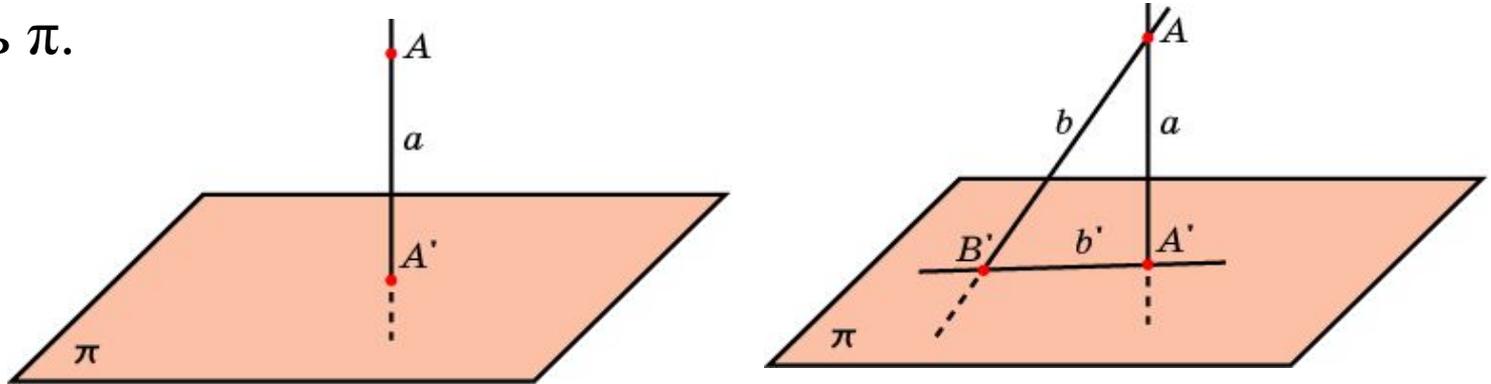


# ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть дана плоскость  $\pi$  и точка  $A$  пространства. Через точку  $A$  проведем прямую  $a$ , перпендикулярную плоскости  $\pi$ . Точку пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\pi$  обозначим  $A'$ . Она называется **ортогональной проекцией** точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .

Отрезок  $AA'$  называется **перпендикуляром**, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .

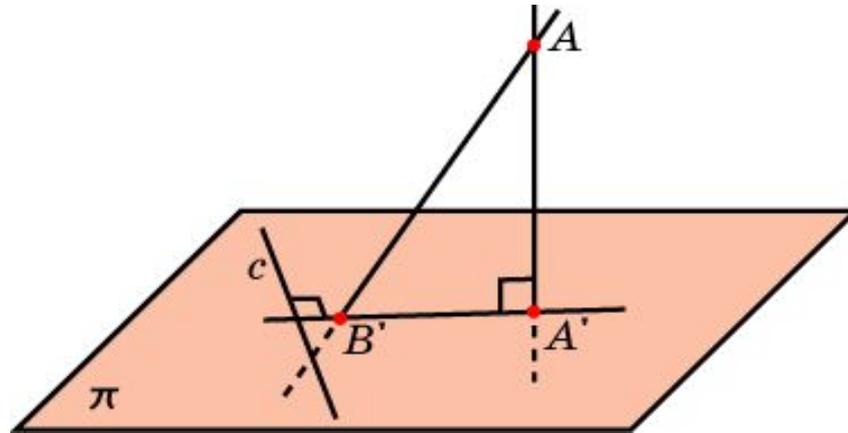


**Наклонной** к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Соответствие, при котором точкам  $A$  пространства сопоставляются их ортогональные проекции  $A'$ , называется **ортогональным проектированием** на плоскость  $\pi$ .

