них обязательно происходит

- противоположные

Пример: при бросании игральной кости

A - выпадение «1»

$\bar{A}$ - выпадение «только не 1»

- Два единственно возможных и несовместных события называются противоположными A и $\bar{A}$

2. Относительной частотой события p^* в рассматриваемой серии опытов называется отношение числа повторений события m_A к общему числу произведенных испытаний n:

$$p^* = \frac{m_A}{n}$$

Данные В. Феллера:

Выполнено 10 серий испытаний по бросанию монеты. В каждой серии 1000 испытаний. Событие – выпадение орла в каждой из серий: 501, 485, 509, 536, 485, 488, 500, 497, 494, 484. Очевидно, что относительная частота события в каждой из серий соответственно равна:

$$\frac{501}{1000}=0{,}501 \quad \frac{485}{1000}=0{,}485 \quad \frac{509}{1000}=0{,}509 \quad \frac{536}{1000}=0{,}536 \quad \frac{485}{1000}=0{,}485$$

$$\frac{488}{1000}=0{,}488 \quad \frac{500}{1000}=0{,}500 \quad \frac{497}{1000}=0{,}497 \quad \frac{494}{1000}=0{,}494 \quad \frac{484}{1000}=0{,}484$$

Относительная частота события определяется лишь после того, как **результаты опыта** становятся известными

Очевидно, в данном примере

$$p^* = \frac{m_A}{n} \approx 0{,}5$$

Случайность ? !

Относительная частота случайного события обладает *свойством статистической устойчивости* в том смысле, что *при многократком повторении* серии испытаний ее значение мало меняется

- *Пример 1*

На 1000 детей в Европе в среднем рождается 515 мальчиков (A) и 485 девочек (B)

$$p^*(A) = \frac{m_A}{n} = 0{,}515$$

$$p^*(B) = \frac{m_B}{n} = 0{,}485$$

- *Пример 2*

Из 1000 европейцев в среднем 390 имеют группу крови O, A – 369, B – 235, AB - 6

$$p^*(O) = \frac{m_O}{n} = 0{,}390$$

$$p^*(A) = \frac{m_A}{n} = 0{,}369$$

$$p^*(B) = \frac{m_B}{n} = 0{,}235 \quad p^*(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = 0{,}006$$

3. Понятие вероятности случайного события

Числовой характеристикой объективной возможности наступления случайного события в определенных условиях служит вероятность случайного события

Существует несколько **определений** вероятности случайного события:

- классическое
- статистическое
- геометрическое

- Статистическое определение вероятности (Мизес – нем. мат)

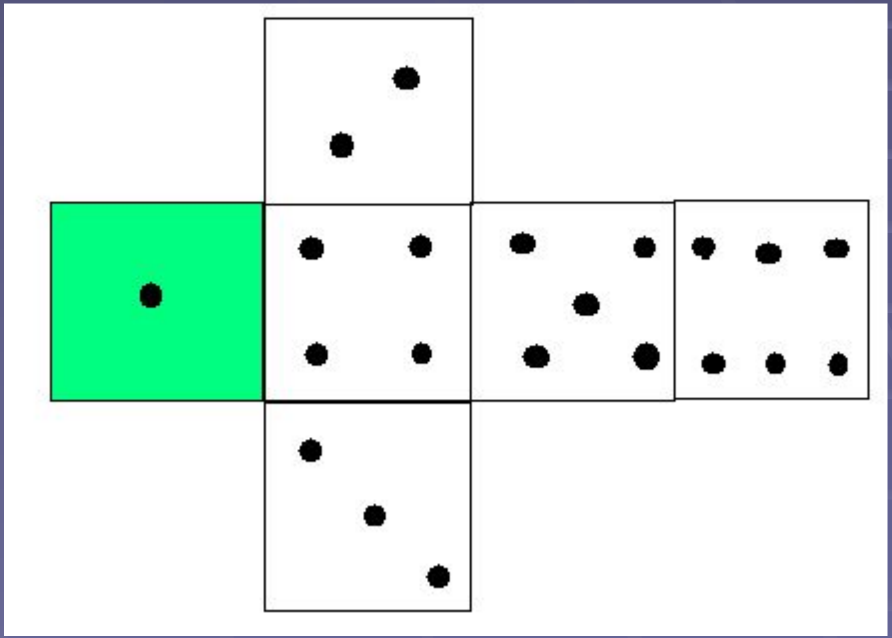
$$p(A) = \lim_{n\to\infty} p^* = \lim_{n\to\infty} \frac{m_A}{n}$$

- Геометрическое определение вероятности

$$p(A) = \frac{S_A}{S}$$

- *Пример:*

Вероятность того, что наугад выбранный донор имеет 4 группу крови = 0.006



Классическое определение вероятности случайного события (1812 г. – Лапласс)

Если события равновозможные, то

Вероятность случайного события A определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где m – число благоприятных исходов события;
n – общее число возможных исходов.

