«Паспортная» прямая при решении задач на нахождение отношений между отрезками

Я – «паспортная прямая»

Основа метода:

- обобщённая теорема Фалеса;
- при проецировании на «паспортную» прямую нельзя проводить прямые, **<u>параллельные тем</u>**, на которых есть рассматриваемые отношения

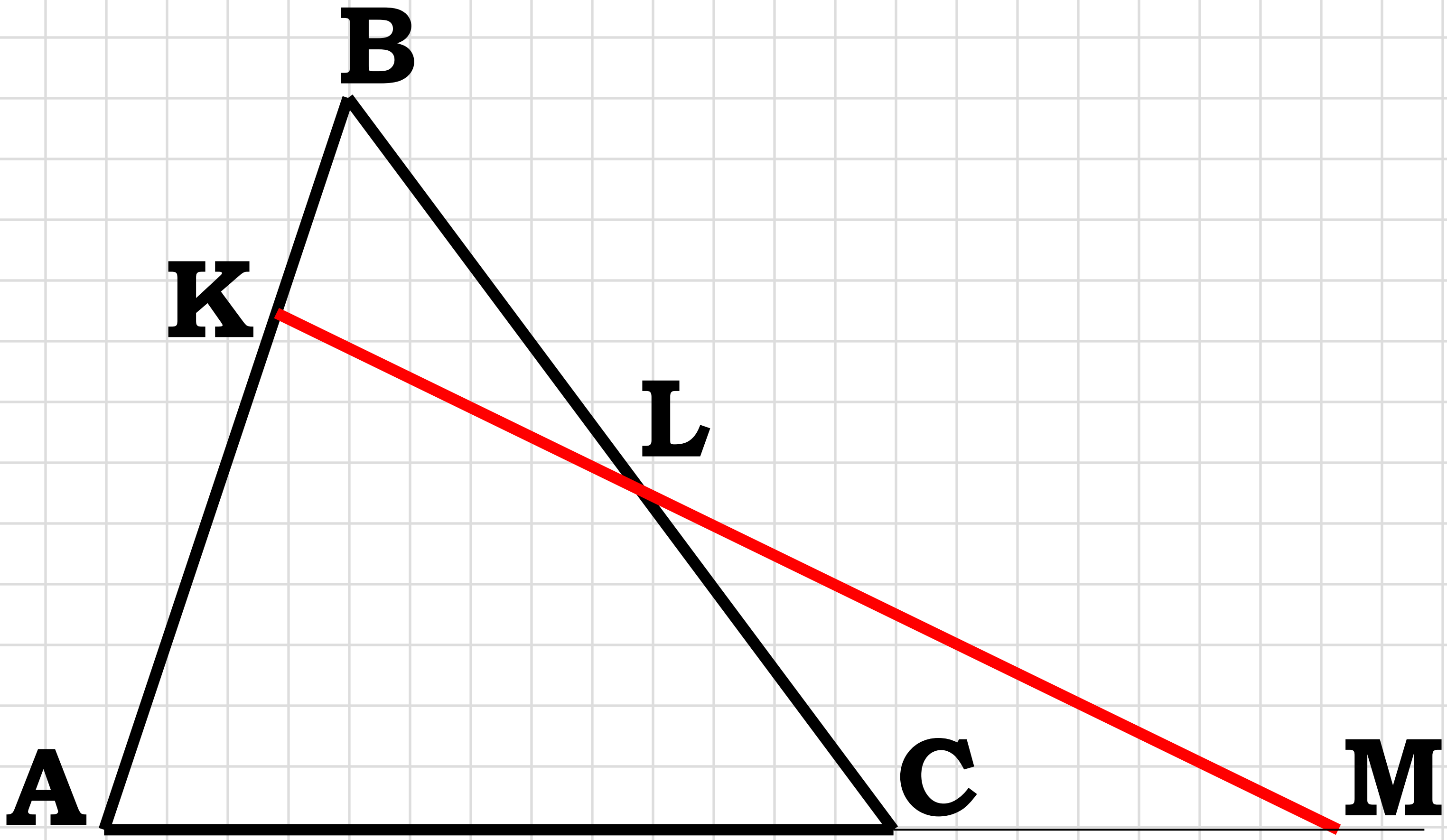
Менелай Александрийский-

- I век, древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии. Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему о прямой, пересекающей стороны треугольника (т. Менелая).

