

Вычисление площади криволинейной трапеции

**Применение определенного интеграла
для нахождения площади
криволинейной трапеции.**

Найдите производную и одну из первообразных функции

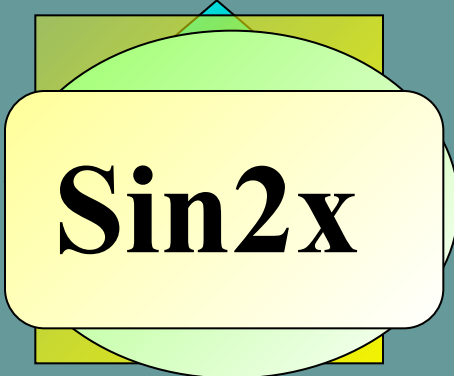


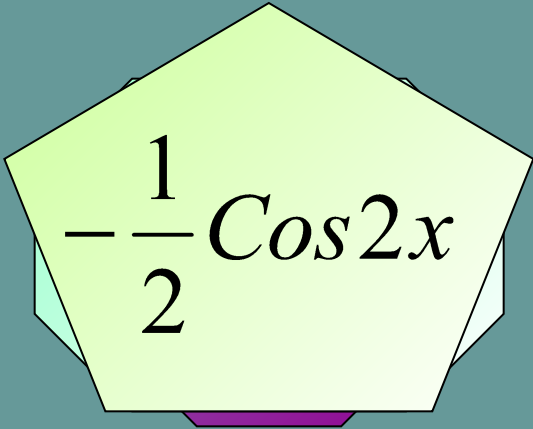
$f'(x)$

$f(x)$

$F(x)$


$$2\cos 2x$$


$$\sin 2x$$


$$-\frac{1}{2}\cos 2x$$

Определенный интеграл



$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

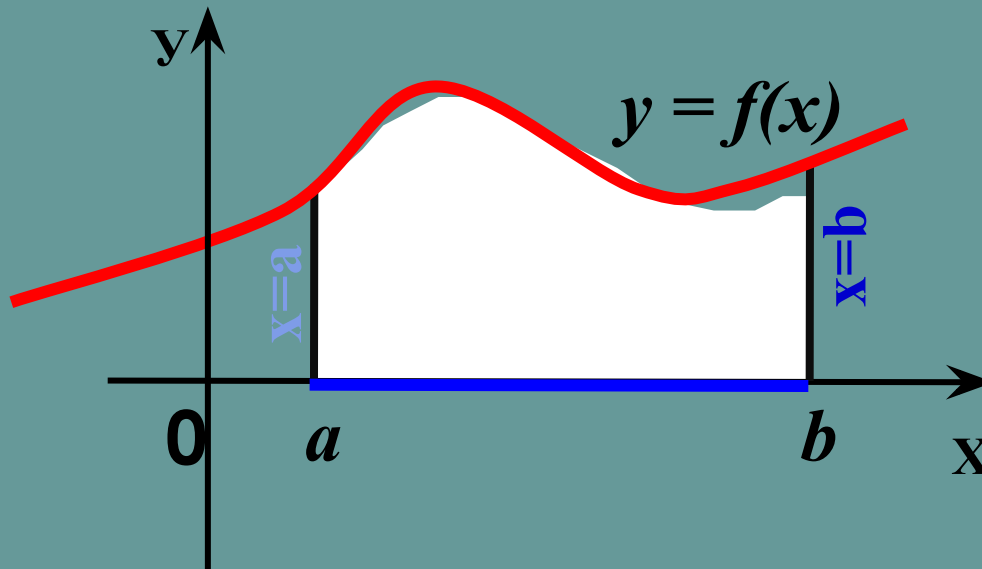
Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции:

ограниченной кривой $y = f(x)$,
прямыми $x = a$; $x = b$ и осью Ox , $y = 0$.

Криволинейная трапеция



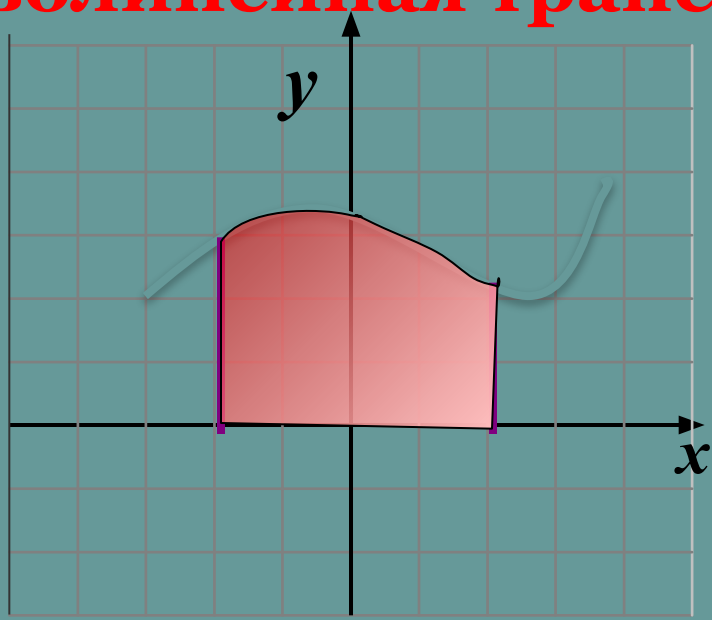
Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком одной непрерывной функцией $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ на оси Ox .



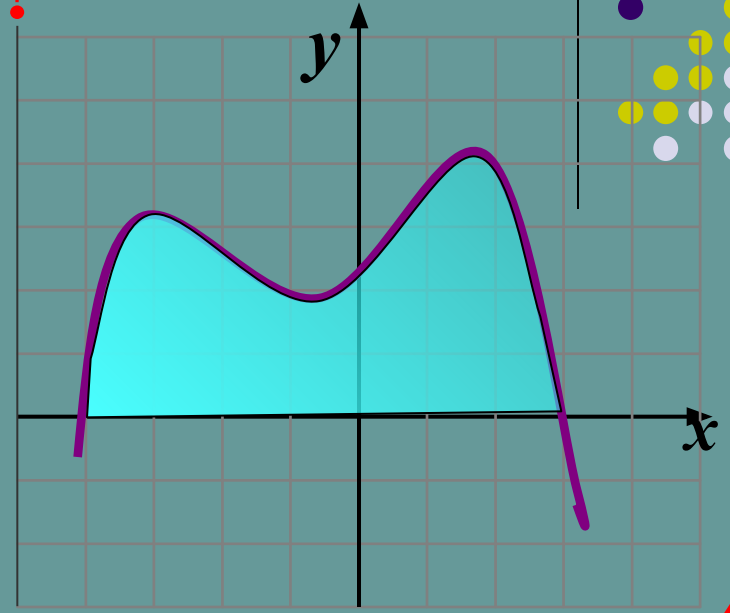
На каком рисунке изображена криволинейная трапеция?