АКСИОМЫ (свойства вероятности):

1. Вероятность **достоверного события** равна 1 (так как $m = n$).
2. Вероятность **невозможного события** равна 0 (так как $m = 0$).
3. **Вероятность случайного события:**

$$0 < P(A) < 1$$

Противоположным событию A называется такое событие $\overline{A}$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

4. Вероятность противоположного события можно определить из формулы:

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$$

Два противоположных события образуют полную группу событий.

Пример 1 Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

Решение

Событие A – при бросании монеты хотя бы один раз появится «герб».

1-е бросание	2-е бросание
герб	решка
решка	герб
герб	герб
решка	решка

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

Пример 2 Брошена игральная кость. Найти вероятность выпадения четного числа.

Решение

Событие A – выпадение на игральной кости четного числа.

$m = 3$ («2», «4», «6»), $n = 6$ («1», «2», «3», «4», «5», «6»).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Вероятность выпадения нечетного числа: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Пример 3 Какова вероятность с первого раза наугад открыть кодовый замок, содержащий четыре диска с десятью цифрами?

Решение

$m = 1$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} = 0{,}0001$$

$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Произведение событий. Теоремы умножения

- *Произведением событий А и В называется такое событие С, которое состоит в том, что происходит и событие А и событие В*

Здесь надо различать зависимые и независимые события.

- События А и В называются независимыми, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет (верно и обратное утверждение)
- Событие А и В называются зависимыми, если вероятность события А зависит от того произошло событие В или нет
- Вероятности зависимых событий называются ***условными*** и обозначаются

$$\boxed{P(A/B)} \qquad \boxed{P(B/A)}$$

$$\boxed{P_B(A)} \qquad \boxed{P_A(B)}$$

- Теорема умножения:

Вероятность совместного появления событий *A* и *B* равна произведению их вероятностей

- Для независимых событий

$$P(AuB) = P(A) * P(B)$$

- Для зависимых событий

$$P(AuB) = P(A) * P(B/A)$$

4.2. Сложение событий. Теоремы сложения случайных событий

Суммой событий А и В называется такое событие С, которое состоит в том, что происходит по крайней мере одно из них (С= А или В)

- Теорема сложения:

Вероятность появления события *А* или *В* равна сумме их вероятностей

- Для несовместных событий

$$P(A и л и B) = P(A) + P(B)$$

- Для совместных событий

$$P(A и л и B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$$

Задача: *Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы 0.8, а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найдите вероятность того, что он а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза*

- Вначале введем обозначения

Событие А – попадание при первом выстреле

$$P(A)=0.8$$

$$P(\overline{A})=1-0.8=0.2$$

Событие В – попадание при втором выстреле

$$P(B)=0.8-0.1=0.7$$

$$P(\overline{B})=1-0.7=0.3$$

Событие С – попадание при третьем выстреле

$$P(C)=0.7-0.1=0.6$$

$$P(\overline{C})=1-0.6=0.4$$

Решение

а) *событие D* – три промаха из трех

$$D=\overline{A}и\overline{B}и\overline{C}$$

$$P(D)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=0.2\cdot 0.3\cdot 0.4=0.024$$

б) *событие К* – хотя бы одно попадание из трех

$$K=\overline{D}$$

$$P(K)=1-P(\overline{D})=1-0.024=0.976$$

в) *событие М* – два попадания из трех

$$M=(AиBи\overline{C})или(Аи\overline{B}иC)или(\overline{A}иBиC)$$

$$P(M)=0.8\cdot 0.7\cdot 0.4+0.8\cdot 0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.7\cdot 0.6=0.452$$

4.3. Формула полной вероятности

- Пусть события *H1, H2, H3… Hn* образуют полную систему, и их вероятности известны $P(H_i)$

например, вероятность заболевания

- Имеется некоторое событие *A*, которое может произойти при условии, что произойдет одно из событий H_i

Например, наличие какого-нибудь симптома *A* при данном заболевании

- Тогда вероятность появления события *A* будет определяться по *формуле полной вероятности*