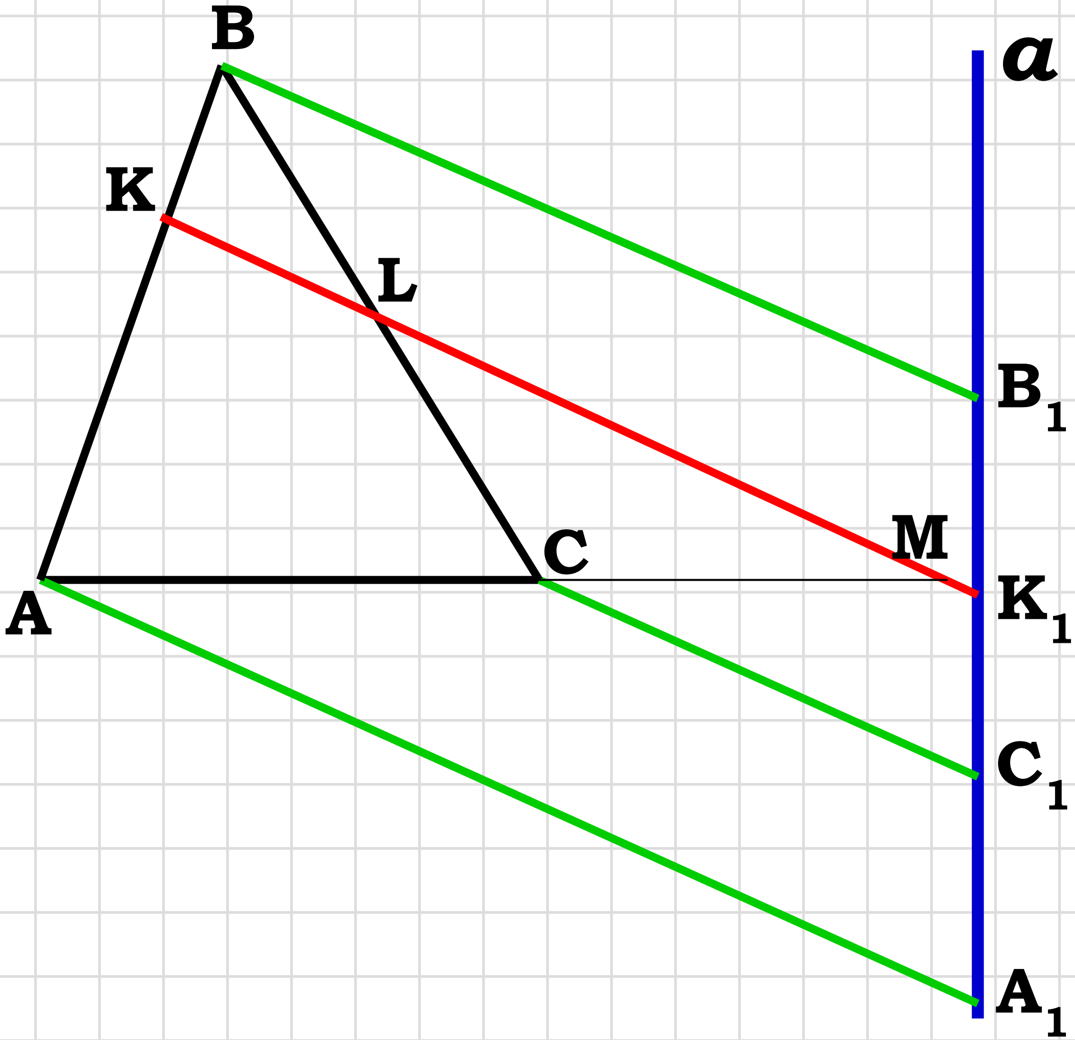
Теорема Менелая

- Если прямая пересекает стороны AB, BC, AC треугольника ABC (или их продолжения) в точках K, L, M соответственно, то справедливо соотношение

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$


B
K
L
A
C
M

спроецируем точки на «паспортную прямую» *a* параллельно прямой KL



$$\frac{AK}{KB} = \frac{A_1K_1}{K_1B_1}$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{B_1K_1}{K_1C_1}$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{C_1K_1}{K_1A_1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{A_1K_1}{K_1B_1}\\[2ex]\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{B_1K_1}{K_1C_1}\\[2ex]\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{C_1K_1}{K_1A_1}\end{array}\right] \Rightarrow, \quad \frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=$$

$$=\frac{A_1K_1}{K_1B_1}\cdot\frac{B_1K_1}{K_1C_1}\cdot\frac{C_1K_1}{K_1A_1}=1$$

ч.т.д.

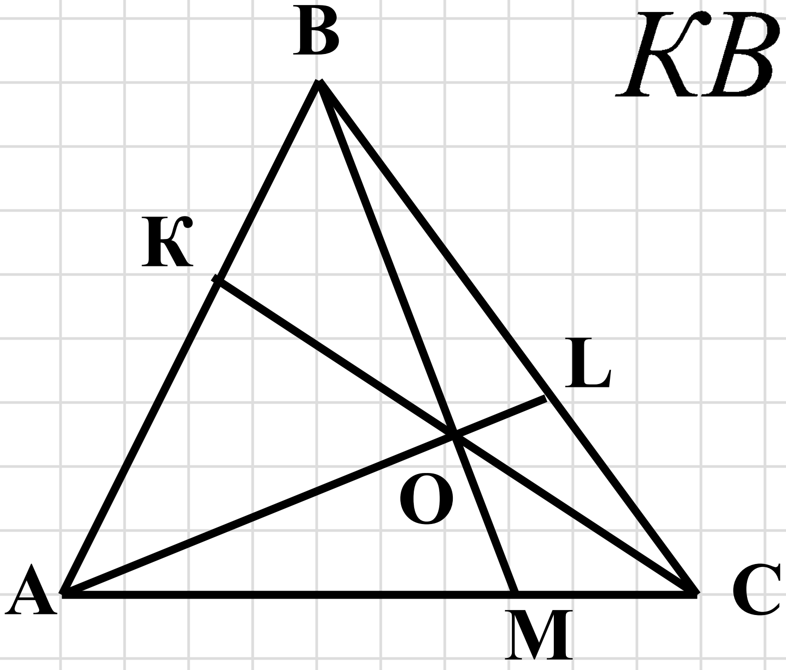
Теорема Чевы

- Чева Джованни (03.03.1648, Милан – 13.12.1734, Мантуя) – итальянский инженер и математик. Окончил Пизанский университет. Основные работы по геометрии и механике. Доказал (1678 г) теорему, которая сейчас носит его имя, построил учение о секущих.

Теорема Чевы

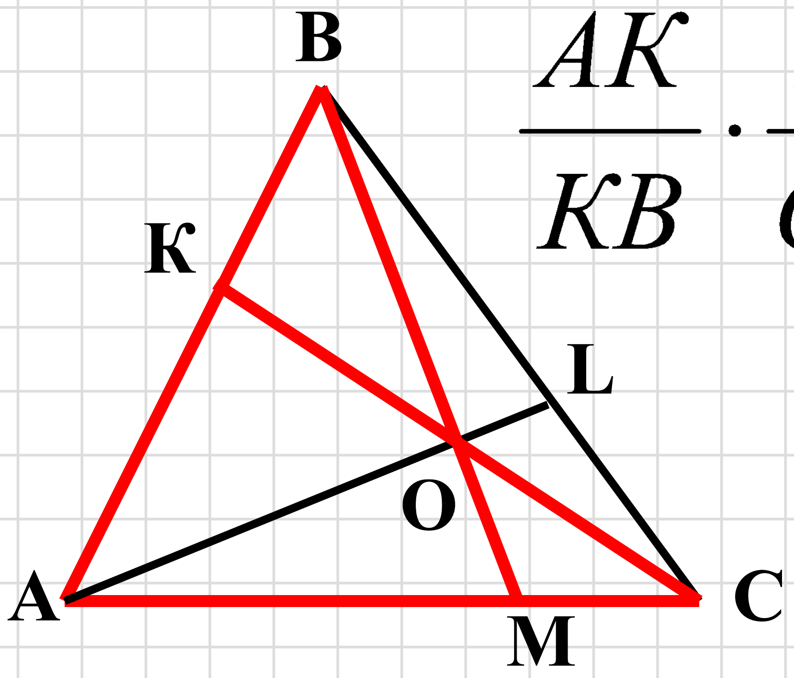
- Если в треугольнике ABC прямые AL, BM и CK пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