## Теорема о трех перпендикулярах

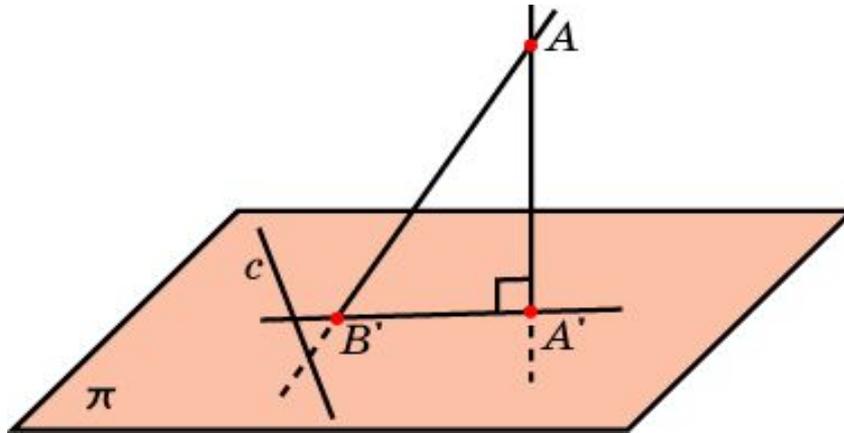
**Теорема.** Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.



**Доказательство.** Пусть прямая  $c$  плоскости  $\pi$  перпендикулярна проекции  $A'B'$  наклонной  $AB'$ ,  $AA'$  – прямая, перпендикулярная плоскости  $\pi$ , следовательно, и прямой  $c$ . Тогда прямая  $c$  будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $A'B'$  и  $AA'$ . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $AA'B'$  и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной  $AB'$ .

## Упражнение 1

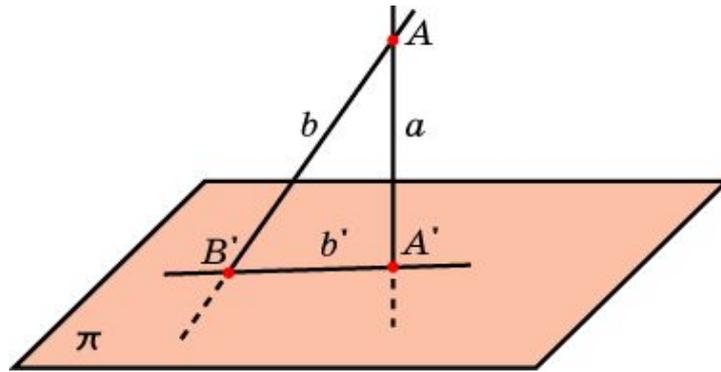
Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ортогональной проекции этой наклонной.



**Доказательство.** Пусть прямая  $c$  плоскости  $\pi$  перпендикулярна наклонной  $AB'$ ,  $AA'$  – прямая, перпендикулярная плоскости  $\pi$ , следовательно, и прямой  $c$ . Тогда прямая  $c$  будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $AB'$  и  $AA'$ . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $c$  перпендикулярна плоскости  $AA'B'$  и, следовательно, она будет перпендикулярна ортогональной проекции  $A'B'$  наклонной  $AB'$ .

## Упражнение 2

Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.



**Доказательство.** Пусть  $AB'$  – наклонная к плоскости  $\pi$ ,  $AA'$  – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость. Соединим отрезком точки  $A'$  и  $B'$ . Треугольник  $AA'B'$  прямоугольный,  $AB'$  – гипотенуза,  $AA'$  – катет. Следовательно,  $AA' < AB'$ .

## Упражнение 3

Может ли ортогональная проекция отрезка быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка?

**Ответ:** а) Да; б) да; в) нет.

## Упражнение 4

Верно ли утверждение: «Если из двух различных точек, не принадлежащих плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны»?

Ответ: Нет.

## Упражнение 5

К плоскости прямоугольника  $ABCD$  в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение о том, что произвольная точка  $M$  этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника?

Ответ: Да.

