Временные ряды в эконометрических исследованиях

1. Специфика временного ряда как источника данных в эконометрическом моделировании
2. Автокорреляция уровней ряда и ее последствия
3. Моделирование тенденций временного ряда
4. Использование трендовых моделей для прогнозирования
5. Моделирование периодических колебаний
6. Моделирование взаимосвязей по временным рядам. Методы исключения тенденции
7. Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина-Уотсона
8. Обобщенный метод наименьших квадратов при построении модели регрессии по временным рядам
9. Сезонные колебания их учет при построении эконометрических моделей
10. Модели с лаговыми переменными. Метод инструментальных переменных. Метод Алмон

Модели на основе рядов динамики

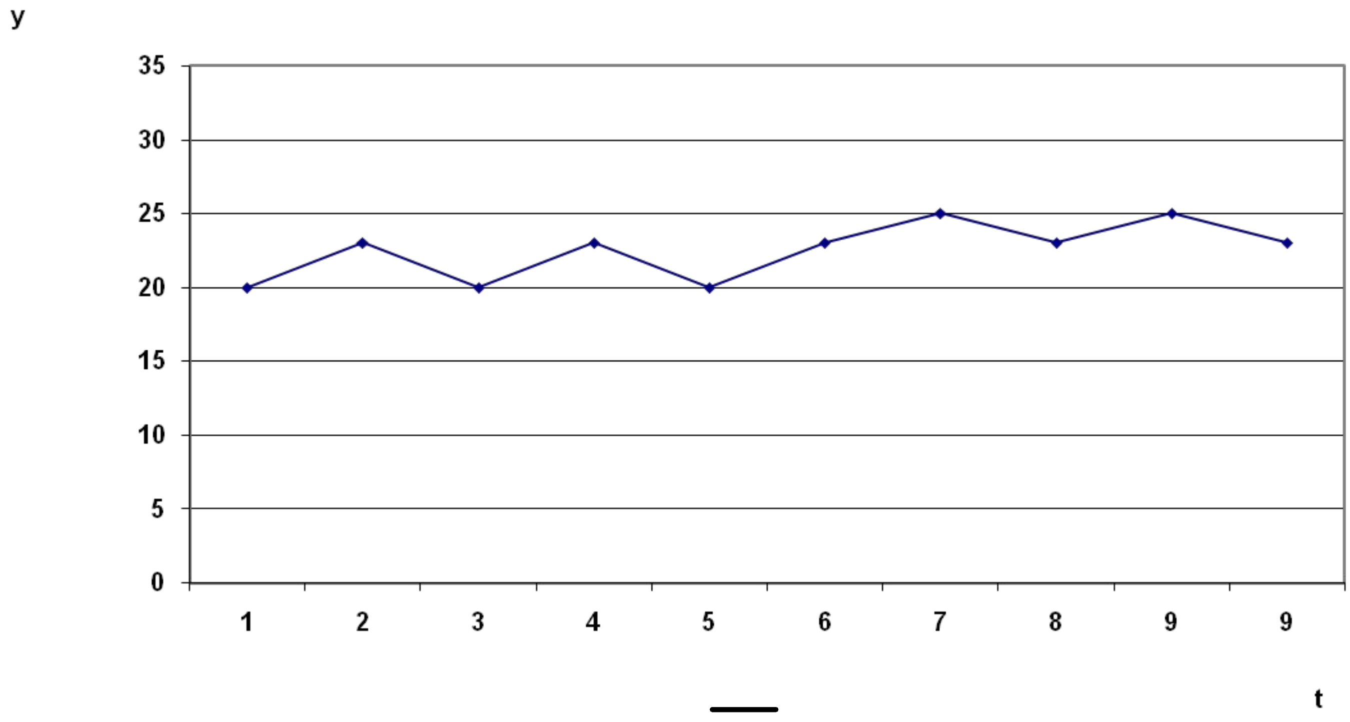
- Модели изолированного динамического ряда
- Модели системы взаимосвязанных рядов динамики
- Модели автрегрессии
- Модели с распределенным лагом

Компоненты временного ряда

- Тенденция *(T)*
- Периодические колебания *(P)*
- Случайные колебания *(E)*

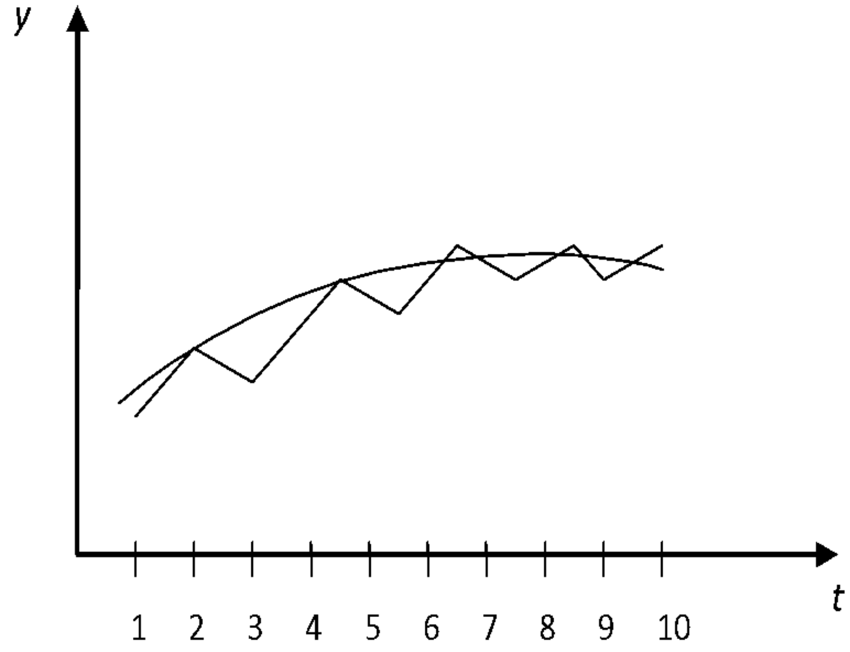
$$y_t = f(T, P, E)$$

Ряд без тенденции и периодических колебаний (стационарный ряд)



