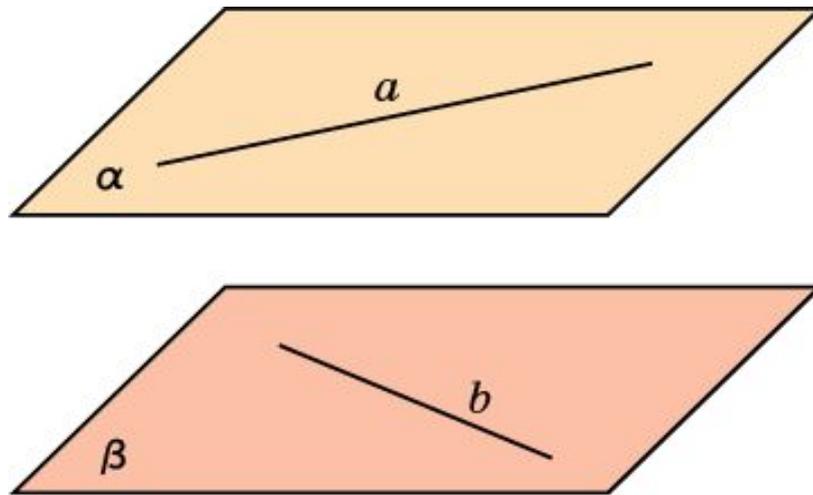
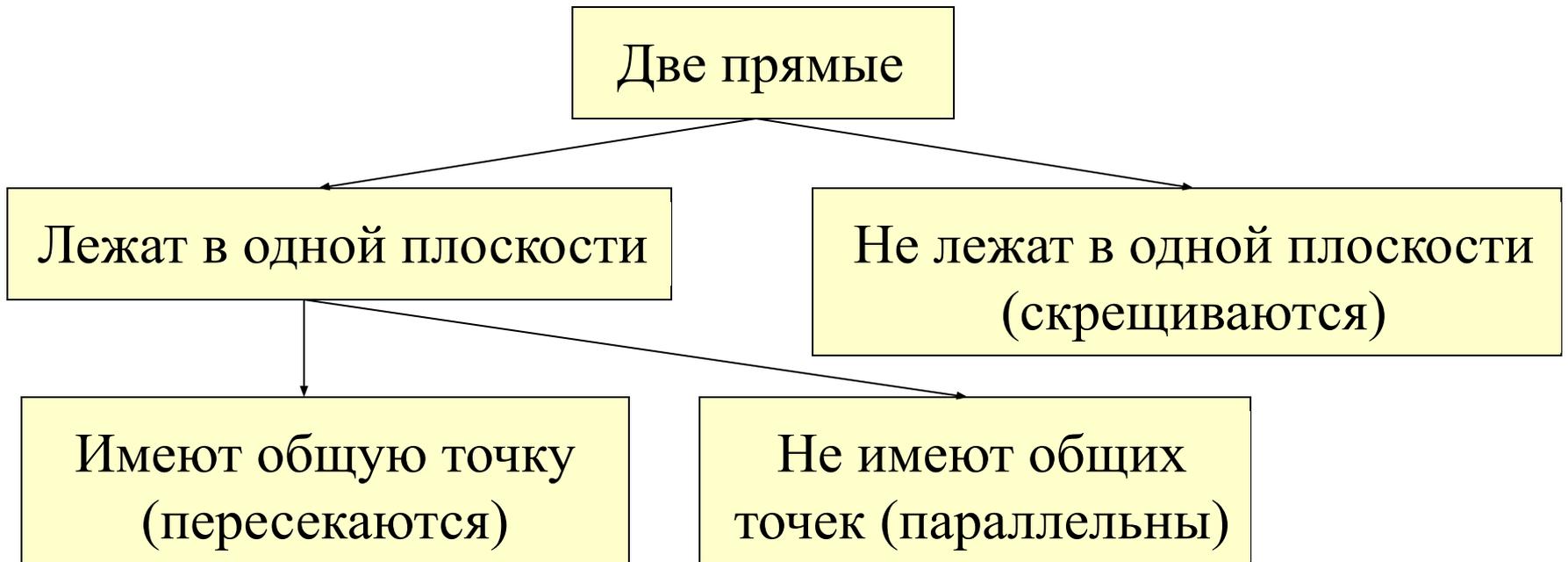


# СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

**Определение.** Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

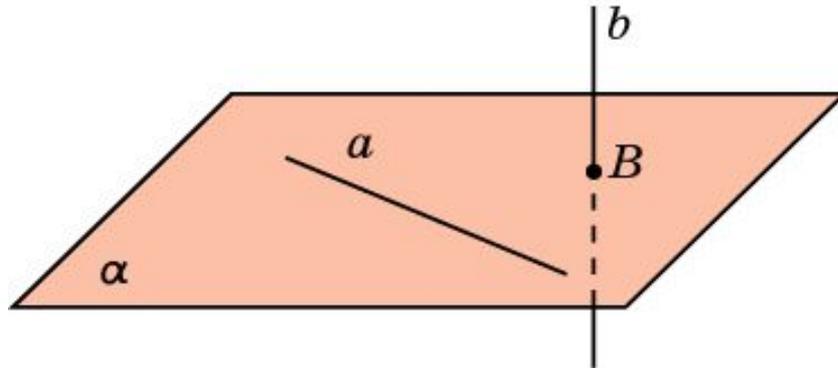


# Взаимное расположение двух прямых в пространстве



## Признак скрещивающихся прямых

**Теорема.** Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.



**Доказательство.** Пусть прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  пересекает плоскость в точке  $B$ , не принадлежащей прямой  $a$ . Если бы прямые  $a$  и  $b$  лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежала бы и точка  $B$ . Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью должна быть плоскость  $\alpha$ . Но тогда прямая  $b$  лежала бы в плоскости  $\alpha$ , что противоречит условию. Следовательно, прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости, т.е. скрещиваются.

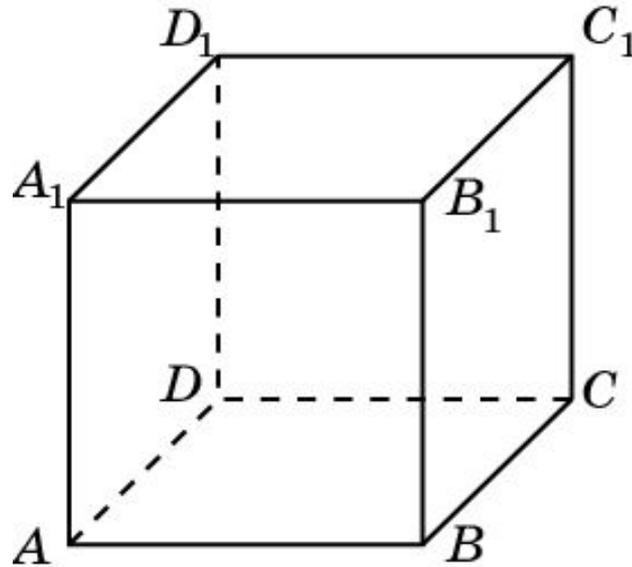
# Упражнение 1

Всегда ли две не пересекающиеся прямые в пространстве скрещиваются?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