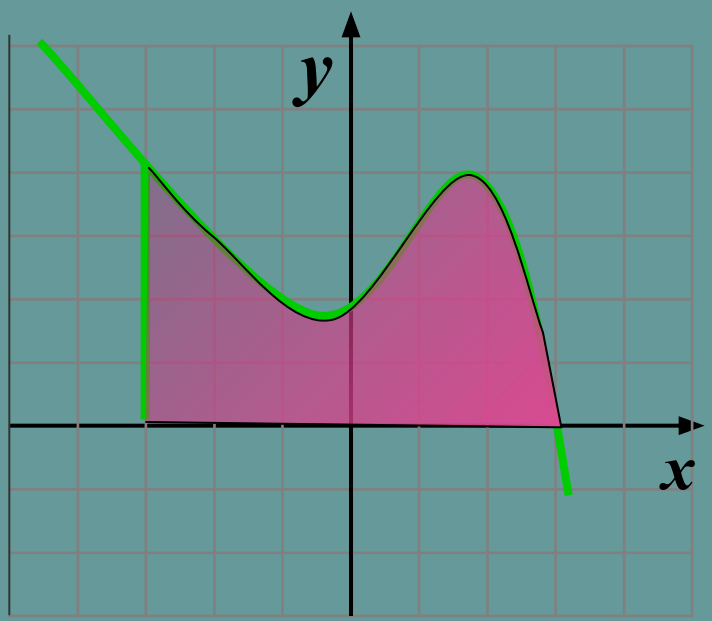
1.



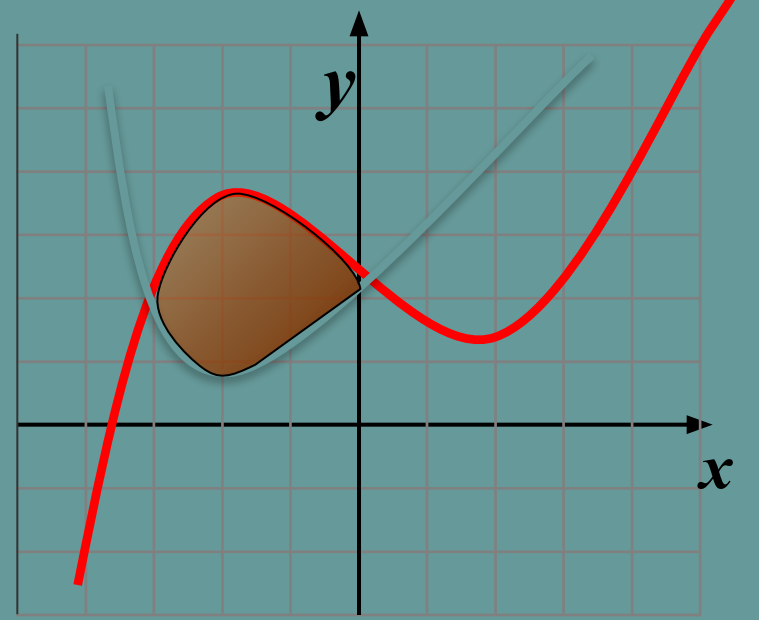
2.



3.



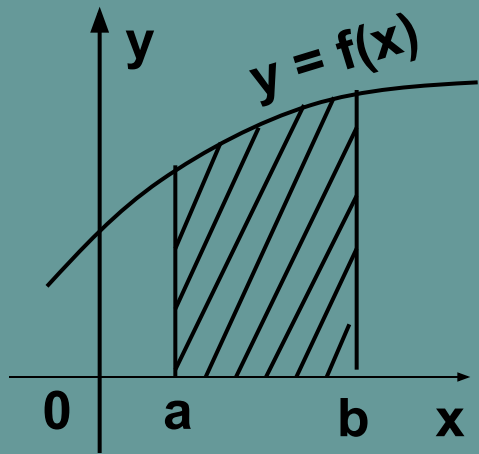
4.



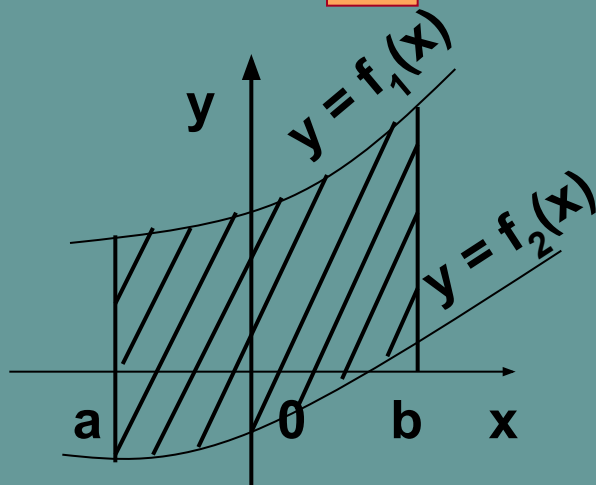
Какие из данных фигур являются криволинейными трапециями?



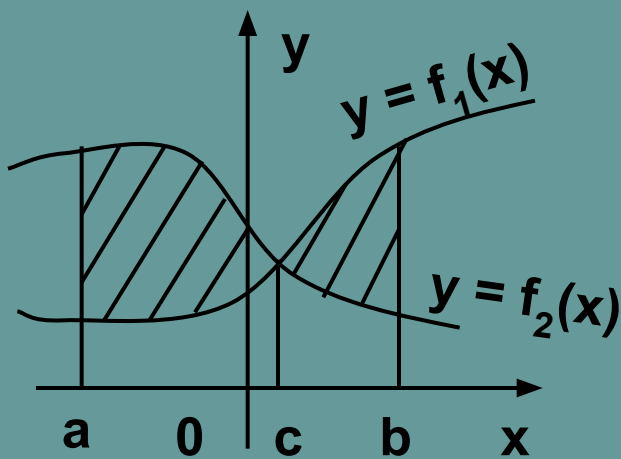
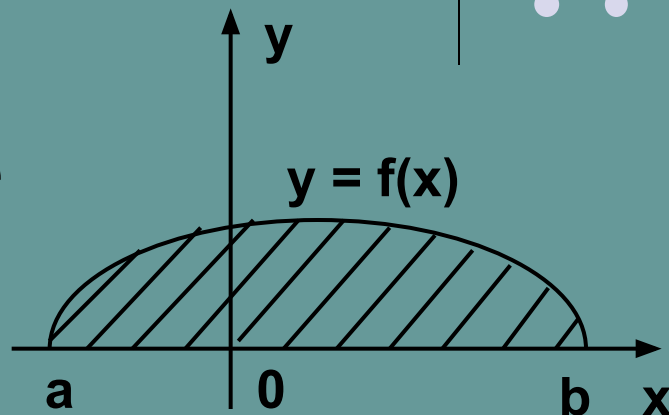
1