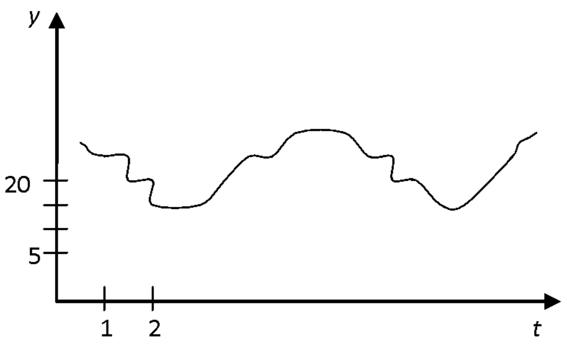
$$y_t = \overline{y} + E$$

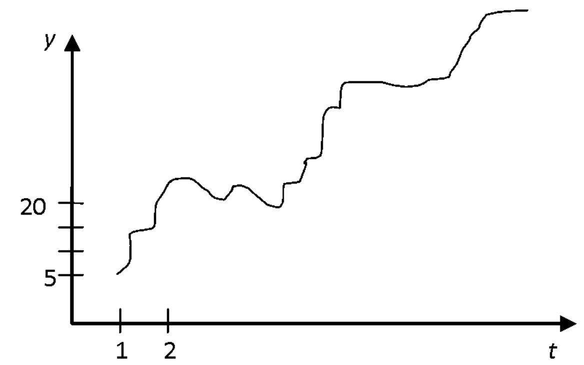
Ряд с тенденцией



$$y_t = f(T) + E$$

Ряды с периодическими колебаниями





- Ряд с периодическими и случайными колебаниями

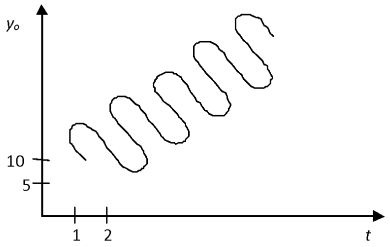
- Ряд с тенденцией, периодическими и случайными колебаниями

$$y_t = f(P, E)$$

$$y_t = f(T, P, E)$$

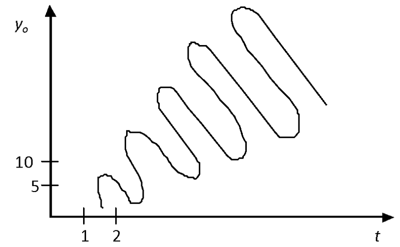
Аддитивная модель

$$y_t = T + P + E$$



Мультипликативная модель

$$y_t = T \times P \times E$$



Автокорреляция уровней ряда

Корреляционная зависимость между последовательными значениями уровней временного ряда называется *автокорреляцией* уровней ряда

$$r_{y_t y_{t-1}} = \frac{\overline{y_t y_{t-1}} - \overline{y_t} \cdot \overline{y_{t-1}}}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-1}}}$$

Пример

Имеются данные о расходах на конечное потребление и уровне дохода за 7 промежутков времени в д.е. y_t - расходы на потребление, x_t- доходы

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	7	8	10	9	11	12	14
x_t	12	13	16	15	16	18	19

t	x_t	x_{t-1}	y_t	y_{t-1}
1	12	-	7	-
2	13	12	8	7
3	16	13	10	8
4	15	16	9	10
5	16	15	11	9
6	18	16	12	11
7	19	18	14	12
Итого	X	X	X	X

$$r_{x_t x_{t-1}} = 0,81$$

$$r_{y_t y_{t-1}} = 0,84$$

Этапы построения модели тенденции (уравнения тренда)

- Выбор математической функции, описывающей тенденцию
- Оценка параметров модели
- Проверка адекватности выбранной функции и оценка точности модели
- Расчет точечного и интервального прогнозов

Виды математических функций, описывающих тенденцию

- Функции с монотонным характером возрастания (убывания) и отсутствием пределов роста (снижения)

- Кривые с насыщением, т. е. устанавливается нижняя или верхняя граница изменения уровней ряда

- *S*-образные кривые, т. е. кривые с насыщением, имеющие точку перегиба

Уравнения трендов

- линейная: $y = a + bt$
- параболическая: $y = a + bt + ct^2$
- степенная: $y = at^b$
- гипербола: $y = a + \frac{b}{t}$
- показательная: $y = a \cdot b^t$
- экспонента: $y = e^{a+bt}$

Линейный тренд

$$y_t = a + bt$$

t	$y_t = a + bt$	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$
1	$a + b$	-
2	$a + 2b$	b
3	$a + 3b$	b
4	$a + 4b$	b

Парабола 2-го порядка

$$y_t = a + bt + ct^2$$

t	$y_t = a + bt + ct^2$	Скорость $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	Ускорение $\Delta_t'' = \Delta_t - \Delta_{t-1}$
1	$a + b +$	-	-
2	$a + 2b + 4$	$b + 3$	-
3	$a + 3b + 9c$	$b + 5$	$2c$
4	$a + 4b + 16c$	$b + 7$	$2c$

Показательная функция

$$y_t = a \cdot b^t$$

t	$y_t = a \cdot b^t$	$K = y_t / y_{t-1}$
1	ab	-
2	ab^2	b
3	ab^3	b
4	ab^4	b

Степенной тренд

$$y = at^{b}$$

t^{b} - базисный коэффициент роста

$\overline{K} = \sqrt[n-1]{t^{b}}$ - средний коэффициент роста за период

Использование трендовых моделей для прогнозирования

$$Se_{(\hat{y}_p)} = \sqrt{MS_E\left[1+\frac{1}{n}+\frac{\left(t_p-\bar{t}\right)^2}{\sum\left(t-\bar{t}\right)^2}\right]}$$

$$\hat{y}_p - t_{tab.}\cdot Se_{\left(\hat{y}_p\right)} \le \hat{Y}_p \le \hat{y}_p + t_{tab.}\cdot Se_{\left(\hat{y}_p\right)}$$

Методы исключения тенденции при моделировании взаимосвязей по временным рядам

- *Метод отклонений от тренда*
- *Метод последовательных разностей*
- *Включение в модель регрессии по временным рядам фактора времени*