## Упражнение 6

Точка  $M$  равноудалена от всех точек окружности. Верно ли утверждение о том, что она принадлежит перпендикуляру к плоскости окружности, проведённому через её центр?

Ответ: Да.

## Упражнение 7

Найдите ГМ оснований наклонных одинаковой длины, проведённых к данной плоскости из данной точки.

**Ответ:** Окружность.

## Упражнение 8

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

**Ответ:** Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

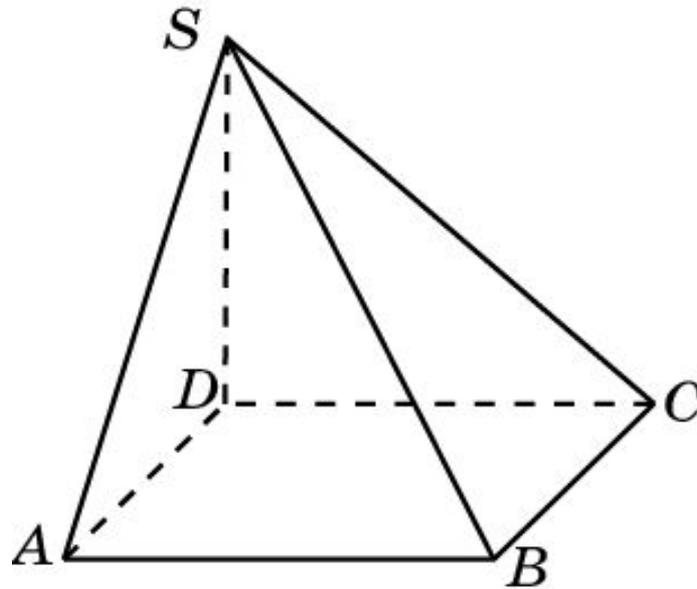
## Упражнение 9

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой.

**Ответ:** Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника с вершинами в данных точках, и перпендикулярная плоскости этого треугольника.

## Упражнение 10

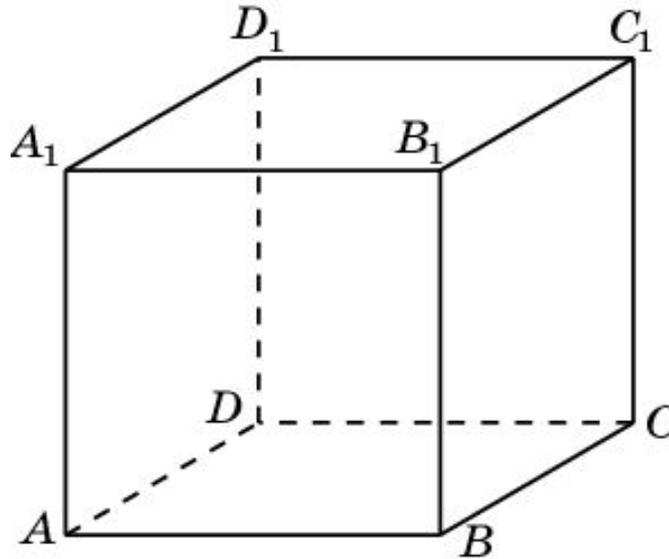
Основание  $ABCD$  пирамиды  $SABCD$  – прямоугольник,  $AB < BC$ . Ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  укажите наименьший и наибольший.



**Ответ:**  $SD$  – наименьший;  $SB$  – наибольший.

## Упражнение 11

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  укажите ортогональную проекцию точки  $A$  на плоскость: а)  $BCC_1$ ; б)  $BDD_1$ ; в)\*  $BDA_1$ .