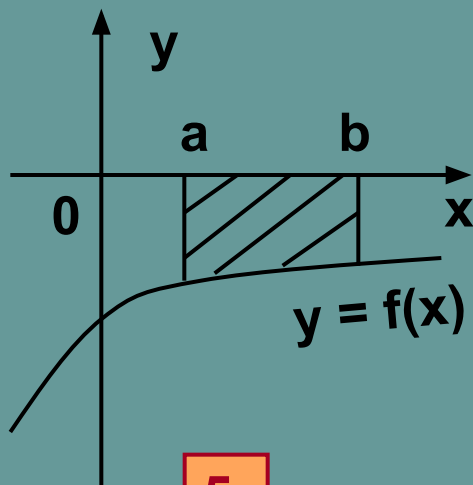
2



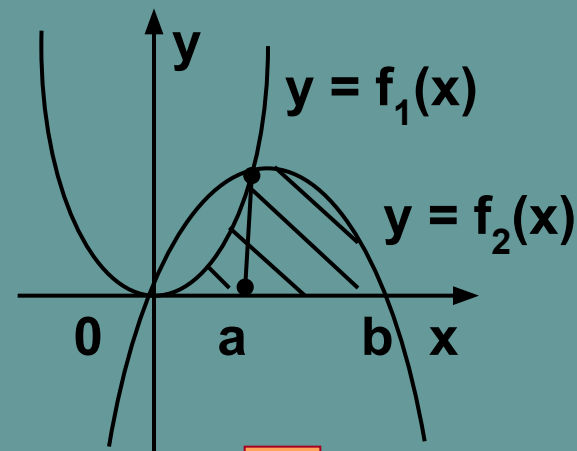
3



4

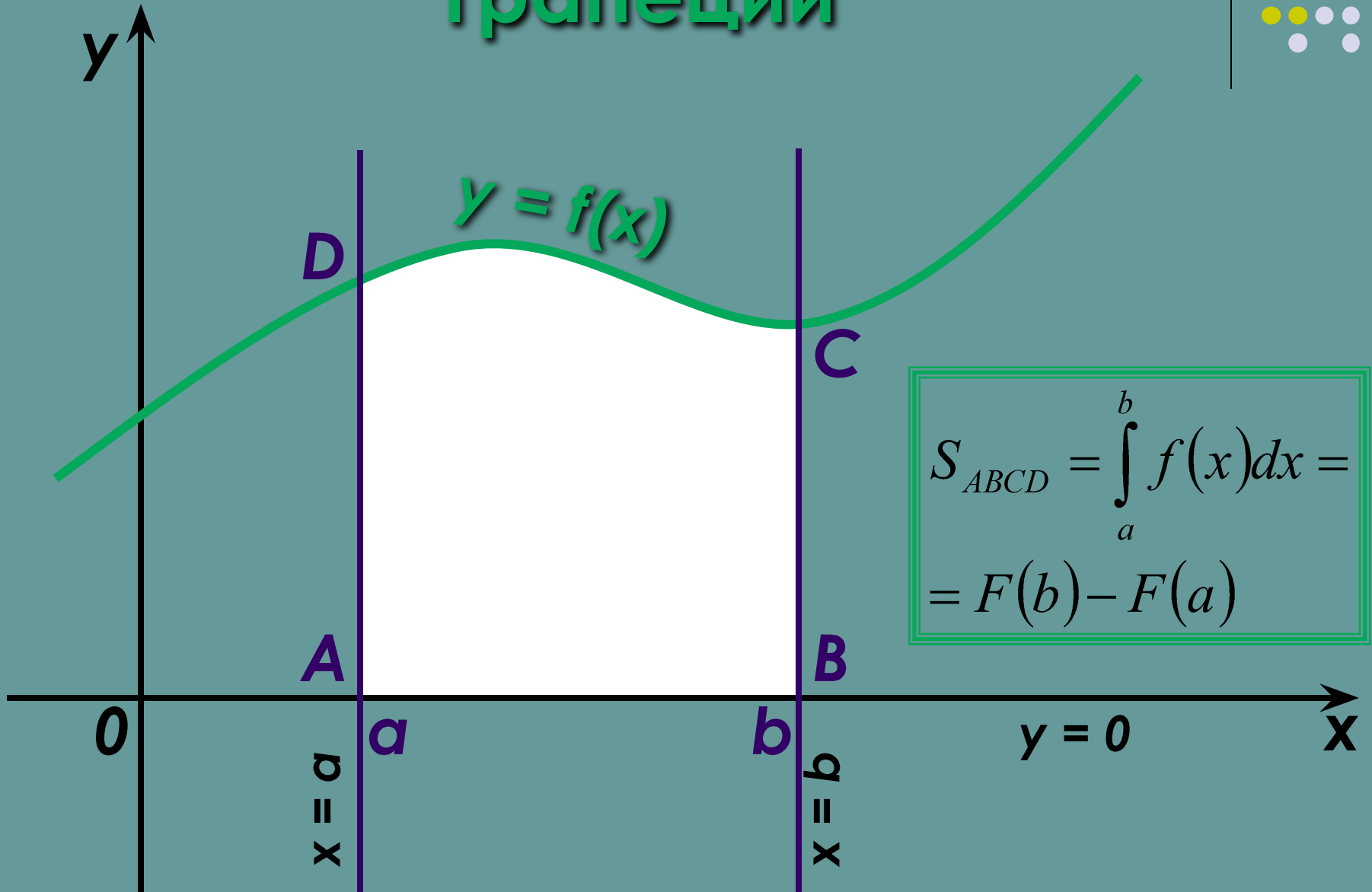


5

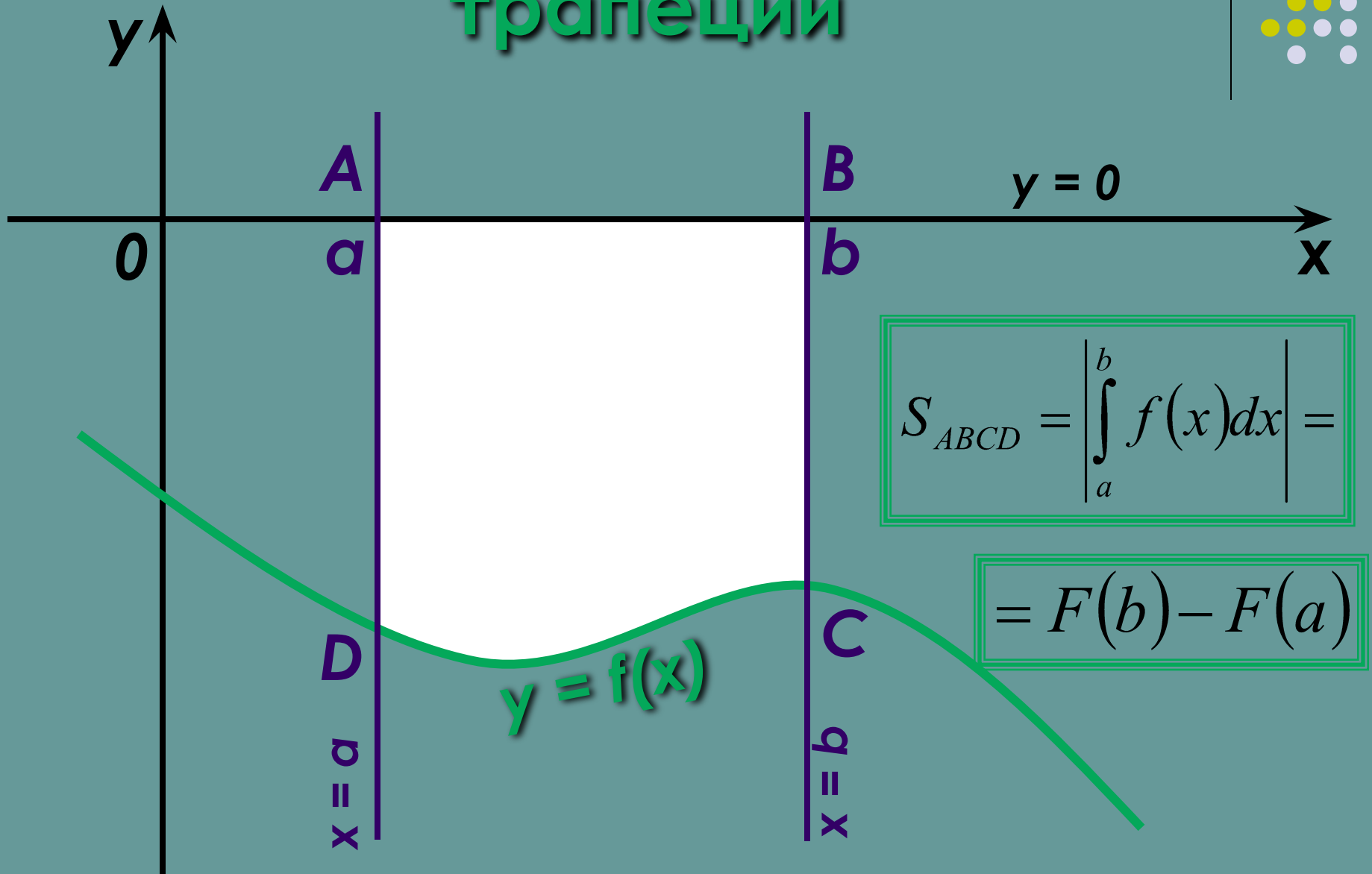
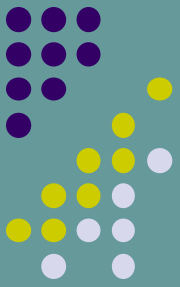