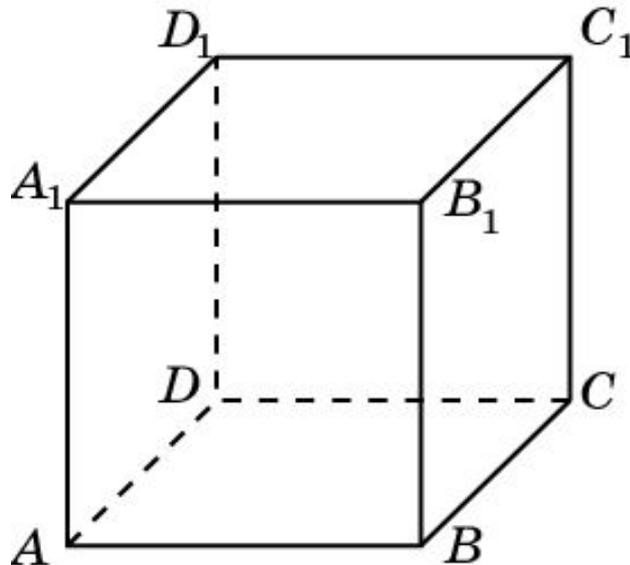
Назовите прямые, проходящие через вершины куба  $A...D_1$  и скрещивающиеся с прямой  $AB$ .



Ответ:  $A_1D_1$ ;  $B_1C_1$ ;  $DD_1$ ;  $CC_1$ .

### Упражнение 3

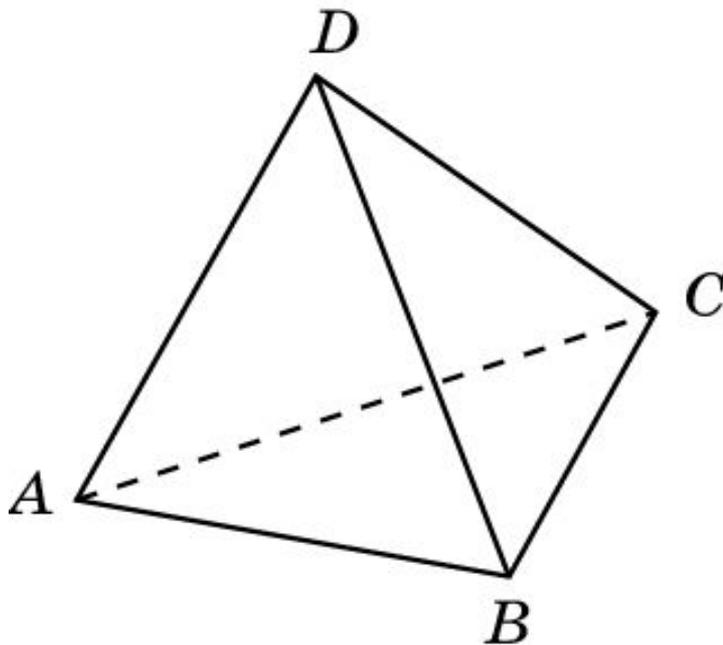
Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра куба  $A...D_1$ ?



**Решение:** Каждое ребро участвует в четырех парах скрещивающихся прямых. У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно  $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$ .

## Упражнение 4

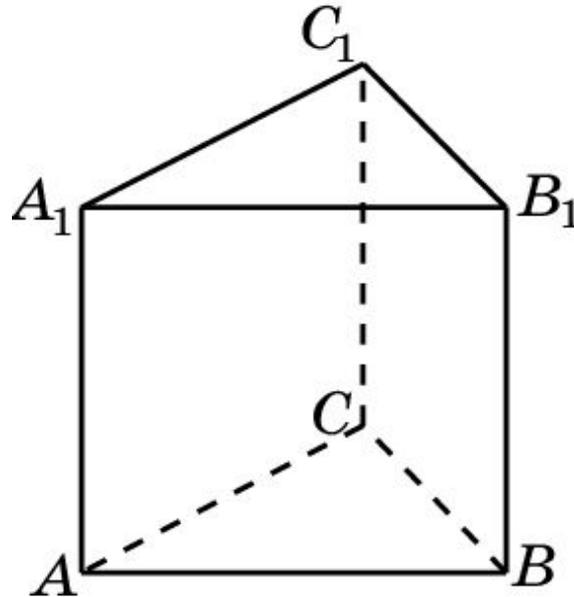
В тетраэдре  $ABCD$  укажите пары скрещивающихся ребер.