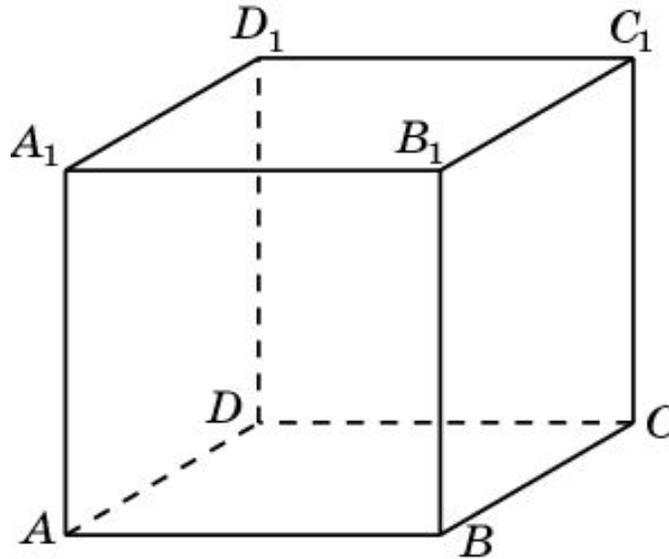
**Ответ.** а) точка  $B$ ;

б) точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ ;

в) точка пересечения прямых  $AC_1$  и плоскости  $BDA_1$ .

## Упражнение 12

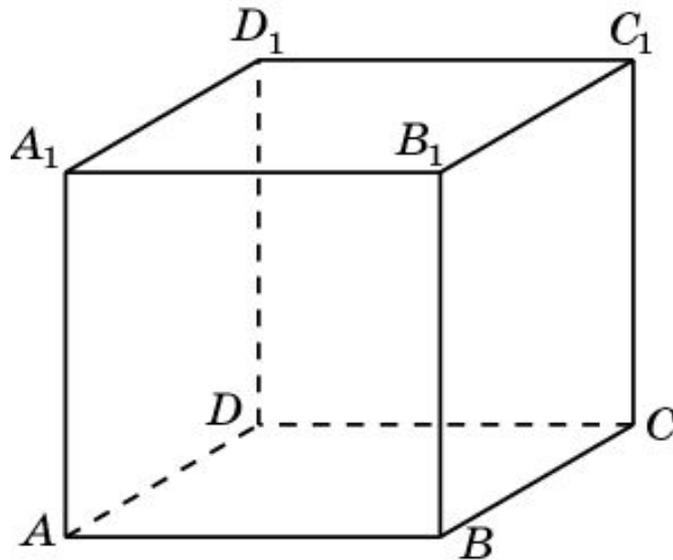
В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  укажите ортогональную проекцию отрезка  $AB_1$  на плоскость: а)  $ABC$ ; б)  $BCC_1$ ; в)  $BDD_1$ .



- Ответ.** а) отрезок  $AB$ ;  
б) отрезок  $BB_1$ ;  
в) отрезок, соединяющий точку  $B_1$  и середину отрезка  $BD$ .

## Упражнение 13

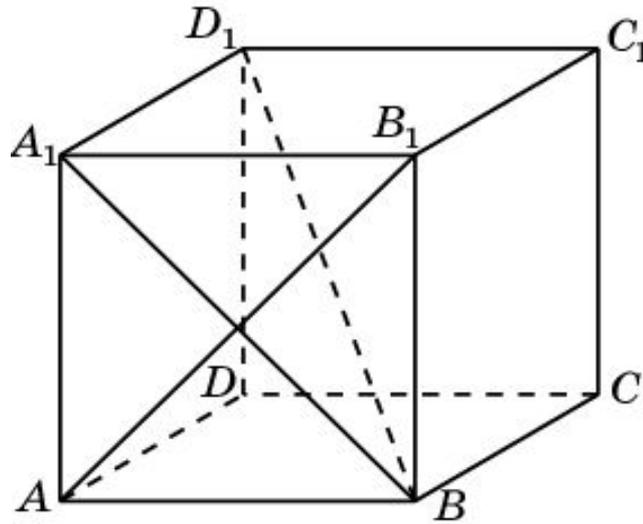
В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите длину ортогональной проекции отрезка  $AB_1$  на плоскость  $BDD_1$ .