6

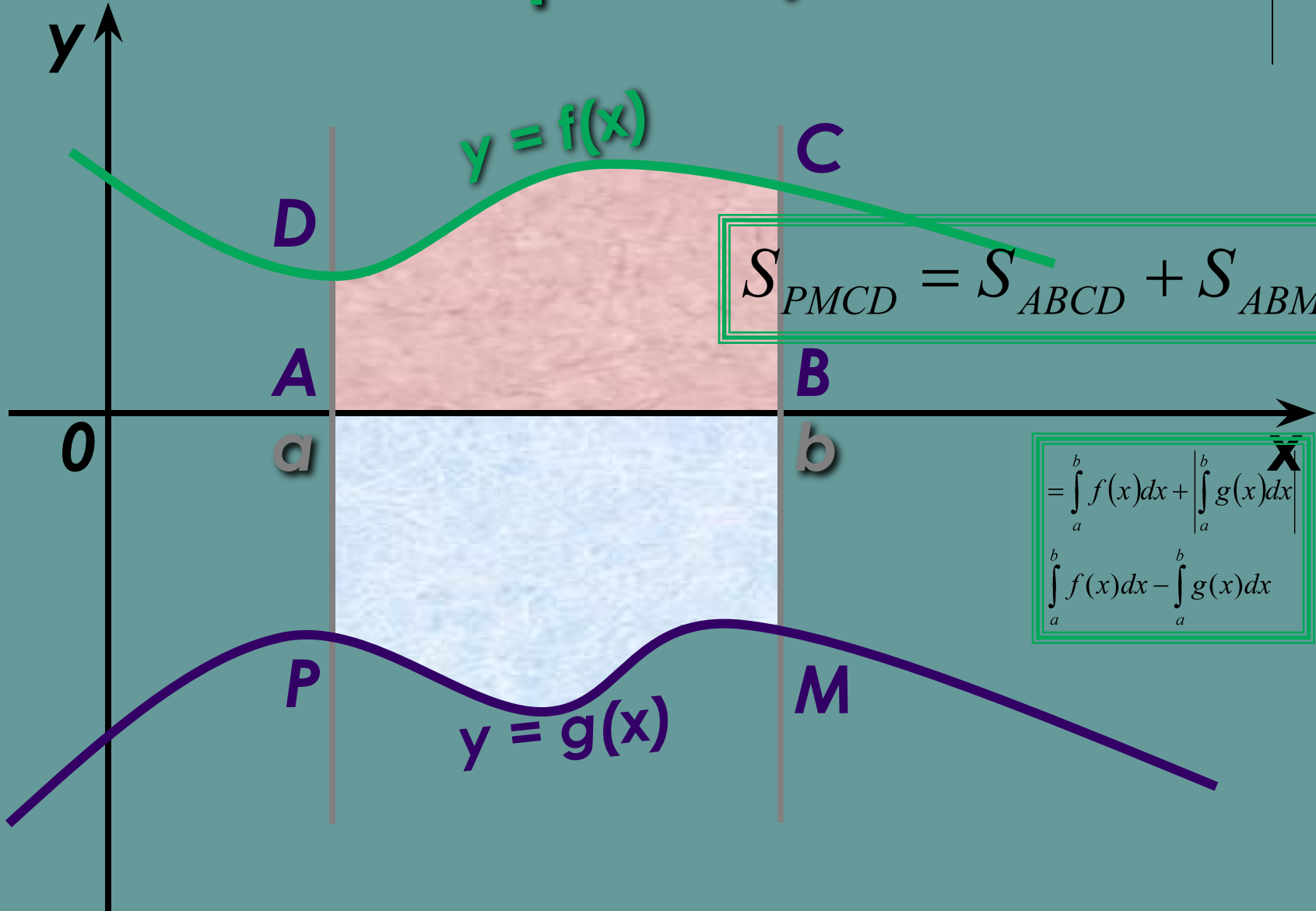
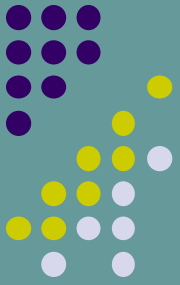
Площадь криволинейной трапеции