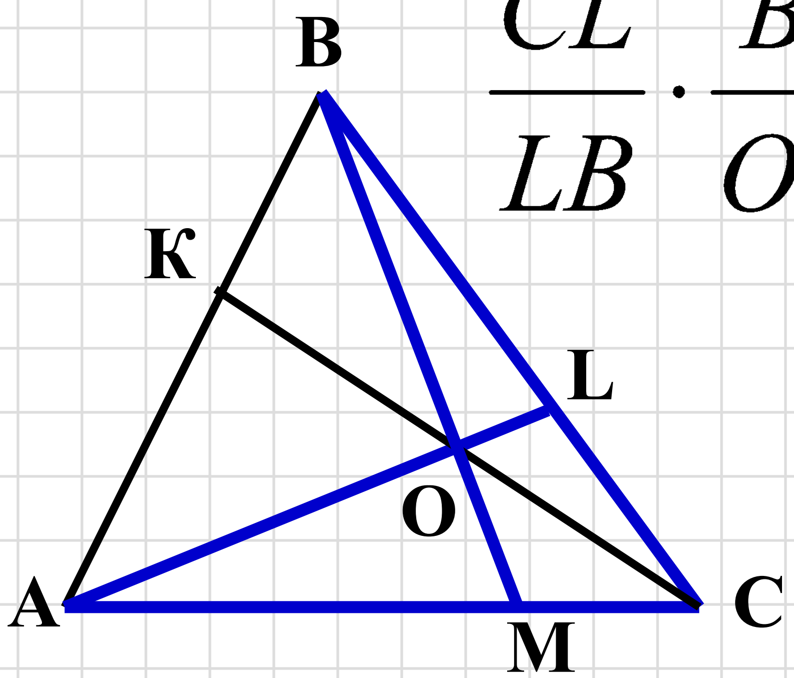


Доказательство:

Применим т.Менелая с двух сторон:



$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MC}{CA}=1 \quad (1)$$



$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MA}{AC}=1 \quad (2)$$

Имеем:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MC}{CA}=1 \quad (1)$$

$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MA}{AC}=1 \quad (2)$$

---

(1) : (2)

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{LB}{LC}=1$$

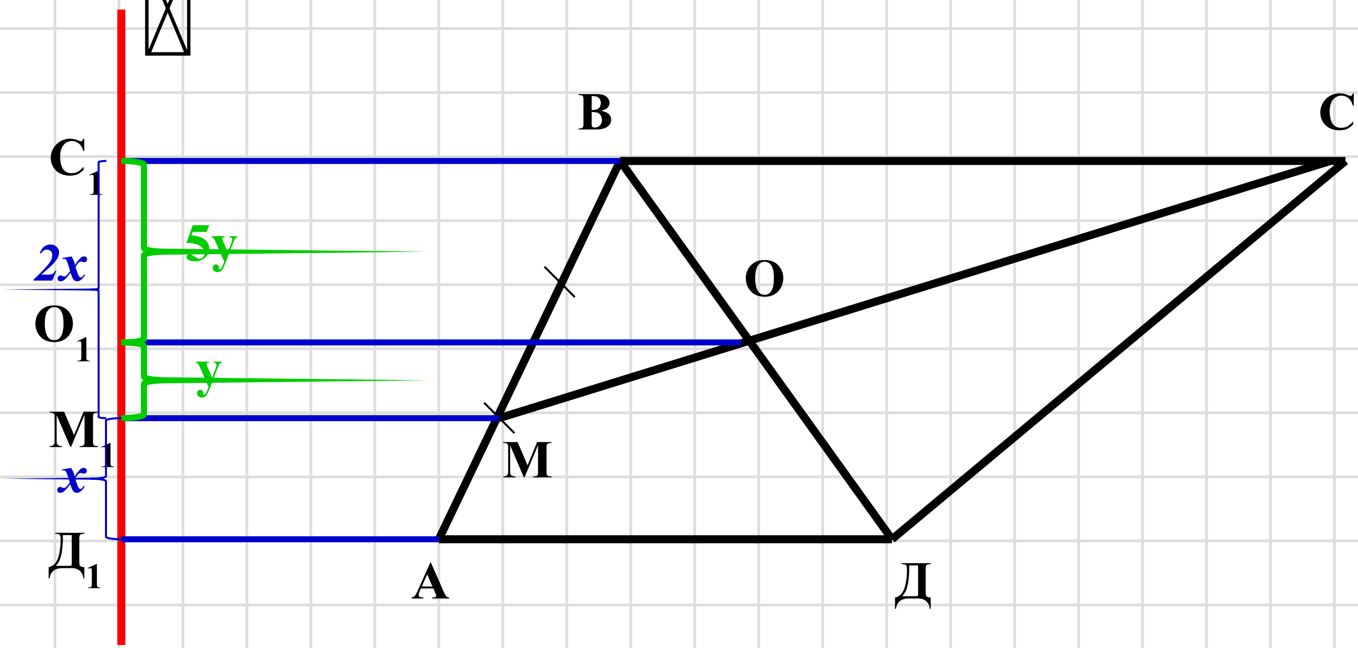
ч.т.д.

Задачи по теме

1. Государственный университет управления (Москва):

- В трапеции АВСД точка М лежит на боковой стороне АВ, О – пересечение диагонали ВД и отрезка СМ. Найдите площадь треугольника ВОС, если $BM = 2 \cdot AM$, $CO = 5 \cdot OM$, а $S_{\Delta COД} = 1$.

//АД # Чертёж к задаче № 1:



$$\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta CO Д}} = \frac{BO}{OД} \Rightarrow S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COД} \cdot \frac{BO}{OД} = 1 \cdot \frac{BO}{OД}$$