Метод отклонений от тренда

$$e_{y_t} = y_t - \hat{y}_t$$

$$e_{x_t} = x_t - \hat{x}_t$$

$$e_{y_t} = a + b \cdot e_{x_t}$$

$$(y_t - \hat{y}_t) = b(x_t - \hat{x}_t)$$

$$y_t = \hat{y}_t + b(x_t - \hat{x}_t)$$

$$y_p = \hat{y}_{t=p} + b(x_p - \hat{x}_{t=p})$$

y_p - прогнозное значение y_t

$\hat{y}_{t=p}$ - прогноз *y* по тренду при *t=p*

x_p - прогнозное значение x_t

$\hat{x}_{t=p}$ - прогноз x_t исходя из уравнения тренда при *t=p*

Метод последовательных разностей

$$\Delta_{y_t} = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta_{x_t} = x_t - x_{t-1}$$

$$\Delta_{y_t} = a + b \cdot \Delta_{x_t}$$

$$(y_t - y_{t-1}) = a + b(x_t - x_{t-1})$$

$$y_t = y_{t-1} + a + b(x_t - x_{t-1})$$

$$y_p = y_n + a + b(x_p - x_n)$$

y_p - прогнозное значение уровня ряда y_t

y_n - конечный уровень динамического ряда y_t

x_p и x_n - то же по ряду x_t

Включение в модель регрессии по временным рядам фактора времени

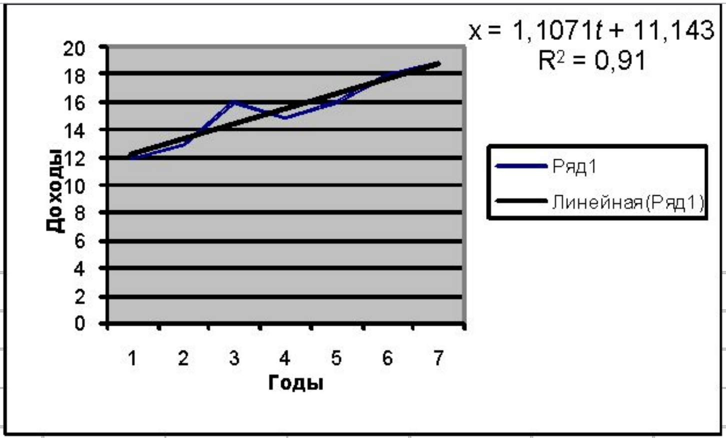
$$y_t = a + bx_t + ct$$

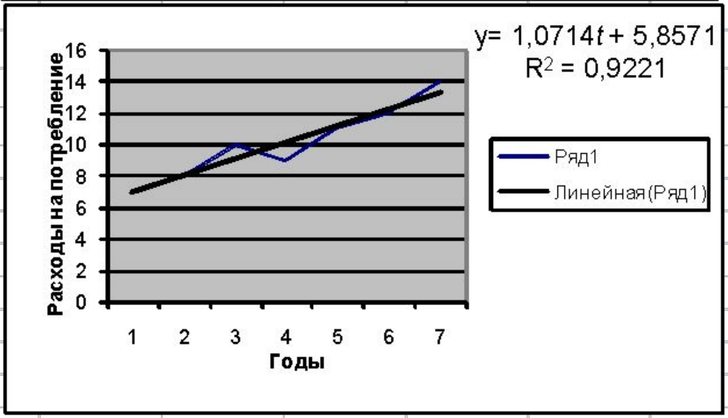
$$P = aK^{b_1}L^{b_2}e^{ct}$$

$$\ln P = \ln a + b_1 \ln K + b_2 \ln L + ct$$

Пример
Исключение тенденции методом отклонений от тренда

Годы	Расходы на потребление товара (усл.ден.ед.)	Доходы (усл.ден.ед.)
t	yt	xt
1	7	12
2	8	13
3	10	16
4	9	15
5	11	16
6	12	18
7	14	19





t	y_t	X_t	e_y	e_x
1	7	12	0,071429	-0,25
2	8	13	0	-0,35714
3	10	16	0,928571	1,535714
4	9	15	-1,14286	-0,57143
5	11	16	-0,21429	-0,67857
6	12	18	-0,28571	0,214286
7	14	19	0,642857	0,107143

ВЫВОД ИТОГОВ	
рессионная статистика	
Множеств	0,729664
R-квадрат	0,53241
Нормиров	0,438892
Стандартн	0,50382
Наблюден	7

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*
Регрессия	1	1,445113	1,445113	5,693128
Остаток	5	1,269173	0,253835	
Итого	6	2,714286		

	Коэффициент	*дартная о*	*статисти*	*ижние 95%*	*ерхние 95%*
Y-пересеч	4,69E-16	0,190426	2,46E-15	-0,48951	0,489506
ex	0,652632	0,273522	2,386028	-0,05048	1,355743

$$\hat{e}_{y_t} = 0,652\ e_x$$

Пример
Исключение тенденции методом первых разностей

Годы	Расходы на потребление товара (усл.ден.ед.)	Доходы (усл.ден.ед.)		
t	y_t	X_t	Δy_t	ΔX_t
1	7	12		
2	8	13	1	1
3	10	16	2	3
4	9	15	-1	-1
5	11	16	2	1
6	12	18	1	2
7	14	19	2	1

Регрессионная статистика

Множественный R	0,750824
R-квадрат	0,563737

$$\Delta_y = 0,39 + 0,66\Delta_x$$

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*
Регрессия	1	3,852201258	3,852201258	5,168776
Остаток	4	2,981132075	0,745283019	
Итого	5	6,833333333		

	Коэффициент	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
Y-пересечение	0,396226	0,48893051	0,810394129
Переменная X1	0,660377	0,290468006	2,273494309

Пример

Исключение тенденции методом включения в модель регрессии по временным рядам фактора времени

Регрессионная статистика

Множеств	0,981626
R-квадрат	0,963589
Нормиров	0,945384
Стандартн	0,563288
Наблюден	7

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*
Регрессия	2	33,58797	16,79398	52,92891
Остаток	4	1,269173	0,317293	
Итого	6	34,85714		

	Коэффициен	*дартная о*	*татисти*	*Р-Значение*
Y-пересеч	-1,41504	3,44066	-0,41127	0,701956
X	0,652632	0,305807	2,134128	0,099744
t	0,348872	0,354913	0,98298	0,38127

$$y_t = -1,415 + 0,653x_t + 0,349t$$

Автокорреляция в остатках
Критерий Дарбина-Уотсона

- ***Коэффициент автокорреляции в остатках***

$$r_{a_e} = \frac{\overline{e_t e_{t-1}} - \overline{e_t} \cdot \overline{e_{t-1}}}{\sigma_{e_t} \cdot \sigma_{e_{t-1}}}$$

$$r_{a_e} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Критерий Дарбина-Уотсона