Ответ.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

## Упражнение 14

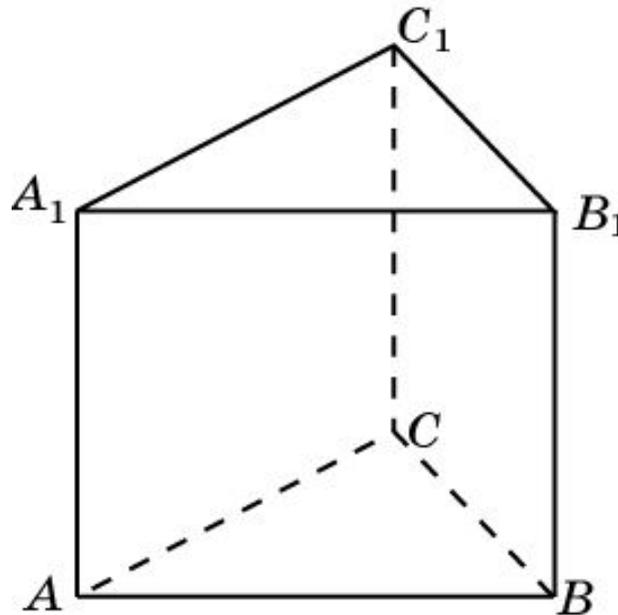
Докажите, что диагональ  $BD_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярна прямой  $AB_1$ .



**Доказательство.** Ортогональной проекцией прямой  $BD_1$  на плоскость  $ABB_1$  является прямая  $BA_1$ , которая перпендикулярна прямой  $AB_1$ . По теореме о трех перпендикулярах, прямая  $BD_1$  перпендикулярна прямой  $AB_1$ .

## Упражнение 15

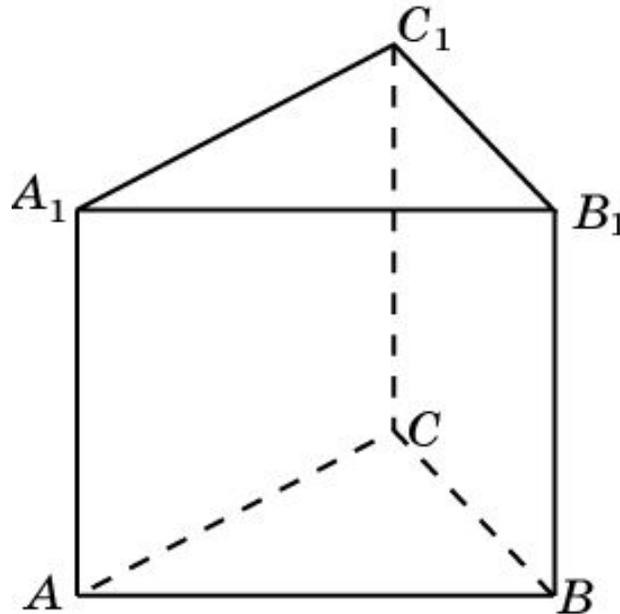
В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  укажите ортогональную проекцию отрезка  $AC_1$  на плоскость: а)  $ABC$ ; б)  $BCC_1$ .