2x = 6y, ⇒, x = 3y

$$S_{\Delta BOC} = \frac{BO}{OД} = \frac{C_1O_1}{O_1Д_1} =$$

$$= \frac{5y}{y+x} = \frac{5y}{y+3y} = \frac{5}{4}$$

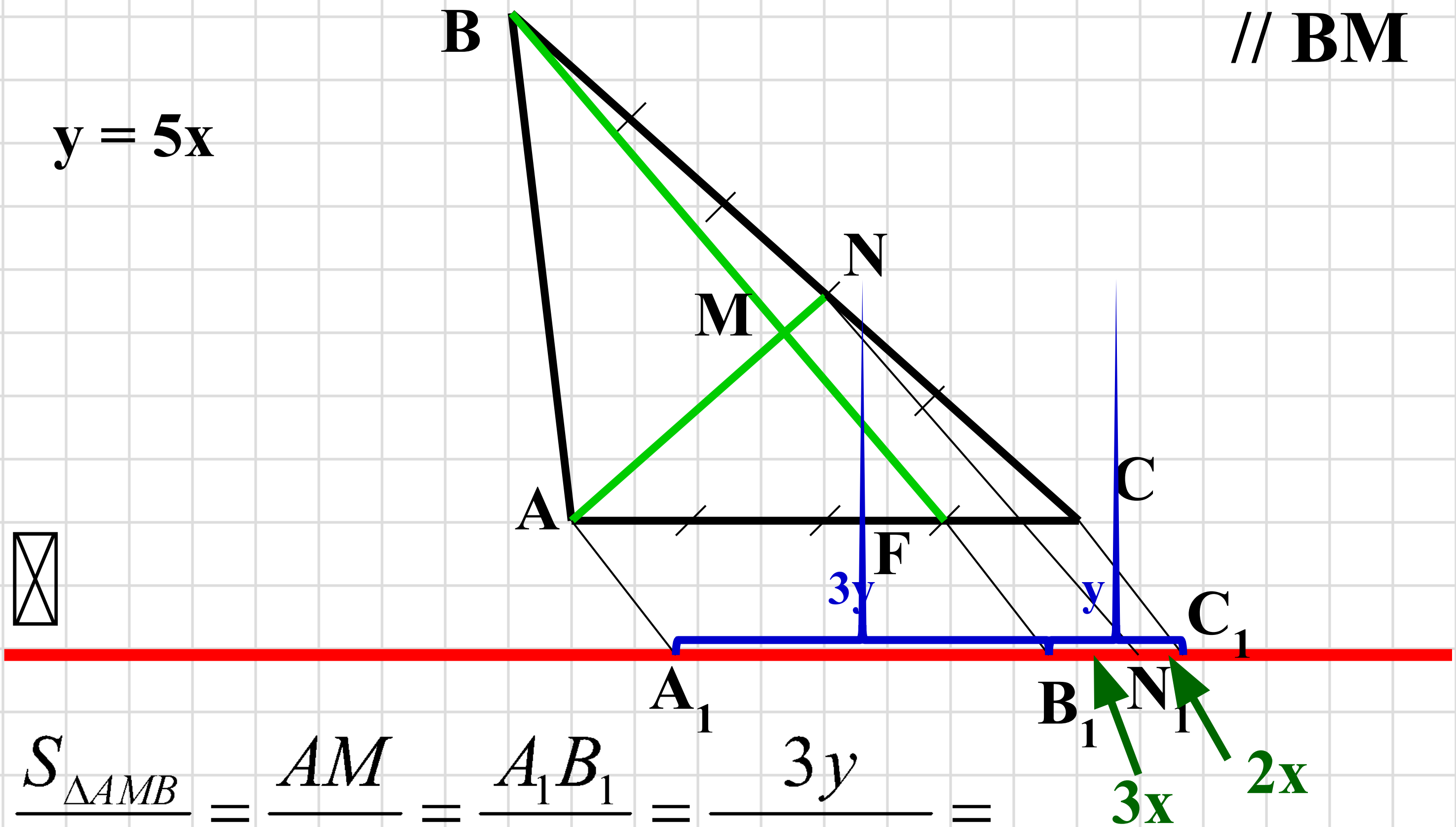
$$Ответ: 1{,}25$$

2. Государственный университет управления (Москва):

Точки F и N делят стороны ΔABC в отношении FA : FC = 3 : 1 и CN : NB = 2 : 3. Прямые AN и BF пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMB и ANB.

Чертёж к задаче № 2

$y = 5x$



$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta ANB}} = \frac{AM}{AN} = \frac{A_1B_1}{A_1N_1} = \frac{3y}{3y+3x} =$$

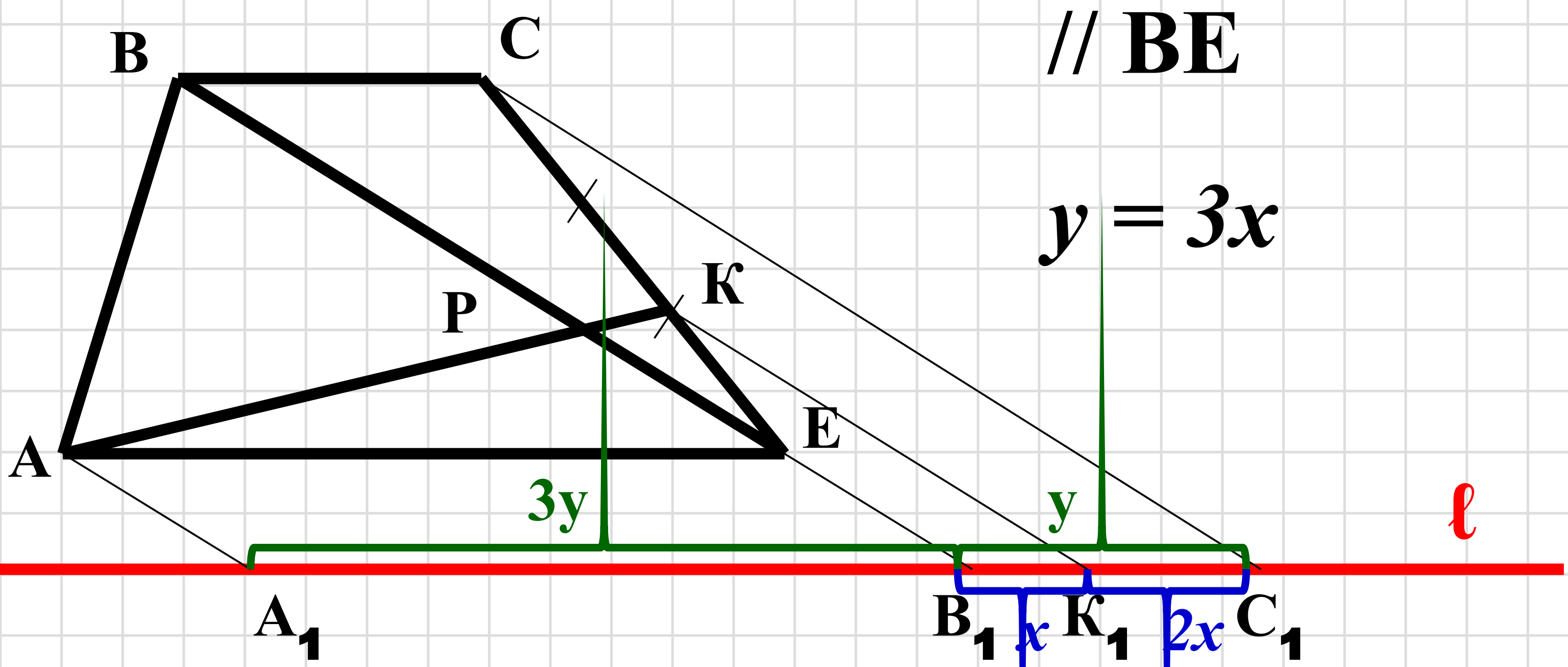
$$= \frac{3 \cdot 5x}{3 \cdot 5x + 3x} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$\textit{Ответ}: \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta ANB}} = \frac{5}{6}$$