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$d \cong 2(1 - r_{a_e})$$

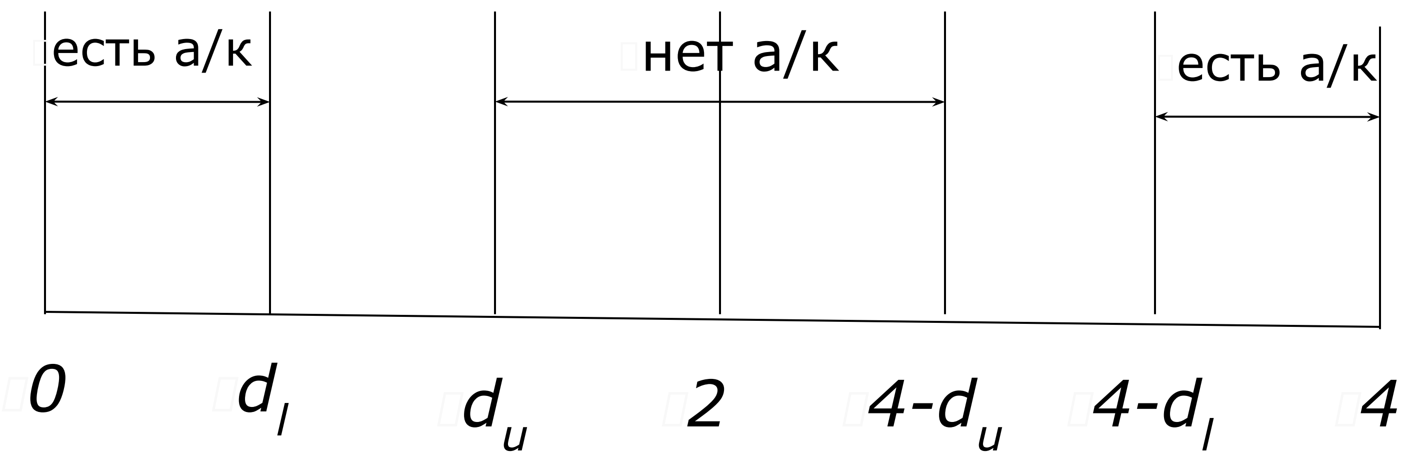
$$0 \le d \le 4$$

Пример $\hat{y}_t = 5{,}857 + 1{,}07t$

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	e_{t-1}	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	$e_t^{\ 2}$
1	7	6,928571	0,071429	-	-	-	0,005102
2	8	8	0	0,071429	-0,07143	0,005102	0
3	10	9,071429	0,928571	0	0,928571	0,862245	0,862245
4	9	10,14286	-1,14286	0,928571	-2,07143	4,290816	1,306122
5	11	11,21429	-0,21429	-1,14286	0,928571	0,862245	0,045918
6	12	12,28571	-0,28571	-0,21429	-0,07143	0,005102	0,081633
7	14	13,35714	0,642857	-0,28571	0,928571	0,862245	0,413265
Итого	X	X	X	X	X	6,887755	2,714286

$$d = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^{\ 2}} = \frac{6{,}888}{2{,}714} = 2{,}538$$

$$d = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^{\ 2}} = \frac{6{,}888}{2{,}714} = 2{,}538$$



Обобщенный метод наименьших квадратов при построении модели регрессии по временным рядам (ОМНК)

Алгоритм ОМНК

1. Преобразование исходных переменных $x_t^* = x_t - r_e x_{t-1}$ $y_t^* = y_t - r_e y_{t-1}$

2. Применение обычного МНК к уравнению и определение *a** и *b* $y_t^* = a^* + bx_t^* + V_t$

3. Расчет параметра *a* $a = \dfrac{a^*}{1 - r_e}$

4. *Переход к исходному уравнению* $y_t = a + bx_t + e_t$

Поправка Прайса-Винстена

$$x_1^* = x_1 \cdot \sqrt{1 - r_e^2}$$

$$y_1^* = y_1 \cdot \sqrt{1 - r_e^2}$$

$$r_e = 1 - \frac{d}{2}$$

Пример

По данным за 1995-2003 гг. по Тамбовской области рассматривается зависимость потребления растительного масла на душу населения (y, кг) от потребления овощей (x, кг)

Годы	y_t	x_t	e_t	e_{t-1}	y_t^*	x_t^*
1	2	3	4	5	6	7
1995	7,2	100	-0,272	-	5,97	82,916
1996	7,5	101	-0,108	-0,272	11,525	156,9
1997	7,9	103	0,021	0,108	12,093	159,46
1998	8,6	105	0,450	0,021	13,016	162,578
1999	9,5	121	-0,818	0,450	14,307	179,696
2000	10,9	121	0,582	-0,818	16,210	188,64
2001	10,3	120	0,117	0,582	16,393	187,64
2002	10,1	119	0,053	0,117	15,858	186,081
2003	10,7	124	-0,025	0,053	16,346	190,522

$$\hat{y}_t = -6{,}0791 + 0{,}1355x$$

$t \qquad -3{,}5 \qquad +8{,}9$

$$R^2 = 0{,}9188 \qquad F = 79{,}2$$

$$r_e = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2} = \frac{-0{,}734}{1{,}314} = -0{,}55901$$

Расчет преобразованных значений

$$y_1^* = 7,2\sqrt{1-(-0,559)^2} = 5,97$$

$$x_1^* = 100\sqrt{1-(-0,559)^2} = 82,916$$

$$y_2^* = 7,5-(-0,559)7,2 = 11,525$$

$$x_2^* = 101-(-0,559)100 = 156,9$$

- и т.д.

$$y^* = -2{,}8156 + 0{,}0984x^*$$

$R^2 = 0{,}961$ $\qquad$ $F = 172{,}3$

$$a = a^*/(1 - r_e) = -1{,}806$$

$$\hat{y} = -1{,}806 + 0{,}0984x$$

$R^2 = 0{,}845$ $\qquad$ $r_e = 0{,}239$

Моделирование периодических колебаний

- Ряды могут содержать только периодические колебания

- Ряды могут содержать и периодические колебания и тенденцию

- Для выявления измерения периодических колебаний во временных рядах можно использовать метод гармонического анализа ряда
- Сущность метода состоит в представлении функций в виде суммы гармонических колебаний