**Ответ.** а) отрезок  $AC$ ;  
б) отрезок, соединяющий точку  $C_1$  и середину отрезка  $BC$ .

## Упражнение 16

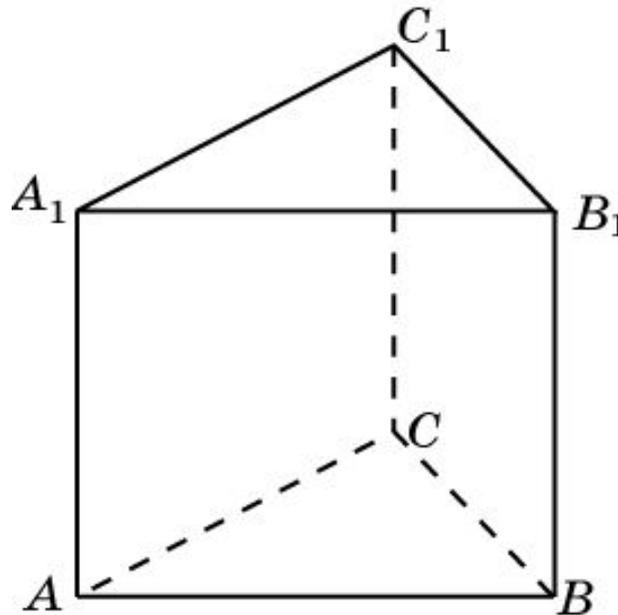
В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите длину ортогональной проекции отрезка  $AC_1$  на плоскость  $BCC_1$ .



Ответ.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

## Упражнение 17

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  укажите ортогональную проекцию точки  $B$  на плоскость: а)  $A_1B_1C_1$ ; б)  $ACC_1$ .

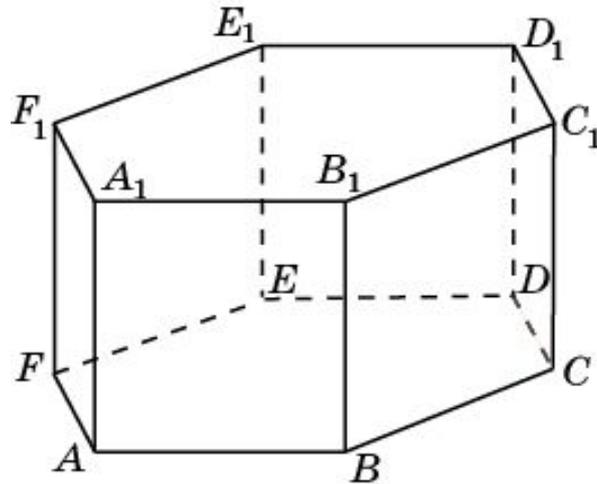


**Ответ.** а) точка  $B_1$ ;

б) середина отрезка  $AC$ .

## Упражнение 18

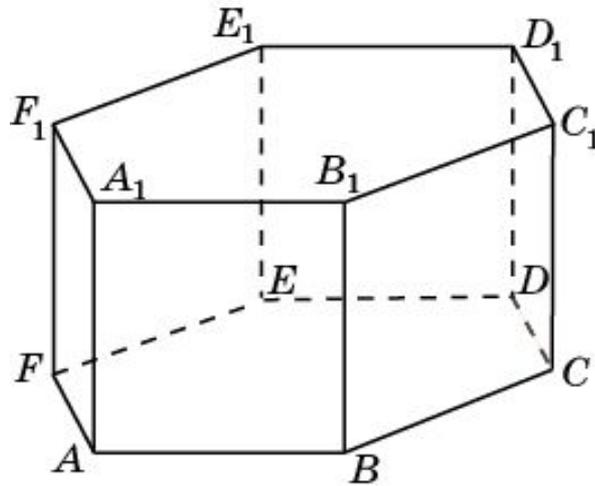
В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$  укажите ортогональную проекцию точки  $A$  на плоскость: а)  $A_1B_1C_1$ ; б)  $CDD_1$ ; в)  $DEE_1$ ; г)  $BDD_1$ ; д)  $BEE_1$ ; е)  $BFF_1$ ; ж)  $CEE_1$ ; з)  $CFF_1$ .



**Ответ.** а)  $A_1$ ; б)  $C$ ; в)  $E$ ; г)  $B$ ;  
д) точка пересечения прямых  $BE$  и  $AC$ ;  
е) точка пересечения прямых  $BF$  и  $AD$ ;  
ж) точка пересечения прямых  $CE$  и  $AD$ ;  
з) точка пересечения прямых  $CF$  и  $AE$ .