3. Государственный университет управления (Москва):

Прямая, проведённая через вершину А трапеции ABCE, пересекает диагональ BE и боковую сторону CE в точках P и K соответственно. Известно что AB : BC = 3, CK : KE = 2. Найдите отношение площадей треугольников APE и KPE.

Чертёж к задаче № 3



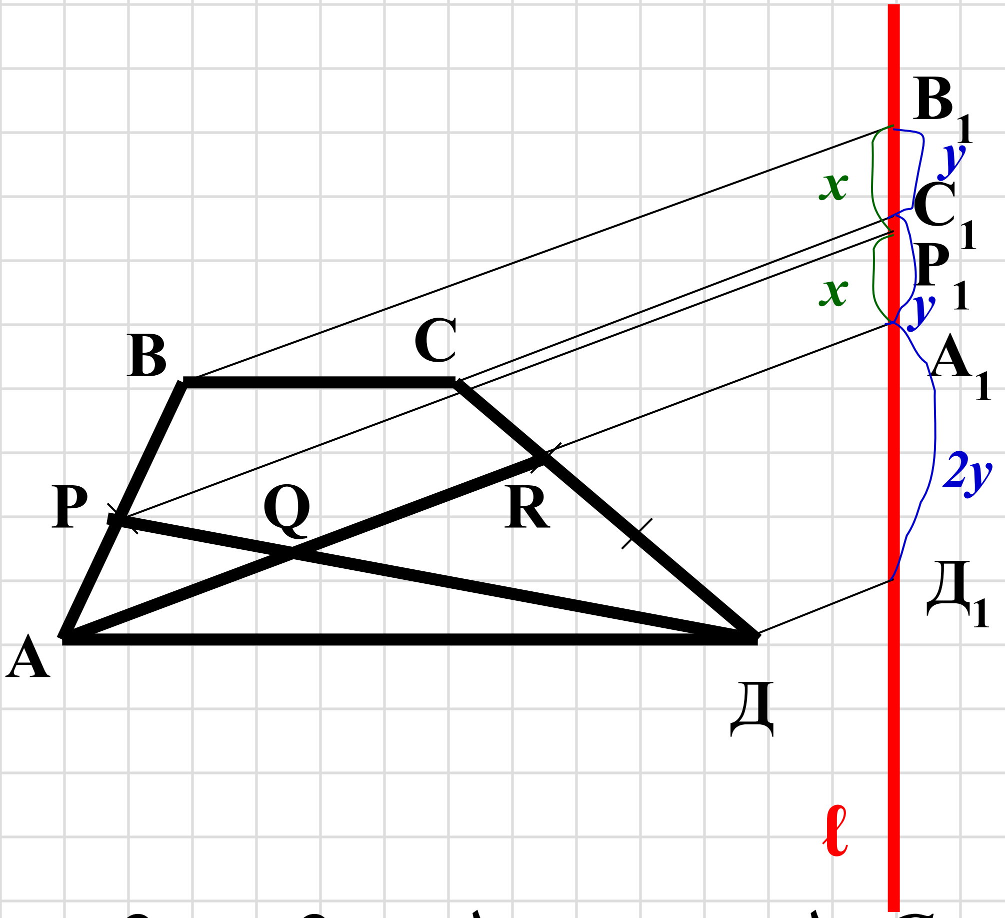
$$\frac{S_{\Delta APE}}{S_{\Delta KPE}} = \frac{AP}{PK} = \frac{A_1B_1}{B_1K_1} = \frac{3y}{x} = \frac{9x}{x} = 9$$

4. МГУ, биофак

Площадь трапеции АВСД (ВС // АД) равна 30, $P \in AB$, $AP = PB$, $R \in CД$, $RД = \frac{2}{3}CД$, $AД = 2 \cdot BC$. Найдите площадь треугольника APQ, где $Q = AR \cap PД$.

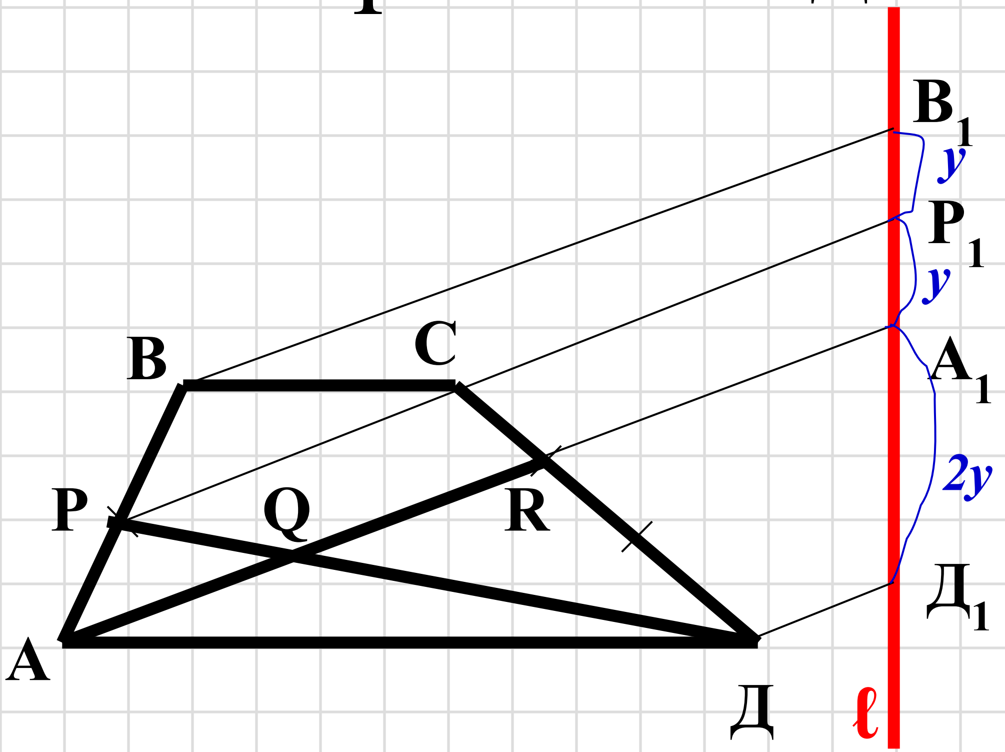
Чертёж к задаче № 4

// AR



$$2x = 2y, \Rightarrow, x = y, \Rightarrow, C_1 = P_1$$

Чертёж к задаче № 4



// AR

$$BC = a,\ AД = 2a,\quad S_{тр} = \frac{3a}{2}\cdot h = 30,\quad ah = 20$$

$$S_{\Delta APД} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{h}{2} = \frac{ah}{2} = 10$$