**Ответ:**  $AB$  и  $CD$ ;  $BC$  и  $AD$ ;  $AC$  и  $BD$ .

## Упражнение 5

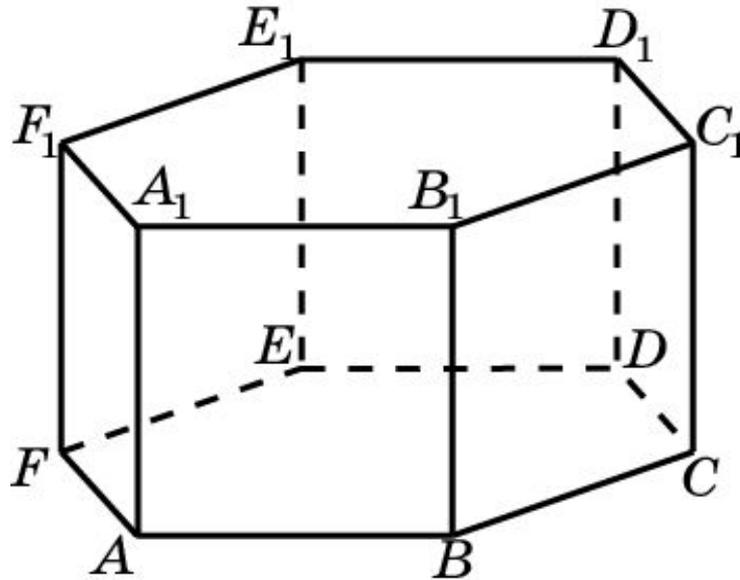
Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра правильной треугольной призмы?



**Решение:** Для каждого ребра оснований имеется три ребра, с ним скрещивающихся. Для каждого бокового ребра имеется два ребра, с ним скрещивающихся. Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно  $\frac{6 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 12$ .

## Упражнение 6

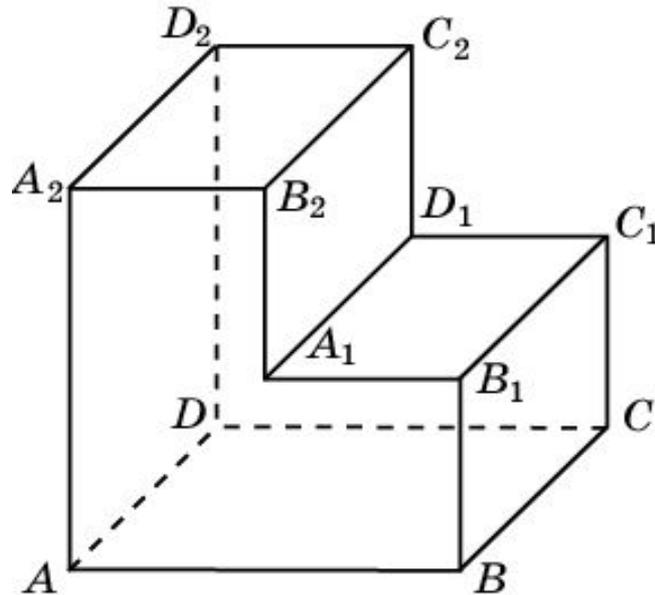
Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра правильной шестиугольной призмы?



**Решение:** Каждое ребро оснований участвует в 8 парах скрещивающихся прямых. Каждое боковое ребро участвует в 8 парах скрещивающихся прямых. Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно  $\frac{12 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 8}{2} = 72$ .