## Упражнение 19

В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$  укажите ортогональную проекцию отрезка  $AC_1$  на плоскость: а)  $ABC$ ; б)  $CDD_1$ ; в)  $CEE_1$ ; г)  $CFF_1$ ; д)  $BEE_1$ ; е)  $DFE_1$ .



**Ответ.** а) отрезок  $AC$ ; б) отрезок  $CC_1$ ;

в) отрезок, соединяющий точку  $C_1$  и середину отрезка  $CE$ ;

г) отрезок, соединяющий точку  $C_1$  и точку пересечения  $AF$  и  $AE$ ;

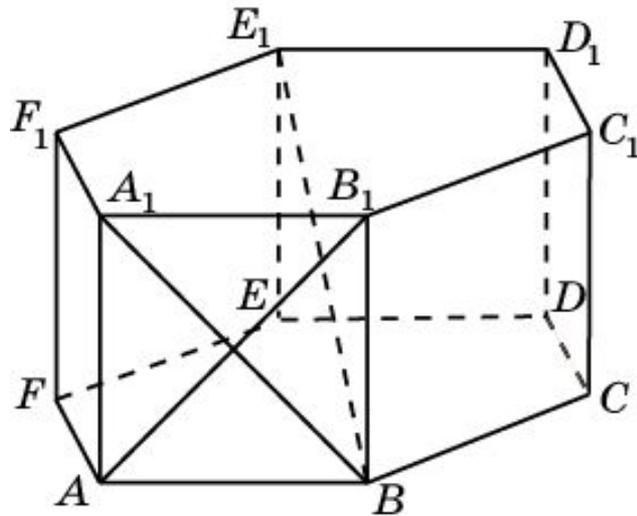
д) отрезок, соединяющий точку пересечения  $AC$  и  $BE$  с точкой

пересечения  $A_1C_1$  и  $B_1E_1$ ;

е) отрезок  $FD_1$ ;

## Упражнение 20

Докажите, что прямая  $BE_1$  правильной шестиугольной призмы  $A \dots F_1$  перпендикулярна прямой  $AB_1$ .



**Доказательство.** Ортогональной проекцией прямой  $BE_1$  на плоскость  $ABB_1$  является прямая  $BA_1$ , которая перпендикулярна прямой  $AB_1$ . По теореме о трех перпендикулярах, прямая  $BE_1$  перпендикулярна прямой  $AB_1$ .

## Упражнение 21

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите проекцию отрезка  $AC$ , если  $AC = 37$  см,  $AB = 35$  см.

**Ответ:** 12 см.

## Упражнение 22

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AC$ , если  $AB = 6$  см,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

Ответ: 12 см.

## Упражнение 23

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AB$ , если  $AC = 2\sqrt{10}$  см,  $BC = 3AB$ .

Ответ: 2 см.

## Упражнение 24

Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

**Ответ:** 9 см.

## Упражнение 25

Отрезок  $BC$  длиной 12 см является проекцией отрезка  $AC$  на плоскость  $\alpha$ . Точка  $D$  принадлежит отрезку  $AC$  и  $AD:DC = 2:3$ . Найдите отрезок  $AD$  и его проекцию на плоскость  $\alpha$ , если известно, что  $AB = 9$  см.

**Ответ:** 6 см; 4,8 см.

## Упражнение 26

Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ , катеты которого  $AC$  и  $BC$  равны соответственно 20 и 15 см. Через вершину  $A$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BC$ . Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

Ответ:  $3\sqrt{41}$  см.

## Упражнение 27

Сторона ромба равна  $a$ , острый угол  $60^\circ$ . Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна  $b$ . Найдите проекции диагоналей ромба.

Ответ:  $b$  и  $\sqrt{2a^2 + b^2}$  .