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta APД}} = \frac{PQ}{PД} = \frac{P_1A_1}{P_1Д_1} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

$$S_{\Delta APQ} = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

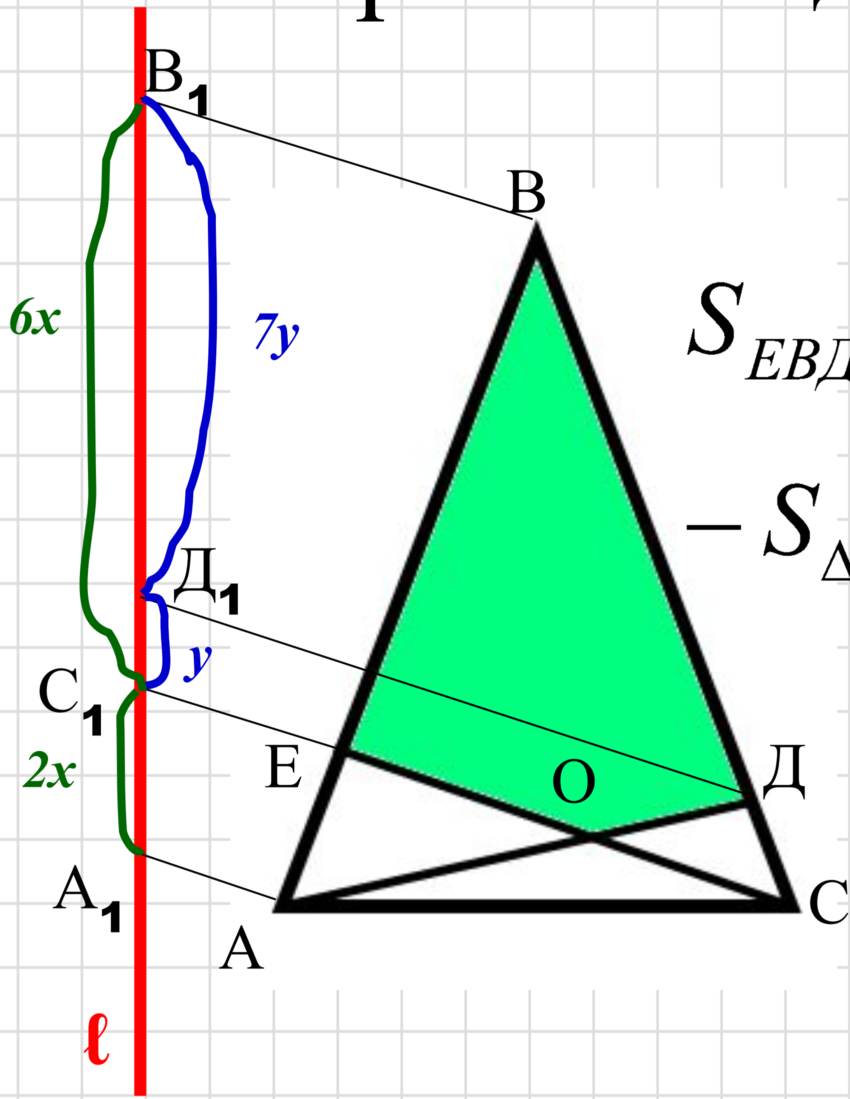
$$Ответ: S_{\Delta APQ} = \frac{10}{3}$$

5. МГУ, химфак

В треугольнике АВС, АВ = ВС = 8, АС = 6, Е$\in$АВ, Д$\in$ВС, АЕ = 2, СД = 1, АД$\cap$СЕ = О. Найдите площадь четырёхугольника ЕВДО.

Чертёж к задаче № 5

// ЕС



$$S_{ЕВДО} = S_{\Delta АВС} - S_{\Delta АЕС} - S_{\Delta ОДС}$$

$$6x = 8y, \Rightarrow, y = \frac{3}{4}x$$

№ 5

$$1)\ \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEC}}=\frac{8}{2}=4,\Rightarrow S_{\Delta AEC}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$$

$$2)\ \frac{S_{\Delta \text{ДОС}}}{S_{\Delta \text{АДС}}}=\frac{\text{ОД}}{\text{АД}}=\frac{C_1\text{Д}_1}{A_1\text{Д}_1}=\frac{y}{2x+y}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}x}{2x+\frac{3}{4}x}=\frac{3}{11}$$

№ 5

3) $$\frac{S_{\Delta АДС}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{8}, \Rightarrow, S_{\Delta АДС} = \frac{1}{8} S_{\Delta ABC}$$

4) $$S_{\Delta ОДС} = \frac{3}{11} S_{\Delta АДС} = \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{8} S_{\Delta ABC} =$$

$$= \frac{3}{88} S_{\Delta ABC}$$

$$5)\ S_{ЕВДО} = S_{\Delta ABC} - \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} - \frac{3}{88}S_{\Delta ABC} =$$