Ряд Фурье

- *Ряд Фурье* -один из методов моделирования временного ряда с периодическими колебаниями

- Его построение зависит от наличия или отсутствия тенденции в ряду динамики. При отсутствии тенденции методика построения ряда Фурье применяется непосредственно к уровням динамического ряда

- Если же в ряду динамики наблюдается тенденция, то ряд Фурье применяется к отклонениям от тенденции

Моделирование периодических колебаний

- Ряд Фурье можно описать в виде функции:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$$

- Это ряд с двумя гармониками. Могут быть и 3 и 4 гармоники. Чаще всего используется ряд Фурье не более чем с 4 гармониками.
- a_0 - среднее значение ряда
- Параметры определяются с помощью МНК

Учет сезонности при построении модели регрессии

$$y_t = a + bx_t + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$$

- $z_1 = 1$ – для первого квартала,
- 0 – для остальных;
- $z_2 = 1$ – для второго квартала,
- 0 – для остальных;
- $z_3 = 1$ – для третьего квартала,
- 0 – для остальных.

Переход от общего уравнения к уравнениям за каждый квартал

- для I квартала $y_t = (a + c_1) + bx_t$
- для II квартала $y_t = (a + c_2) + bx_t$
- для III квартала $y_t = (a + c_3) + bx_t$
- для IV квартала $y_t = a + bx_t$

Пример. Объем продаж товара фирмой (y – тыс. ед.) исследуется в зависимости от объема продаж его дочерним предприятием (x – тыс. ед.) по данным за 5 лет

Годы	Кварталы								Итого	
	I		II		III		IV			
	y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*
2006	11	9	15	10	6	8	12	9	44	36
2007	11	10	16	9	4	3	13	11	44	33
2008	10	7	14	10	7	8	12	11	43	36
2009	10	12	16	9	8	11	13	12	47	44
2010	11	8	18	16	7	6	12	12	48	42
Итого	53	46	79	54	32	36	62	55	226	191
В среднем	10,6	9,2	15,8	10,8	6,4	7,2	12,4	11	45,2	38,2

год	квартал	t	y_t	x_t	z_1	z_2	z_3
2006	1	1	11	9	1	0	0
	2	2	15	10	0	1	0
	3	3	6	8	0	0	1
	4	4	12	9	0	0	0
2007	1	5	11	10	1	0	0
	2	6	16	9	0	1	0
	3	7	4	3	0	0	1
	4	8	13	11	0	0	0
2008	1	9	10	7	1	0	0
	2	10	14	10	0	1	0
	3	11	7	8	0	0	1
	4	12	12	11	0	0	0
2009	1	13	10	12	1	0	0
	2	14	16	9	0	1	0
	3	15	8	11	0	0	1
	4	16	13	12	0	0	0
2010	1	17	11	8	1	0	0
	2	18	18	16	0	1	0
	3	19	7	6	0	0	1
	4	20	12	12	0	0	0

ВЫВОД ИТОГОВ

$$\hat{y}_t = 8{,}896 + 0{,}319x_t - 1{,}227z_1 + 3{,}464z_2 - 4{,}789z_3$$

рессионная ст ат ист ика	
Множестве	0,977311
R-квадрат	0,955137
Нормиров:	0,943173
Стандартн	0,865054
Наблюден	20

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	начимост ь F
Регрессия	4	238,9752	59,74381	79,83739	6,32E-10
Остаток	15	11,22478	0,748319		
Итого	19	250,2			

	Коэффициент	тандарт ная ост ат ист и	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
Y-пересеч	8,895575	1,072979	8,290537	5,53E-07	6,608574	11,18258
xt	0,318584	0,090983	3,501588	0,003213	0,124659	0,512509
z1	-1,22655	0,571093	-2,14772	0,048484	-2,44381	-0,00929
z2	3,463717	0,547411	6,327455	1,36E-05	2,296938	4,630495
z3	-4,78938	0,647194	-7,40023	2,22E-06	-6,16884	-3,40992

Моделирование сезонных колебаний

- ***Аддитивная модель*** $y_i = T + S + E$
- ***Мультипликативная модель*** $y_i = T \cdot S \cdot E$
- Приблизительно равная сезонная вариация указывает на существование аддитивной модели.
- Усиление сезонной вариации с возрастанием тренда указывает на существование мультипликативной модели.

Построение аддитивной модели

1. Нахождение сглаженных уровней динамического ряда методом скользящих средних;
2. Оценка сезонной компоненты и ее корректировка;
3. Элиминирование сезонной компоненты из исходных данных временного ряда;
4. Построение уравнения линейного тренда по уровням ряда с элиминированием сезонности;
5. Расчет выровненных значений трендовой составляющей;
6. Расчет теоретических уровней ряда с учетом сезонности;
7. Расчет случайной компоненты, позволяющий оценить качество построенной модели.

Пример

Количество проданной продукции в течение последних 13 кварталов

Таблица 1

Год	Квартал	Объем продаж, тыс. шт
I	1	239
	2	201
	3	182
	4	297
II	1	324
	2	278
	3	257
	4	384
III	1	401
	2	360
	3	335
	4	462
IV	1	481


Объем продаж
Объем продаж, тыс. шт.
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
Квартал
Объем продаж

Расчет сезонной компоненты в аддитивной модели

Год	Квартал	Объем продаж тыс. шт Y_t	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6=3-5
	1	239	-		
	2	201	-		
			229,75		
I	3	182		240,4	-58,4
			251		
	4	297		260,6	36,4
			270,25		
	1	324		279,6	44,4
			289		
II	2	278		299,9	-21,9
			310,75		
	3	257		320,4	-63,4
			330		
	4	384		340,3	43,8
			350,5		
	1	401		360,3	40,8
			370		
III	2	360		379,8	-19,8
			389,5		
	3	335		399,5	-64,5
			409,5		
	4	462	-		
IV	1	481	-		

Расчет средних значений сезонной компоненты в аддитивной модели

	Год	Квартал				
		1	2	3	4	
	I II III	 44,4 40,8	 -21,9 -19,8	-58,4 -63,4 -64,5	36,4 43,8	
Итого		85,2	-41,7	-186,3	80,2	
Среднее значение (оценка сезонной компоненты)		42,6	-20,8	-62,1	40,1	Сумма = -0,2
Скорректированная сезонная компонента S		42,65	-20,55	-62,15	40,05	Сумма = 0

Для определения скорректированной сезонной компоненты сумму средних значений надо разделить на 4 квартала (-0,2 : 4 = - 0,05). Затем из каждого среднего значения сезонной компоненты вычитаем это число (например, 42,6- (-0,05)=42,65).