## Упражнение 7

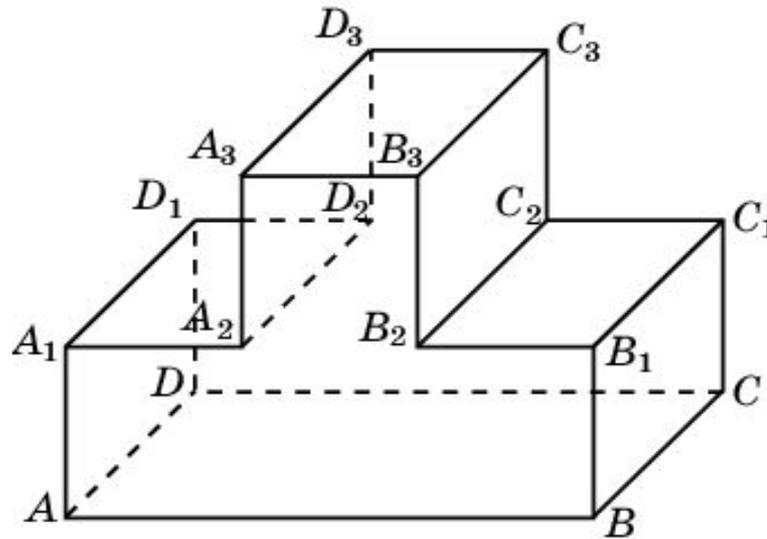
Назовите прямые, содержащие ребра многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, скрещивающиеся с прямой  $AA_2$ .



**Ответ.**  $BC, CD, B_1C_1, A_1D_1, B_2C_2, C_1D_1, C_2D_2$ .

## Упражнение 8

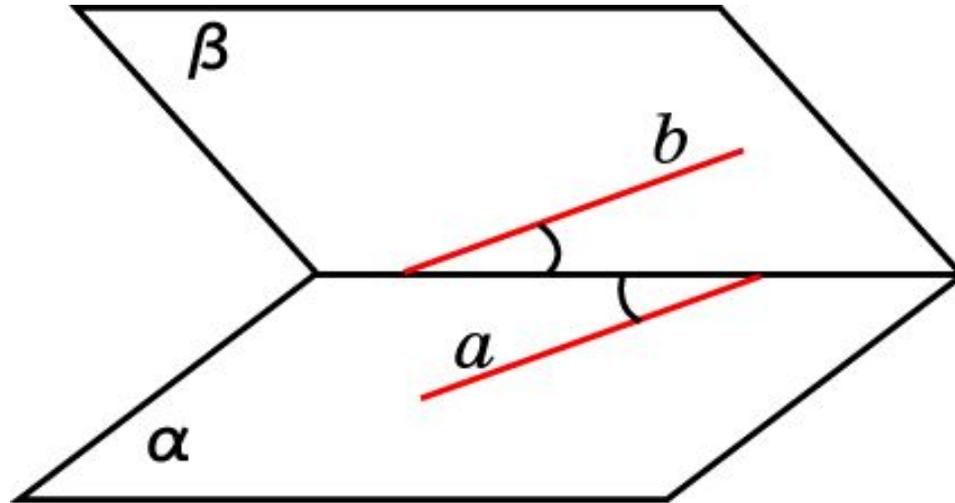
Назовите прямые, содержащие ребра многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, скрещивающиеся с прямой  $AB$ .



**Ответ.**  $DD_1, CC_1, C_2C_3, D_2D_3, A_1D_1, A_2D_2, B_2C_2, B_1C_1, A_3D_3, B_3C_3$ .

## Упражнение 12

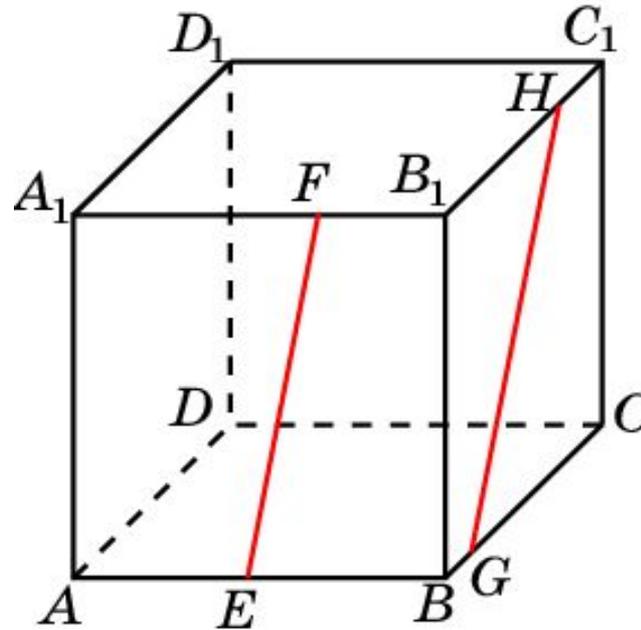
Как расположены в пространстве прямые  $a$  и  $b$ , проведенные в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  ?