Площадь криволинейной трапеции



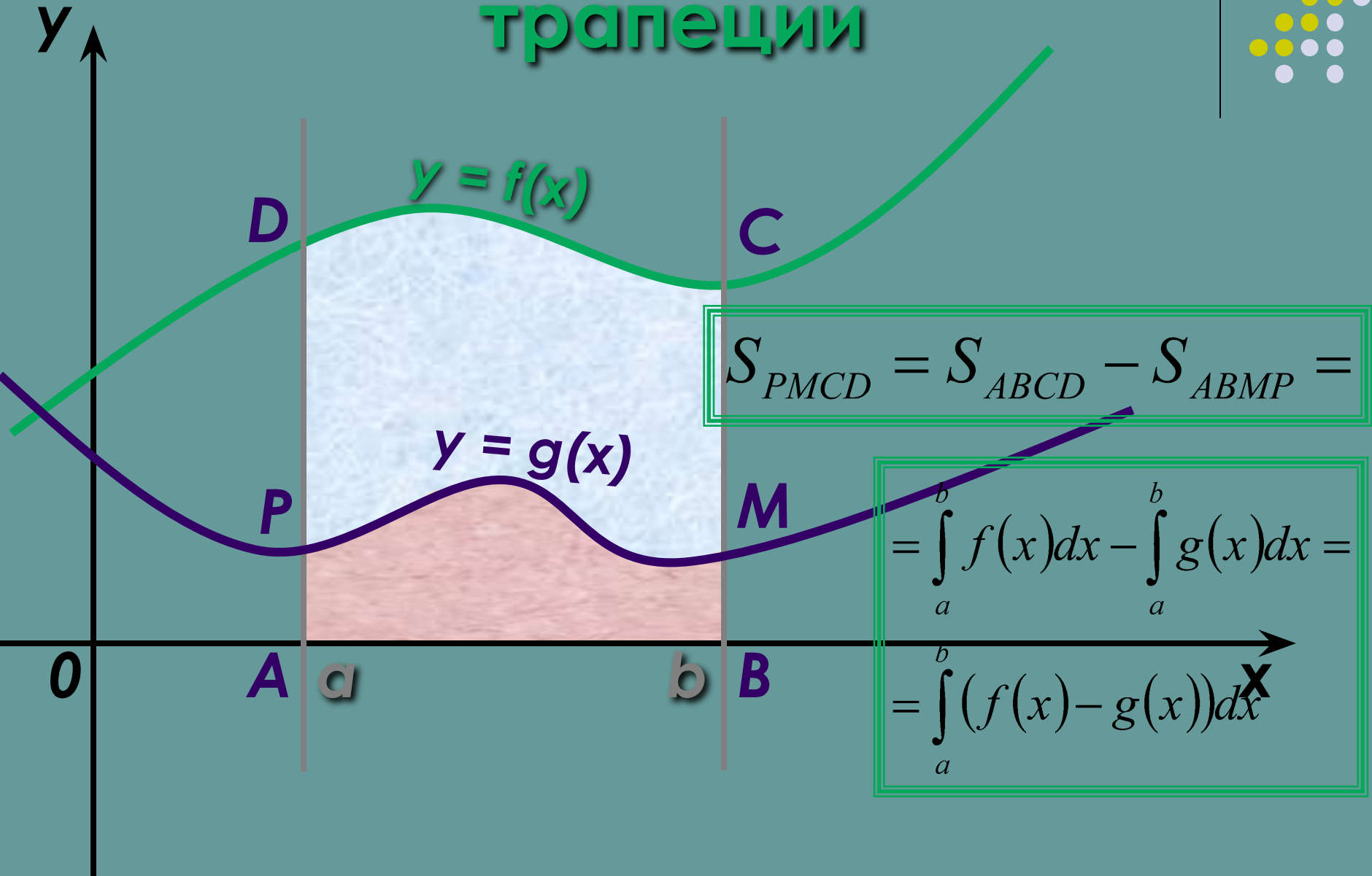
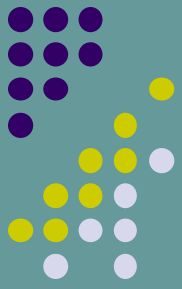
Площадь криволинейной трапеции



$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

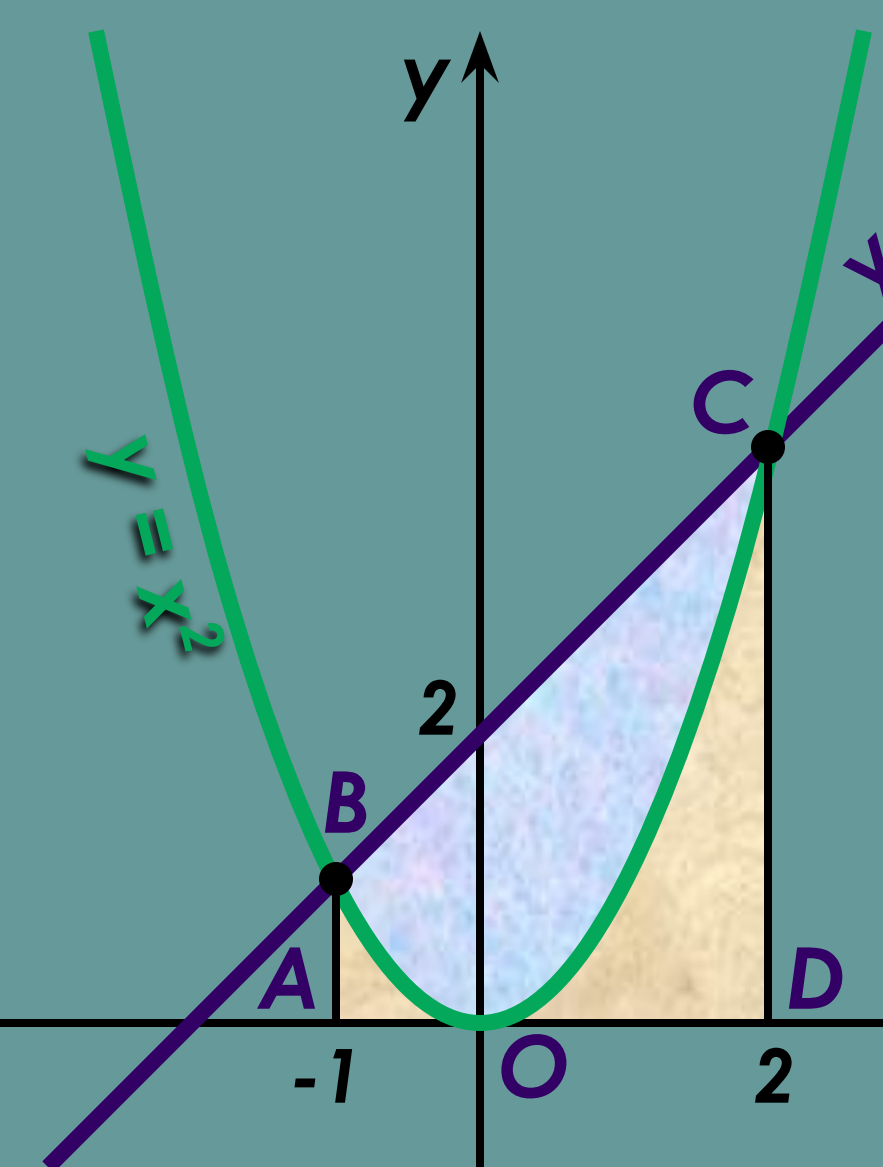
$$= \int_a^b f(x)dx + \left| \int_a^b g(x)dx \right|$$
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Площадь криволинейной трапеции





Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



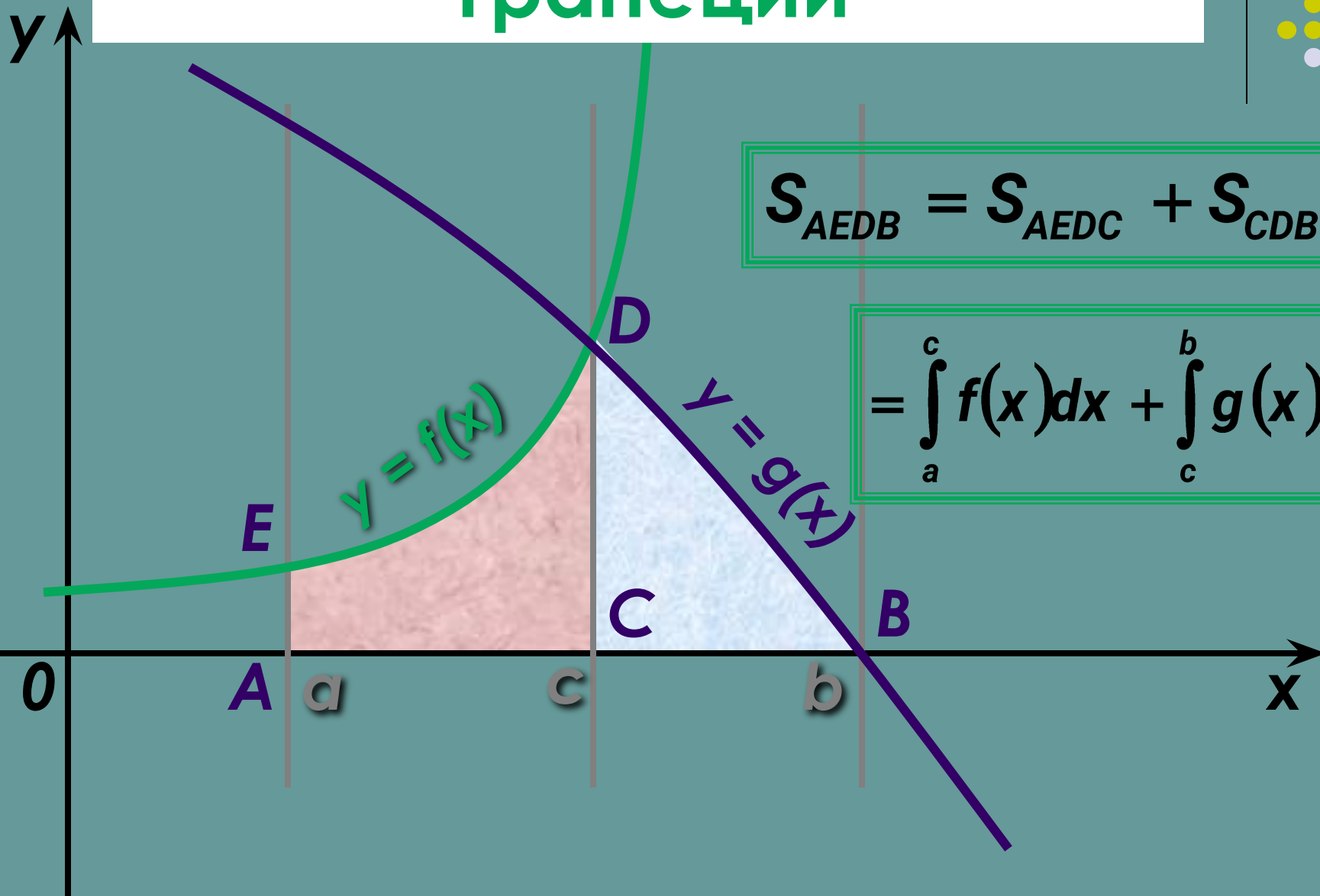
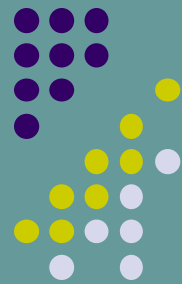
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции



$$S_{AEDB} = S_{AE DC} + S_{CDB} =$$

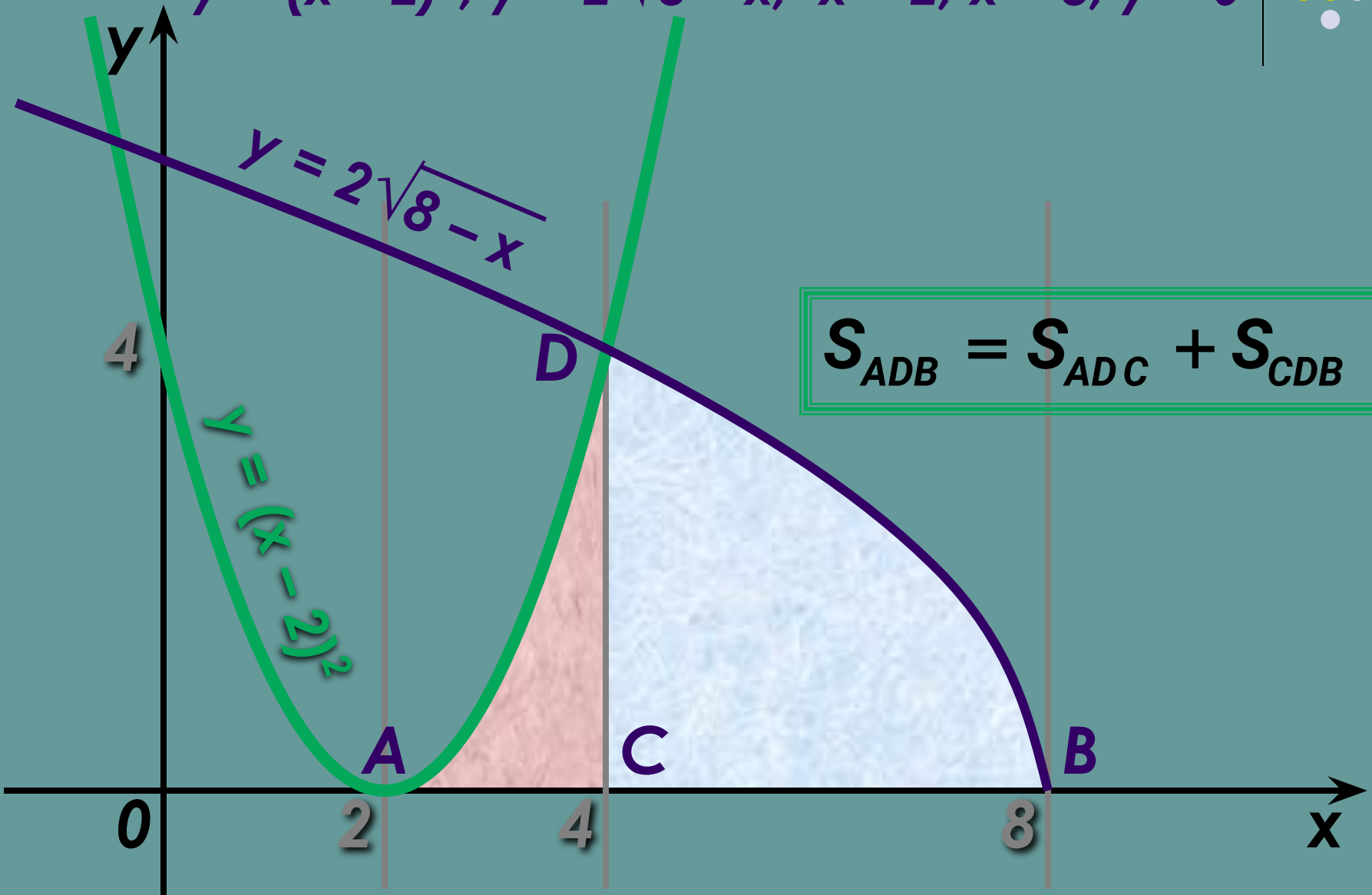
$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$

$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_2^4 - \frac{4(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \Big|_4^8 =$$