Например, наличие симптома A у произвольно взятого больного

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$$

Задача: Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин страдает дальтонизмом. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом

- Введем обозначения:
- *Событие A* – выбранный человек страдает дальтонизмом
- *Событие H1* – выбранный человек- мужчина
- *Событие H2* - выбранный человек – женщина
- Пусть

$$P(H_1) = P(H_2) = 0.5$$

- По условию

$$P(A/H_1) = 0.05$$

$$P(A/H_2) = 0.0025$$

Решение

Событие A может проявиться, если выбранный человек мужчина и дальтоник или если выбранный человек – женщина и дальтоник

$$A = (H_1 и A/H_1) или (H_2 и A/H_2)$$

$$P(A) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.0025 = 0.02625$$

Т.е. мы воспользовались формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

4.4. Формула Байеса (формула проверки гипотез)

- Пусть событие *A* имело место (произошло), тогда условные вероятности событий $P(H_i / A)$
- *Находятся по формуле Байеса*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}$$

- *<u>Пример:</u> выбранный человек оказался дальтоником (событие А произошло). Какова вероятность, что этот человек – мужчина?*

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)}$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.02625} = 0.952$$

4.5. Если испытания независимые

- 4.5.1.Формула Бернулли

Вероятность того, что событие А произойдет m раз из n испытаний определяется по формуле Бернулли

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

p - *вероятность события А в отдельном испытании*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$q = 1 - p$$

Запомните, что

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Задача: *В сентябре в среднем 8 дней дождливые. Какова вероятность, что из 10 дней отгула только 1 окажется дождливым*

Ведем обозначения:

Событие А – дождливый день

$$p = \frac{8}{30}$$

$$q = 1 - p = \frac{22}{30}$$

$$m = 1$$

$$n = 10$$

- *Тогда по формуле Бернулли*

$$C_{10}^{1} = \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!} = \frac{9! \cdot 10}{1! \cdot 9!} = 10$$

$$P_{10}^{1} = C_{10}^{1} p^{1} q^{10-1}$$

$$P_{10}^{1} = 10 \cdot \left(\frac{8}{30}\right)^{1} \cdot \left(\frac{22}{30}\right)^{9} \approx 0.16$$

4.5.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если число испытаний велико (n>20), то пользоваться формулой Бернулли затруднительно.

В этом случае используют приближенные формулы вычисления вероятностей.

При n>20 и p>0.1 вероятность появления события А m раз из n испытаний приближенно вычисляется по локальной теореме Муавра-Лапласа

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$ *- аргумент <u>четной</u> функции Лапласа* $\varphi(x)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669

4.5.3.Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Вероятность того, что событие А из n испытаний появится не менее m1 и не более m2 раз определяется приближенно по интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \cong P_n(m_1 < m < m_2) \cong \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) u \left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ - аргументы <u>нечетной</u> функции Лапласа $\Phi(x)$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3401	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977

4.5.4. Формула Пуассона (вероятность редких событий)

Если n – велико, а событие *A* редкое, т.е. (p<0.1), то необходимо вычислить npq

Если $npq > 9$ используем формулы Муавра Лапласа

Если $npq < 9$ используем формулу Пуассона

$$P_n(m) \cong \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

где

$$\lambda = np$$

Задача: *Среди 1100 студентов левши составляют 1%. Чему равна вероятность того, что из общего количества студентов а) ровно 11 левшей; б) не менее 20 левшей*

Анализируем:

$n=1100$ – велико $p=0.01$ – мало (<0.1)

Следовательно, формула Бернулли будет громоздка.

Вычисляем *npq*, где $q=1-p=0.99$

$npq=1100*0.01*0.99=10.89>9$

Можно использовать формулы Муавра -Лапласа а) Вероятность того, что из 1100 студентов ровно 11 являются левшами

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P_{1100}(11) \cong \frac{1}{\sqrt{10.89}} \cdot \varphi\left(\frac{11-1100\cdot 0.01}{\sqrt{10.89}}\right) \approx \frac{1}{3.3} \cdot \varphi(0) \approx \frac{1}{3.3} \cdot 0.3989 \approx 0.1178$$

б) вероятность того, что из 1100 студентов не менее 20 левшей, т.е. (20<m<1100)

$$P_n(m_1 < m < m_2) \cong \Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P_n(20 < m < 1100) \cong \Phi\left(\frac{1100-11}{3.3}\right) - \Phi\left(\frac{20-11}{3.3}\right) = 0.5 - 0.4968 = 0.0032$$