$$= \frac{63}{88}S_{\Delta ABC}$$

$$6)\ S_{\Delta ABC} = \sqrt{11\cdot 3\cdot 3\cdot 5} = 3\sqrt{55}$$

$$7)\ S_{ЕВДО} = \frac{63}{88}\cdot 3\sqrt{55} = \frac{189\sqrt{55}}{88}.$$

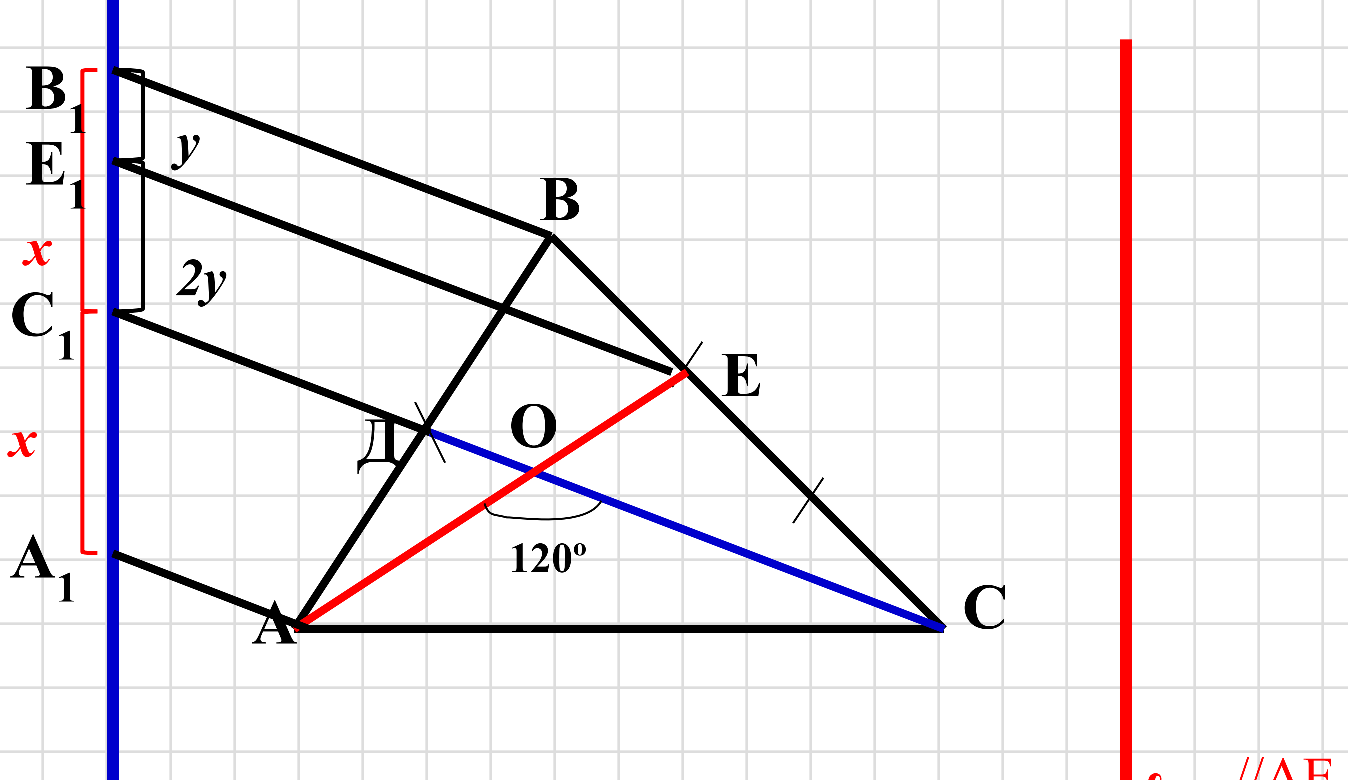
№ 6, МГУ, ф-т почвоведения

$$\Delta ABC,\ Д \in AB,\ AД = ДB,$$

$$E \in BC,\ BE = \frac{1}{3}BC,\ AE \cap ДC = O,$$

$$\angle AOC = 120^\circ,\ AE = 4,\ CД = 5.$$

Найдите AB.

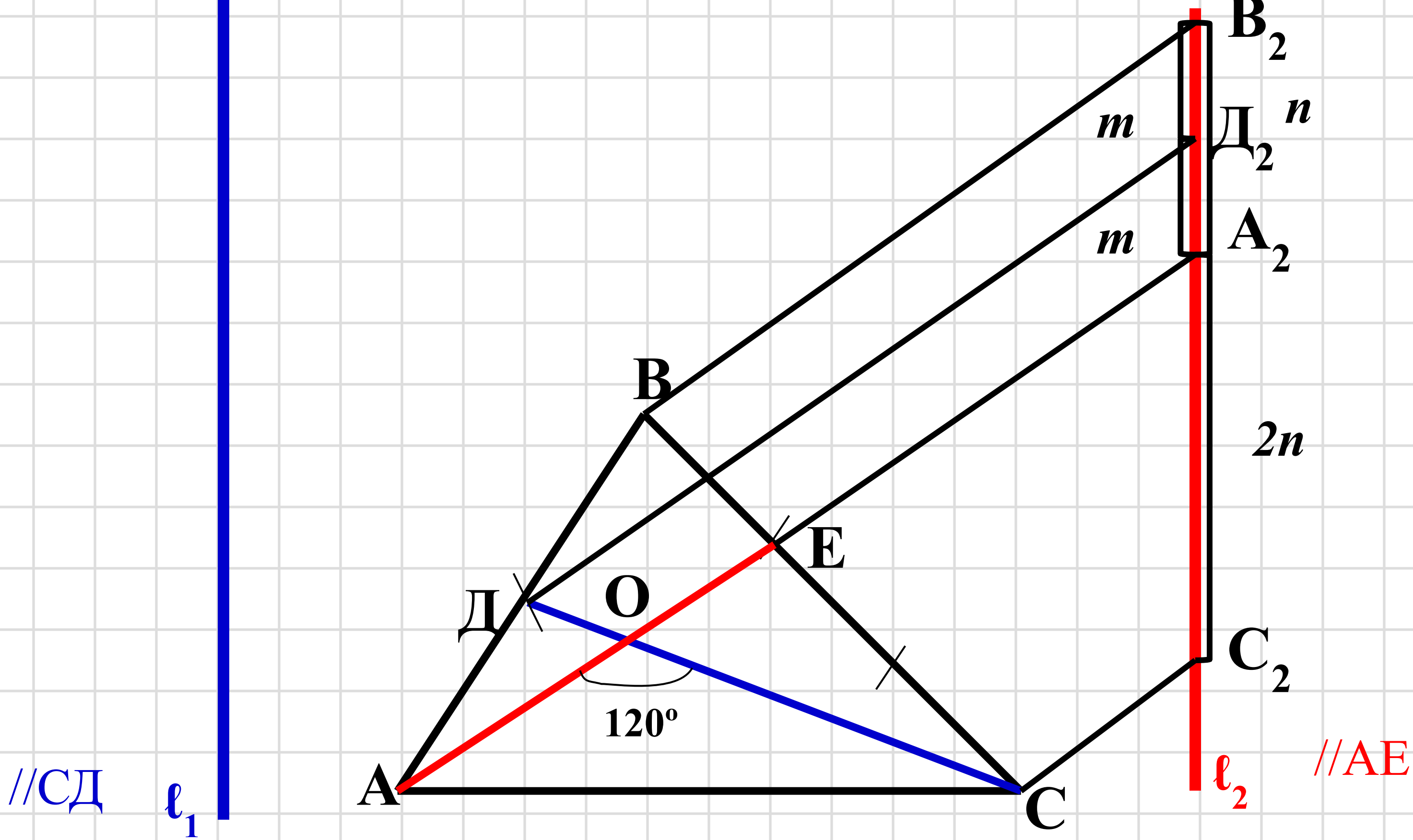


Найдём АД из ΔАДО, для этого определим, какую часть АО составляет от АЕ и ДО от СД.