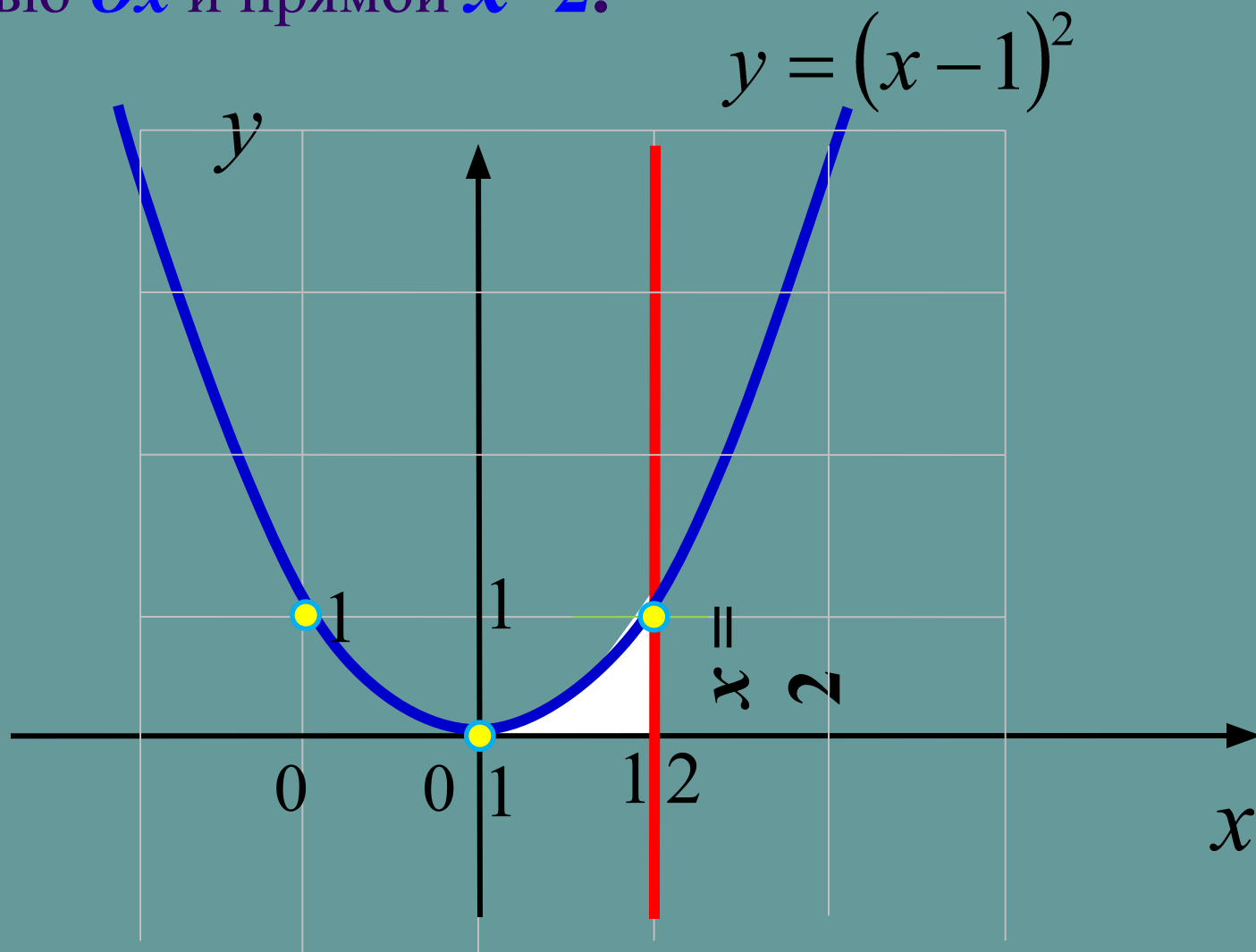
$$= \left(\frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(2 - 2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8 - 8)\sqrt{8 - 8}}{3} - \frac{4(8 - 4)\sqrt{8 - 4}}{3} \right) =$$

$$8 - x = t$$
$$- dx = dt$$

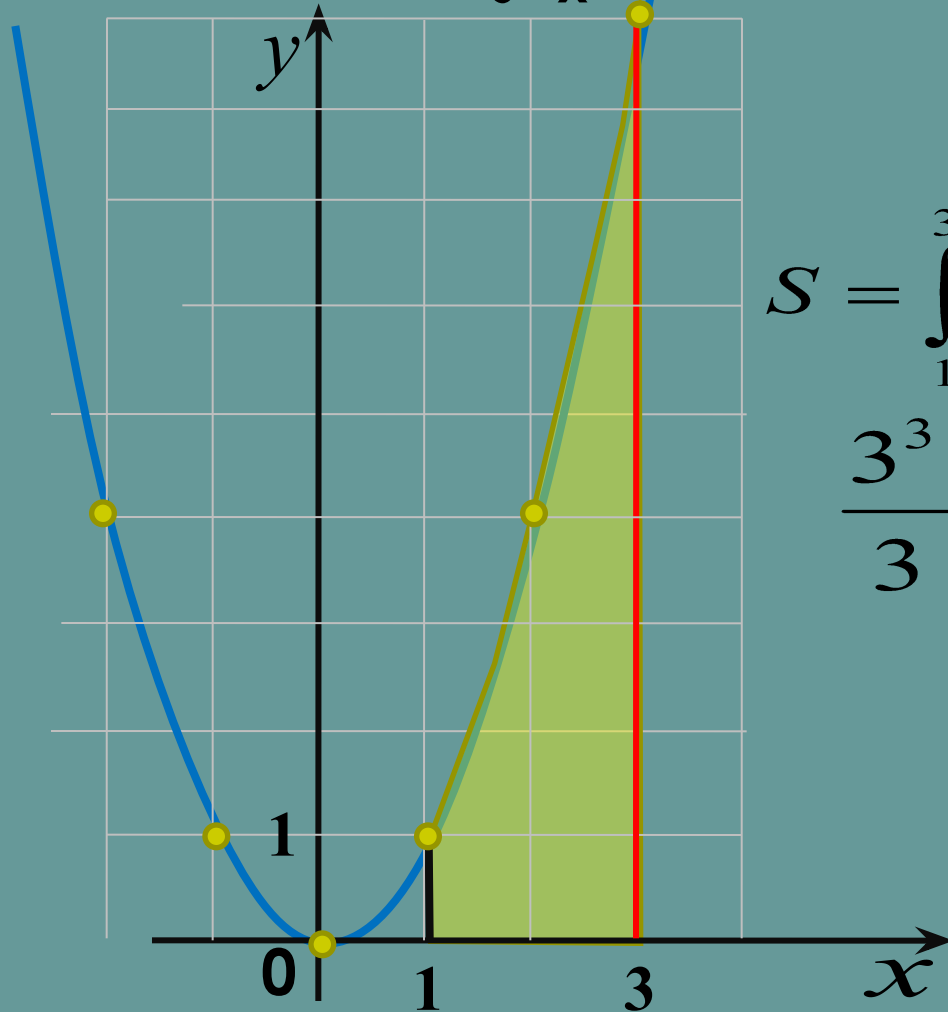
$$-2 \int \sqrt{t} dt = -2 \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$
$$= -2 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3} \sqrt{(8 - x)^3}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = (x-1)^2$, осью Ox и прямой $x=2$.