Год	Квартал	Объем продаж тыс. шт Y_t	Скорректированная сезонная компонента S	Десезонализированный объем продаж, тыс.шт. Y_t - S=T+E	T	T+S	E=yt-(T+S)	E^2	$\boxed{(y_t - \bar{y}_n)^2}$
1	2	3	4	5=3-4	6	7=6+4	8=3-7	9	10
I	1	239	42,65	196,35	199,998	242,648	-3,648	13,310	7081,896
	2	201	-20,55	221,55	219,977	199,427	1,573	2,473	14921,600
	3	182	-62,15	244,15	239,957	177,807	4,193	17,585	19924,452
	4	297	40,05	256,95	259,936	299,986	-2,986	8,914	684,032
II	1	324	42,65	281,35	279,915	322,565	1,435	2,060	0,716
	2	278	-20,55	298,55	299,894	279,344	-1,344	1,806	2038,884
	3	257	-62,15	319,15	319,873	257,723	-0,723	0,523	4376,352
	4	384	40,05	343,95	339,852	379,902	4,098	16,792	3702,236
III	1	401	42,65	358,35	359,831	402,481	-1,481	2,194	6060,000
	2	360	-20,55	380,55	379,810	359,260	0,740	0,547	1357,628
	3	335	-62,15	397,15	399,790	337,640	-2,640	6,967	140,328
	4	462	40,05	421,95	419,769	459,819	2,181	4,758	19278,212
IV	1	481	42,65	438,35	439,748	482,398	-1,398	1,954	24915,360
								79,884	104481,692

$$r^2 = 1 - \frac{79,884}{104481,692} = 0,9992$$

Пример 1 (прогнозирование на основе аддитивной модели)

Прогнозирование по тренду с учетом сезонной компоненты

Год	Квартал	Трендовый прогноз	Скорректированная сезонная компонента S	Прогноз с учетом сезонной компоненты
1	2	3	4	5=3+4
IV	1	438,35	42,65	481,00
	2	460,20	-20,55	439,65
	3	480,20	-62,15	418,05
	4	500,20	40,05	540,25

Пример 2
Построение мультипликативной модели

Количество проданной продукции в течение последних 13 кварталов

Год	Квартал	Объем продажт тыс. шт Y_t
1	2	3
I	1	70
	2	66
	3	65
	4	71
II	1	79
	2	66
	3	67
	4	82
III	1	84
	2	69
	3	72
	4	87
IV	1	94


Объем продаж тыс. шт
Объем продаж, тыс. шт.
100
80
60
40
20
0
1
3
5
7
9
11
13
Квартал
Объем продаж тыс. шт

Расчет значений сезонной компоненты

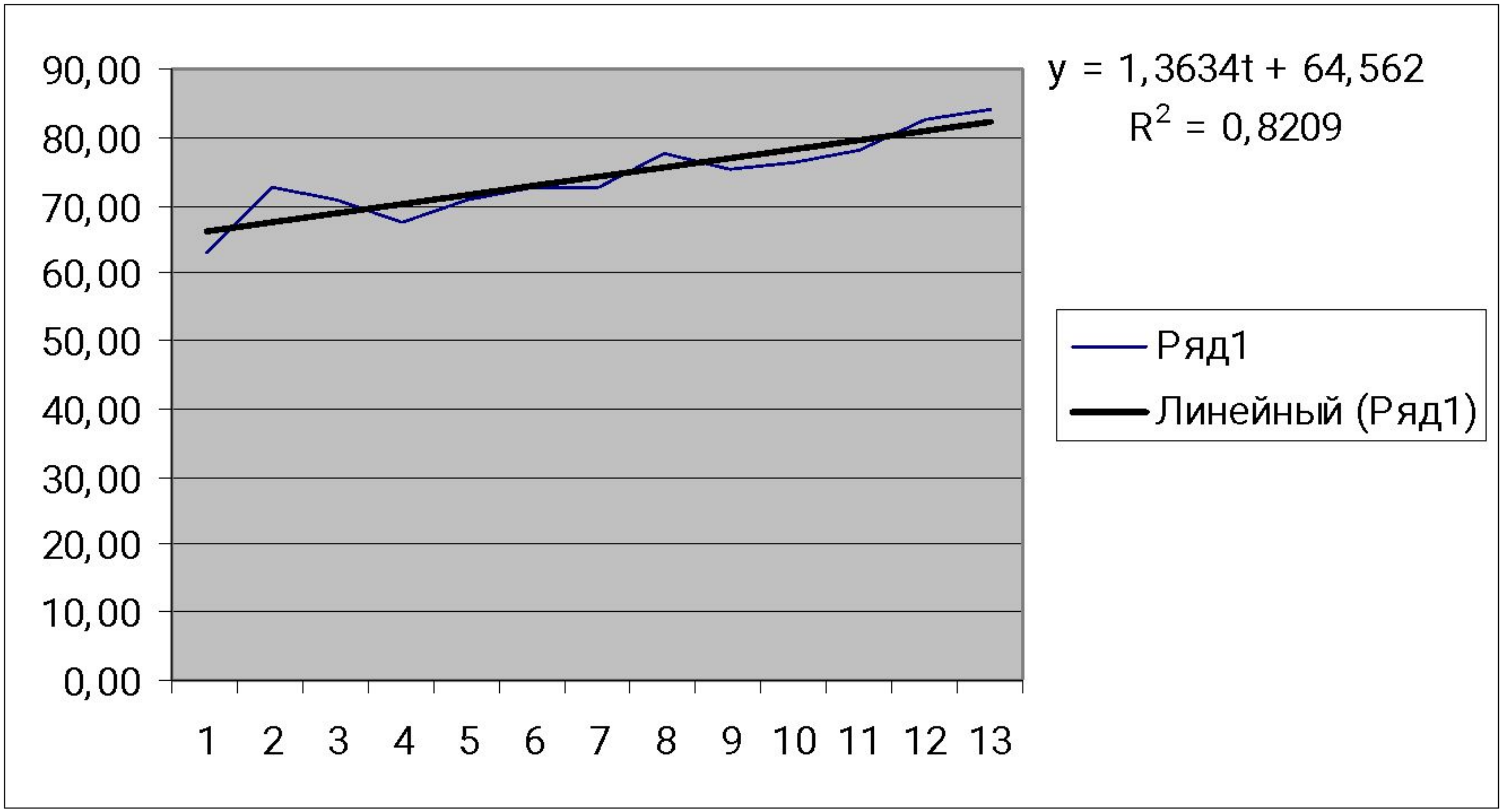
Год	Квартал	Объем продаж тыс. шт Y_t	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя S_t	Коэффициент сезонности
1	2	3	4	5	6=3:5
	1	70			
	2	66			
			68		
I	3	65		69,13	0,940
			70,25		
	4	71		70,25	1,011
			70,25		
	1	79		70,50	1,121
			70,75		
II	2	66		72,13	0,915
			73,5		
	3	67		74,13	0,904
			74,75		
	4	82		75,13	1,092
			75,5		
	1	84		76,13	1,103
			76,75		
III	2	69		77,38	0,892
			78		
	3	72		79,25	0,909
			80,5		
	4	87			
IV	1	94			