**Ответ:** Прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке, не принадлежащей прямой  $a$ . Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых, прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются.

## Упражнение 13

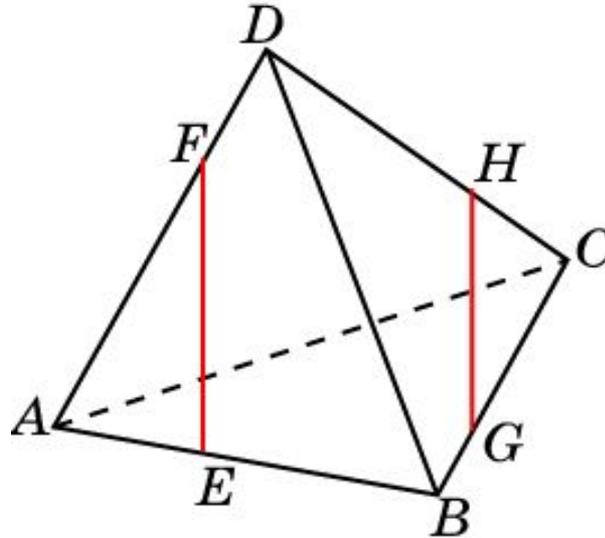
Как в пространстве расположены прямые  $EF$  и  $GH$ , проведенные в плоскостях граней куба  $A...D_1$ ?



**Ответ:** Прямая  $GH$  пересекает плоскость  $ABB_1$  в точке, не принадлежащей прямой  $EF$ . Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых, прямые  $EF$  и  $GH$  скрещиваются.

## Упражнение 14

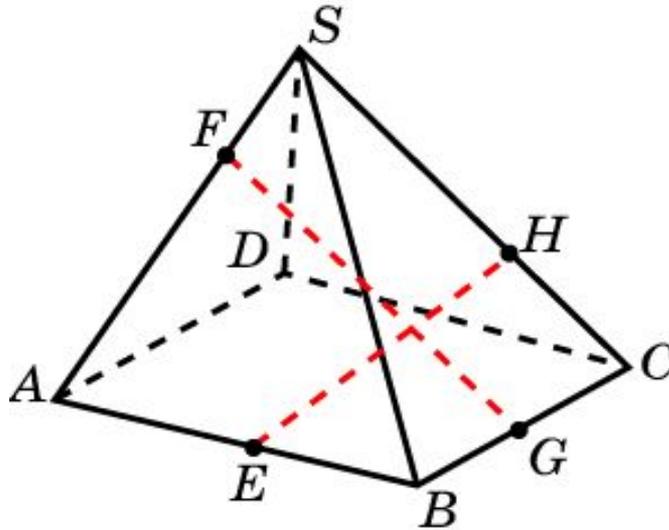
Как в пространстве расположены прямые  $EF$  и  $GH$ , проведенные в плоскостях граней тетраэдра?



**Ответ:** Прямая  $GH$  пересекает плоскость  $ABD$  в точке, не принадлежащей прямой  $EF$ . Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых, прямые  $EF$  и  $GH$  скрещиваются.

## Упражнение 15

Как в пространстве расположены прямые  $EH$  и  $FG$ ?



**Ответ:** По предыдущей задаче прямые  $EF$  и  $GH$  скрещиваются. Следовательно, точки  $E, F, G, H$  не принадлежат одной плоскости. Значит, прямые  $EH$  и  $FG$  скрещиваются.

## Упражнение 16

Возможно ли такое расположение карандашей?