$$\frac{AO}{AE} = \frac{AC_1}{A_1E_1} = \frac{x}{x+2y} = \frac{3y}{5y} = \frac{3}{5}$$

1) x = 3y

$$AO = \frac{3}{5}\cdot 4 = \frac{12}{5}$$



2) $n = 2m$

$$\frac{ДO}{ДC} = \frac{Д_2A_2}{Д_2C_2} = \frac{m}{m+2n} = \frac{m}{5m} = \frac{1}{5}$$

$$ДO = \frac{1}{5}\cdot 5 = 1$$

$$3)\ {}_{\Delta}АДО,\ АО = \frac{12}{5},\ ДО = 1,\ \angle O = 60^\circ$$

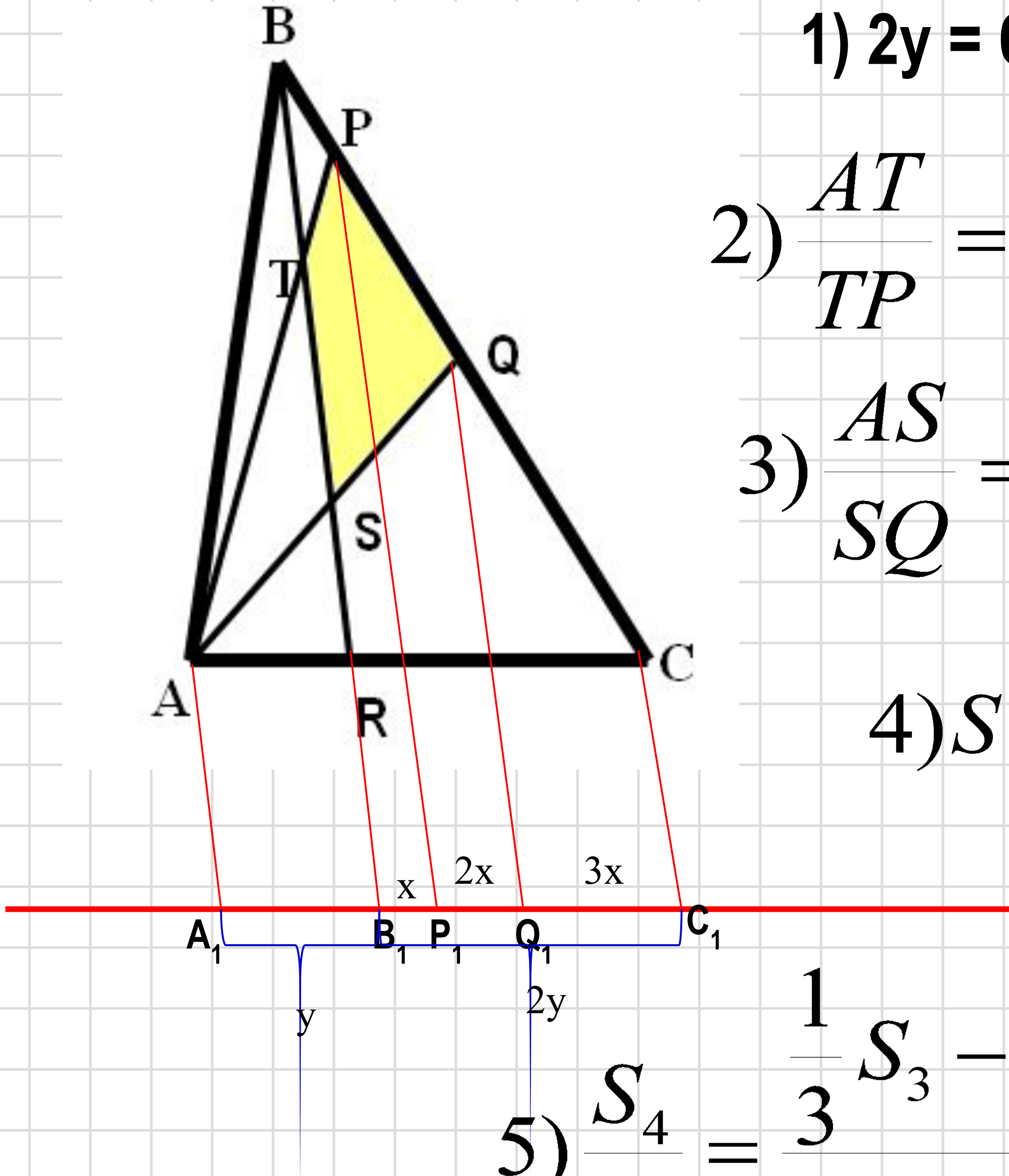
$$АД^2 = 1 + \frac{144}{25} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{109}{25}, \Rightarrow, AB = \frac{2\sqrt{109}}{5}$$

$$Ответ: AB = \frac{2\sqrt{109}}{5}$$

№ 7. МГУ

Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что BP : PQ : QC =1 : 2 : 3. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что AR : RC = 1 : 2. Чему равно отношение площади четырёхугольника PQST к площади треугольника ABC, где S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?



1) $2y = 6x, \Rightarrow, y = 3x$

$$2)\ \frac{AT}{TP} = \frac{A_1B_1}{B_1P_1} = \frac{y}{x} = \frac{3}{1}$$

$$3)\ \frac{AS}{SQ} = \frac{A_1B_1}{B_1Q_1} = \frac{y}{3x} = 1$$

$$4)\ S_{\Delta PAQ} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$$

$$5)\ \frac{S_4}{S_3} = \frac{\frac{1}{3}S_3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_3}{S_3} = \frac{5}{24}$$

ФИЗКУЛЬТМИНУТКА

ФИЗКУЛЬТМИНУТКА

ФИЗКУЛЬТМИНУТКА