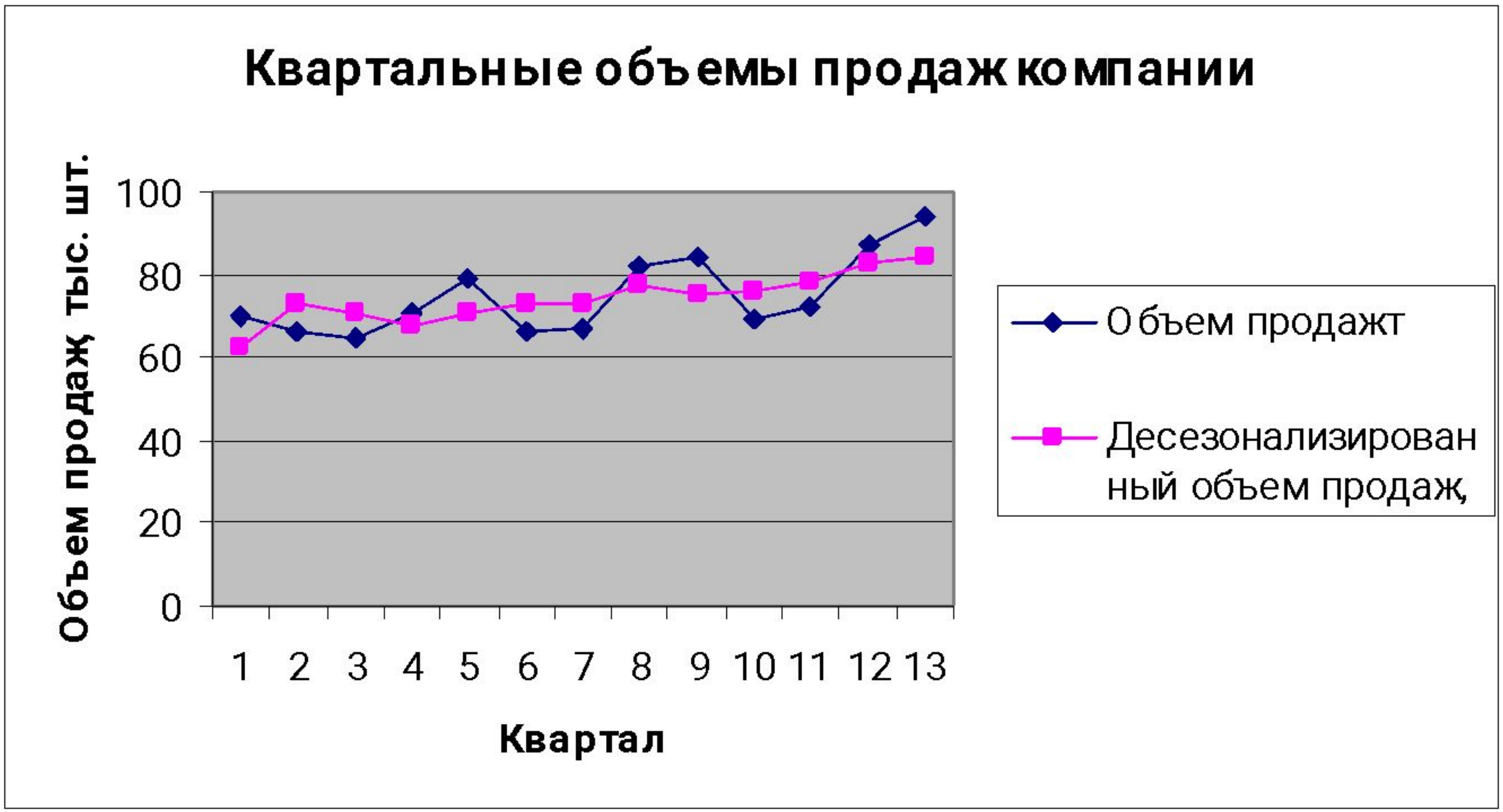
Расчет средних значений сезонной компоненты

	Год	Квартал				
		1	2	3	4	
	I			0,94	1,011	
	II	1,121	0,915	0,904	1,092	
	III	1,103	0,892	0,909		
Итого		2,224	1,807	2,753	2,103	
Среднее значение (оценка сезонной компоненты)		2,224:2=1,112	1,807:2=0,903	2,753:3=0,918	2,103:2=1,051	Сумма = 3,984
Скорректированная сезонная компонента S		1,116	0,907	0,922	1,055	Сумма = 4

$$k = 4/3{,}984 = 1{,}004$$

Год	Квартал	Объем продажт тыс. шт Y_t	Скорректированная сезонная компонента S	Десезонализированный объем продаж, тыс.шт.	T	T*S	E=y_t/(T*S)
1	2	3	4	5=3:4	6	7=6*4	8=3/7
	1	70	1,116	62,7	65,933	73,581	0,951
	2	66	0,907	72,8	67,2967	61,038	1,081
I	3	65	0,922	70,5	68,6604	63,305	1,027
	4	71	1,055	67,3	70,0242	73,876	0,961
	1	79	1,116	70,8	71,3879	79,669	0,992
II	2	66	0,907	72,8	72,7516	65,986	1,000
	3	67	0,922	72,7	74,1154	68,334	0,980
	4	82	1,055	77,7	75,4791	79,630	1,030
	1	84	1,116	75,3	76,8429	85,757	0,980
III	2	69	0,907	76,1	78,2066	70,933	0,973
	3	72	0,922	78,1	79,5703	73,364	0,981
	4	87	1,055	82,5	80,9341	85,385	1,019
IV	1	94	1,116	84,2	82,2978	91,844	1,023


y = 1,3634t + 64,562
R^2 = 0,8209
Ряд1
Линейный (Ряд1)
90,00
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13


