Высшая математика

Лектор
доцент Шинкевич Елена Алексеевна
Кафедра ВМ: ауд. 430/2

Литература

- Дымков М.П., Конюх А.В., Майоровская С.В., Петрович В.Д., Рабцевич В.А. Высшая математика (1 семестр): Учебно-методическое пособие для подготовки к компьютерному тестированию. Мн.: БГЭУ, 2011. — 27 с. На сайте кафедры: http://bseu.by/hm/uchm/test/VM1.pdf В локальной сети БГЭУ:\\Arhive\UchebM\Естественнонаучные\Высшая математика

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(Первый семестр)

Учебно-методическое пособие

для подготовки

к компьютерному тестированию.

При каждой новой попытке сдачи теста вопросы выбираются случайным образом из разных разделов, что исключает их повторение и дублирование.

Количество вопросов в тестовом задании – 8.

Время выполнения теста – 20 минут.

9. Рекомендации по оценке выполнения теста

Шкала оценок результатов тестирования разрабатывается и утверждается на заседаниях кафедры высшей математики. Каждое правильно выполненное тестовое задание оценивается 1 баллом, невыполненное задание — 0 баллов. Результат Для сдачи теста необходимо ответить не менее, чем на половину вопросов (т.е. набрать не менее 50%).

Тема 1: **Элементы линейной алгебры**

§1. Матрицы

1.1. Основные понятия

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – **матричная алгебра** имеют важное значение для экономистов, так как значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

ОПР. Матрицей размера ***m×n*** называется прямоугольная таблица чисел (или других математических величин, объектов) из ***m*** строк и ***n*** столбцов:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A_{m\times n}=\left(a_{ik}\right)_{m\times n}.$$

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы: a_{ik} – элемент, принадлежащий ***i***-й строке и ***k***-му столбцу матрицы, числа ***i***, ***k*** называются **индексами** элемента.

Матрицы обозначаются ***A, B, C*** … .

Например, матрица ***A***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

имеет размерность 3×2

Матрица ***B***

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

имеет размерность 3×1

число строк

число столбцов

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Элемент

$$a_{12} = 4$$

$$a_{31} = 9$$

$$a_{22} = 8$$

ОПР. Матрицы ***A*** и ***B*** одинаковых размеров называются **равными**, если равны их соответствующие элементы:

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ОПР. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой**. Она обозначается $O_{m \times n}$.

Пример

Дано:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 8\\ 9 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 8\\ 9 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 8\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 8\\ 9 & 3\end{pmatrix},$$

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

Указать размерность данных матриц. Имеются ли среди данных матриц равные?

$$A_{3\times 2},\ B_{3\times 2},\ C_{2\times 2},\ D_{3\times 2},\ O_{3\times 3},$$

$$B=D$$

ОПР. Квадратной матрицей ***n***-го порядка называется матрица размера ***n×n***. Обозначается A_n.

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**.

Матрица размерности ***m×1*** называется матрицей-столбцом.

Матрица размерности ***1×n*** называется матрицей-строкой.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ОПР. Квадратная матрица называется **диагональной**, если ее элементы на главной диагонали не все равны нулю, а все остальные элементы равны нулю.

ОПР. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной матрицей**. Обозначается E_n.

Матрица размера **1×1**, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом: $A = \left(a_{11}\right)_{1\times1} = a_{11}$.

1.2. Операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число.

Складывать и вычитать можно только матрицы **одинаковых** размеров.

ОПР. Суммой (разностью) двух матриц

$A=\left(a_{ik}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ik}\right)_{m\times n}$

называется такая матрица

$C=\left(c_{ik}\right)_{m\times n}$, что

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}\ \left(c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}\right),$$

т. е. матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц ***A*** и ***B***.

Пример

Найти ***A+B***, ***A+C***, ***B+C***, если это возможно.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Существует сумма ***B+C***:

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+7 & 2+2 \\ -3+3 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ОПР. Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m\times n}$ на число α (или числа α на матрицу ***A***) называется матрица $B=(b_{ik})_{m\times n}$, для которой

$$b_{ik}=\alpha\cdot a_{ik}\,,\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n}$$

т. е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α. Обозначение $\alpha A=A\alpha=B$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

ОПР. **Произведением** $A \cdot B$ **матриц** $A_{m \times n}$ и $B_{n \times r}$ называется матрица ***С*** размера $m \times r$ такая, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

т. е. элемент ***i***-й строки и ***j***-го столбца матрицы произведения c_{ij} равен сумме произведений элементов ***i***-й строки матрицы ***A*** на соответствующие элементы ***j***-го столбца матрицы ***B***.

Операция умножения двух матриц определяется только для случая, когда **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы**.

Если матрицы ***A*** и ***B*** квадратные одного размера, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$

всегда существуют, но не обязательно равны.