Квартальные объемы продаж компании
Объем продаж, тыс. шт.
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
Квартал
Объем продажт
Десезонализированный объем продаж,

Пример 2 (прогнозирование на основе мультипликативной модели)

Прогнозирование по тренду с учетом сезонной компоненты

Год	Квартал	Трендовый прогноз	Скорректированная сезонная компонента S	Прогноз с учетом сезонной компоненты
1	2	3	4	5=3*4
IV	1	84,23	1,116	94,00
	2	83,64	0,907	75,86
	3	85	0,922	78,37
	4	86,36	1,055	91,11

Модели с лаговыми переменными

- 1) модели с лаговыми объясняющими переменными или иначе *модели с распределенными лагами*

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + b_k x_{t-k} + e_t$$

- 2) модели с лаговыми зависимыми переменными – *модели авторегрессии*

$$y_t = a + b x_t + c_1 y_{t-1} + \ldots + c_k y_{t-k} + e_t$$

- 3) модели с лаговыми зависимыми и независимыми переменными, т. е. *авторегрессионные модели с распределенными лагами*

$$y_t = a + b_1 y_{t-1} + \ldots + b_k y_{t-k} + c_0 x_t + c_1 x_{t-1} + \ldots + c_k x_{t-k} + e_t$$

Модель с распределенными лагами

$$\hat{y}_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + b_3 x_{t-3} + b_4 x_{t-4}$$

- Данная модель означает, что изменение во времени *t* объясняющей переменный *x* будет влиять на значения результативного признака *y* в течение 4-х следующих моментов времени

- Коэффициент b_0 - краткосрочный мультипликатор. Он характеризует среднее изменение результата *y* при изменении на 1 единицу своего измерения в фиксированный момент времени *t*.

- В момент времени *t+1* воздействие объясняющей переменной *x* на результат *y* составит ($b_0 + b_1$) единиц, а в момент времени *t+2* общее изменение *y* составит ($b_0 + b_1 + b_2$) единиц.

Промежуточные мультипликаторы

- при *k*=4:
- $b_0 + b_1$ - изменение *y* в момент времени *t+1*;
- $b_0 + b_1 + b_2$ - изменение *y* в момент времени *t+2*;
- $b_0 + b_1 + b_2 + b_3$ - изменение *y* в момент времени *t+3*.

- Долгосрочный мультипликатор $\sum_{j=0}^{k} b_j$
- При *k*=4 долгосрочный мультипликатор составит

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

- Он характеризует общее среднее изменение *y* через 4 временных интервала при увеличении *x* в момент времени *t* на 1 единицу

Относительные коэффициенты модели β_j

- Характеризует долю общего изменения *y* в момент времени *t+j*.

$$\beta_j = \frac{b_j}{\sum b_j}$$

$$0 \langle \beta_j \langle 1$$

$$\sum \beta_j = 1$$

Средняя величина лага

$$\bar{j} = \sum_{j=0}^{k} j\beta_j$$

- Показывает средний интервал времени, в течение которого будет происходить изменение зависимой переменной *y* под воздействием изменения объясняющей переменной *x* в момент времени *t*.

- Чем меньше величина среднего лага, тем быстрее реагирует результат *y* на изменение *x*. И наоборот, высокое значение среднего лага показывает, что воздействие объясняющей переменной на результат будет сказываться с течением длительного промежутка времени.

Медианный лаг

- тот период времени, в течение которого с момента времени *t* будет реализована половина общего эффекта воздействия объясняющей переменной *x* на результат y_t.

$$\sum_{j=0}^{M_e} \beta_j = 0,5$$

Пример

$$\hat{y}_t = 0{,}8 + 0{,}7x_t + 1{,}0x_{t-1} + 1{,}5x_{t-2} + 0{,}6x_{t-3} + 0{,}2x_{t-4}$$

- где t – время в годах, y_t - основные производственные фонды (млн. руб.),
- x_t - размер инвестиций (млн. руб.)

- Рост инвестиций на 1 млн. руб. в текущем периоде приводит к росту основных производственных фондов:
- - в том же периоде на 0,7 млн. руб. (краткосрочный мультипликатор);
- - через 1 год на 0,7+1=1,7 млн. руб.;
- - через 2 года на 0,7+1+1,5=3,2 млн. руб.;
- - через 3 года на 3,8 млн. руб. (промежуточный, как и предыдущие два, мультипликатор);
- - через 4 года на 4 млн. руб. (долгосрочный мультипликатор).

- Относительные коэффициенты модели:

- β_0 = 0,7 / 4 = 0,175;
- β_1 = 1 / 4 = 0,25;
- β_2 = 1,5 / 4 = 0,375;
- β_3 = 0,6 / 4 = 0,15;
- β_4 = 0,2 / 4 = 0,05.

- В текущем году реализуется 17,5% воздействия увеличения инвестиций на рост основных производственных фондов, а через год еще 25%. Через 2 года – еще 37,5%, через 3 года – еще 15% и через 4 года – еще 5%.

- $\bar{j} = 0 \cdot 0{,}175 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}05 = 1{,}65$ *года.*

- Основная часть эффекта увеличения инвестиций проявляется через 1,65 года.

- Медианный лаг составляет два года, т. е. увеличение инвестиций в период времени *t* на 1 млн. руб. приводит к росту размера основных производственных фондов через 2 года на величину, составляющую половину долгосрочного мультипликатора, т. е. на 2 млн. руб.

Модели авторегрессии

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + e_t$$

- параметр b_0 характеризует краткосрочное изменение y_t под воздействием изменения x_t на 1 единицу.

- долгосрочный мультипликатор изменения *y:*

$$b = \frac{b_0}{1 - c_1}$$