Пример

Найти произведения матриц ***AB*** и ***BA*** (если это возможно):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 1}=\begin{pmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 3}\\ -1 \quad 0 \quad 1\end{pmatrix}\cdot\boxed{\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 1\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 1\\ -1\cdot 3+0\cdot 5+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ -2\end{pmatrix}=C_{2\times 1}$$

Пример

Найти произведения матриц ***AB*** и ***BA*** (если это возможно):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{1-строка матрицы А прикладывается}\\ \text{к первому столбцу матрицы В, соответствующие}\\ \text{элементы перемножаются, а произведения складываются}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ -1\cdot3+0\cdot6+1\cdot7 & -1\cdot4+0\cdot0+1\cdot1 & -1\cdot5+0\cdot(-2)+1\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы ***B*** не совпадает с числом строк матрицы ***A*** .

ОПР. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной. Матрицу, транспонированную относительно матрицы ***А***, обозначают A^T.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойства

$$\left(A^T\right)^T = A;$$

$$\left(A + B\right)^T = A^T + B^T;$$

$$\left(A \cdot B\right)^T = B^T A^T.$$

Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух рядов матрицы;
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Под рядом матрицы понимается строка или столбец матрицы.

ОПР. Две матрицы ***A*** и ***B*** называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Записывают: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}.$

§2. Определители

Любой квадратной матрице ***n***-го порядка ***A*** можно поставить в соответствие число, которое называется определителем матрицы ***A*** и обозначается $\det A$, $|A|$, ΔA (дельта).

Определителем 1-го порядка квадратной матрицы $A=(a_{11})$ называется значение a_{11}: $\det A = a_{11}$.

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример

Вычислить определитель

1. $$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot (-2) = 18 + 10 = 28.$$

2. $$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \left(-1\right) \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -9$$

Определителем квадратной матрицы 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(2 \cdot 7 - 5 \cdot 3\right) + 1 \cdot \left(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6\right) + 3 \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 6) =$$

$$= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -2 - 2 = -4.$$

ОПР. **Минором** M_{ij} **элемента** a_{ij} квадратной матрицы ***А*** ***n***-го порядка называется определитель ***(n-1)***-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

ОПР. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} **элемента квадратной матрицы** a_{ij} называется произведение

$$(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}.$$

Пример

В матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

минором элемента a_{22} является $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$

минором элемента a_{33} является

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9.$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{22}

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

§3. Обратная матрица

Пусть ***A*** — квадратная матрица ***n***-го порядка.

ОПР. Квадратная матрица ***A*** называется **невырожденной**, если определитель **det*A*** не равен нулю: $\det A \neq 0.$

В противном случае ($\det A = 0$) матрица ***A*** называется **вырожденной**.

ОПР. Матрицей, **присоединенной к матрице** $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, называется матрица

$$\tilde{A}=\left(A_{ij}\right)^{T},$$

A_{ij}

где — a_{ij} алгебраическое дополнение элемента A^{-1} данной матрицы ***A***.

Матрица называется **обратной** к квадратной матрице ***A***, если $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E,$ выполняется условие

где ***E*** — единичная матрица того же порядка, что и матрица ***A***.

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица ***A***.

Теорема 1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную (и причем только одну).

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы.

   Если $\det A = 0$, то матрица ***A*** вырожденная и обратной матрицы не существует.

   Если $\det A \neq 0$, то матрица невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к матрице ***A***.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и из них составляем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \left(A_{ij} \right)^T$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Пример

Вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 10 = -18 \neq 0$$

Обратная матрица существует.

Присоединенная матрица имеет вид:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}7 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}7 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7/18 & -5/18\\ 2/18 & 4/18\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -4 \cdot 7 + 10 & -20 + 20 \\ 14 - 14 & 10 - 28 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§4. Матричные уравнения

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей ***X*** записываются следующим образом

$$AX = B, \qquad XA = B.$$

В этих уравнениях ***A***, ***B***, ***X*** — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знака равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях

$$AX = B, \quad XA = B$$

матрица ***A*** невырожденная, то их решения записываются следующим образом

Если $AX = B,$ то $X = A^{-1}B,$

Если $XA = B$ то $X = BA^{-1}.$

Пример

- Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

Найдем обратную матрицу.

1) Найдем определитель матрицы :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Значит, обратная матрица существует, и исходное уравнение имеет единственное решение.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение уравнения:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу размера ***m***×***n***. Выделим в ней ***k*** строк и ***k*** столбцов,

$$k \le \min\{m; n\}$$

Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель ***k***-го порядка. Все такие определители называются **минорами этой матрицы** и обозначаются M_k.

ОПР. Рангом матрицы *A* называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы.

Обозначают: $rank(A)$.

Очевидно, что $0 \le rank(A) \le \min\{m; n\}$.