Найти площадь криволинейной трапеции,
изображенной на рисунке



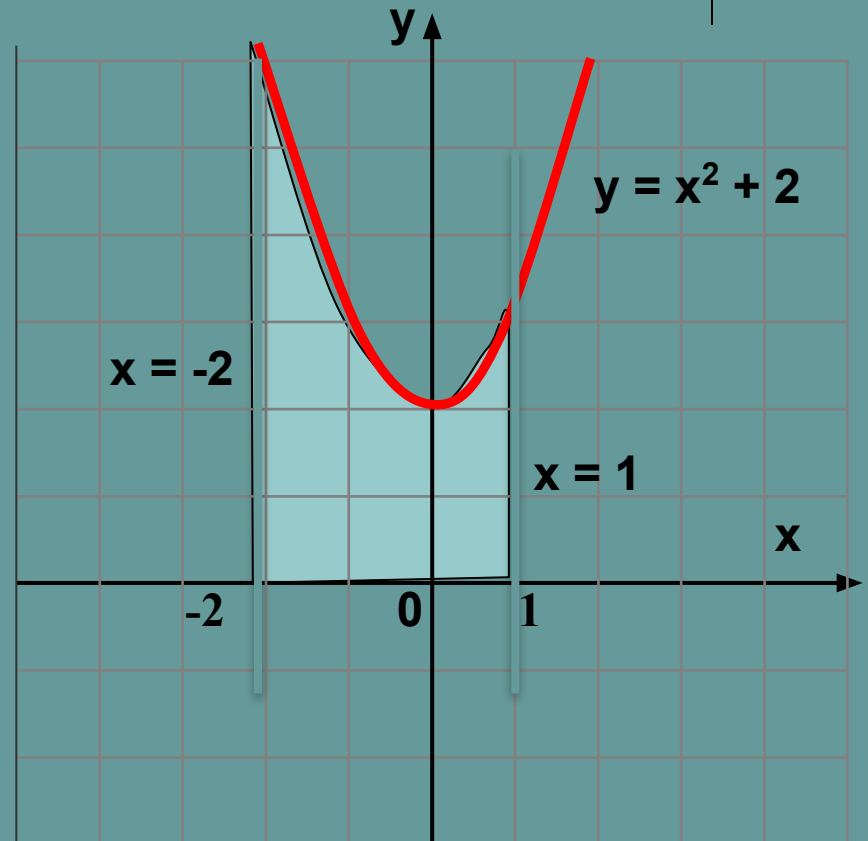
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S = \int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ (кв.ед)}$$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
 $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = -2$



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) \end{aligned}$$



$$S = 9 \text{ кв.ед.}$$

Вычисление площадей плоских фигур



Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$ и $y=x^2-4x+2$

1. $y=x^2-4x+2$, $x_0=2$, $y_0=-2$

2. $y=x-2$: $x=0$, $y=-2$; $x=2$, $y=0$

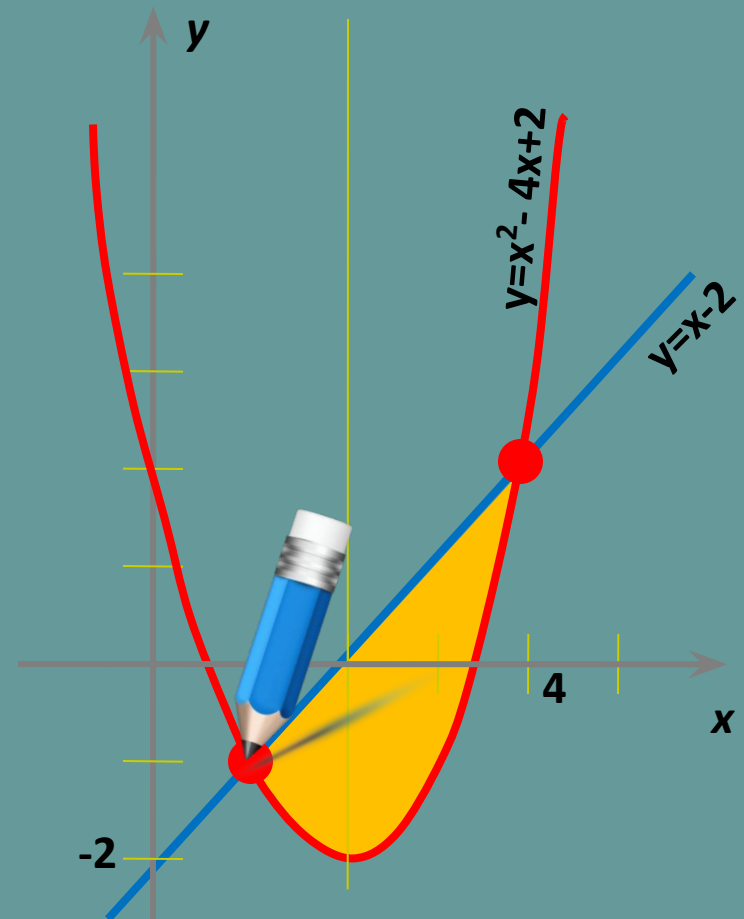
3. Абсциссы точек пересечения:

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$

4. $S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2)) dx =$

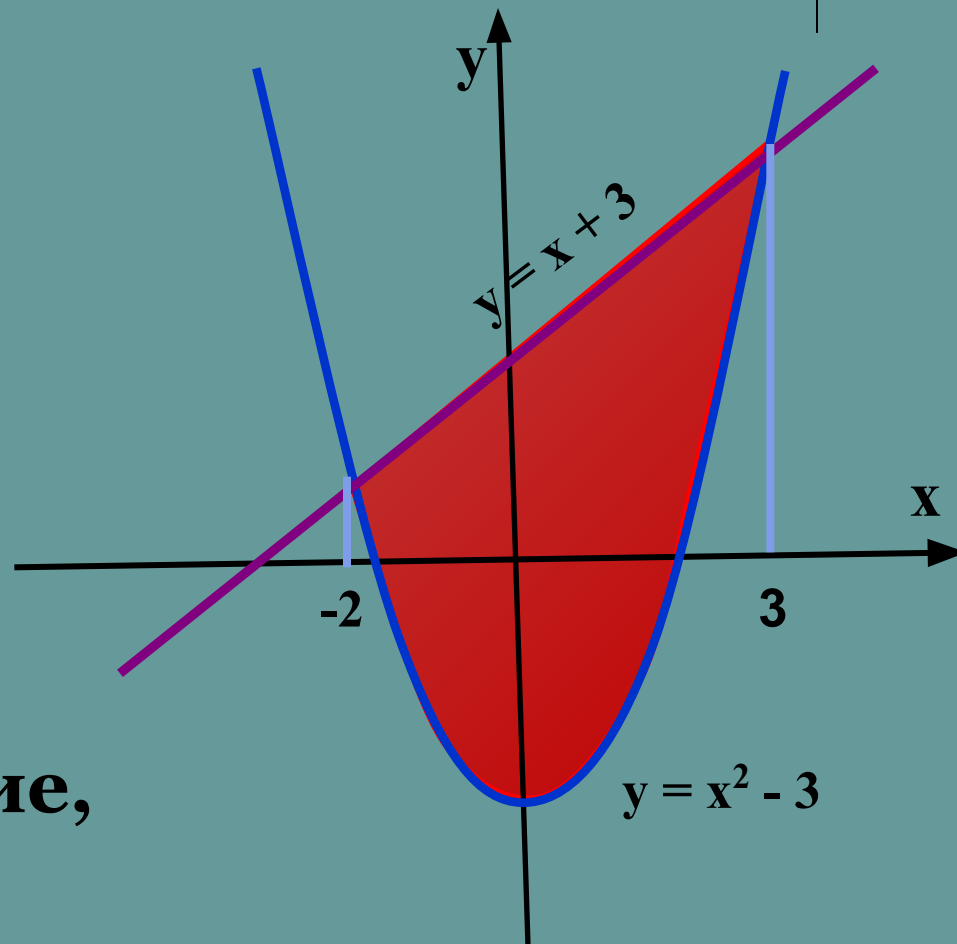
$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = 4,5$$

Ответ: $S=4,5$



Найдите площадь фигуры, ограниченной

линиями $y = x - 3$, $y = x^2 - 3$

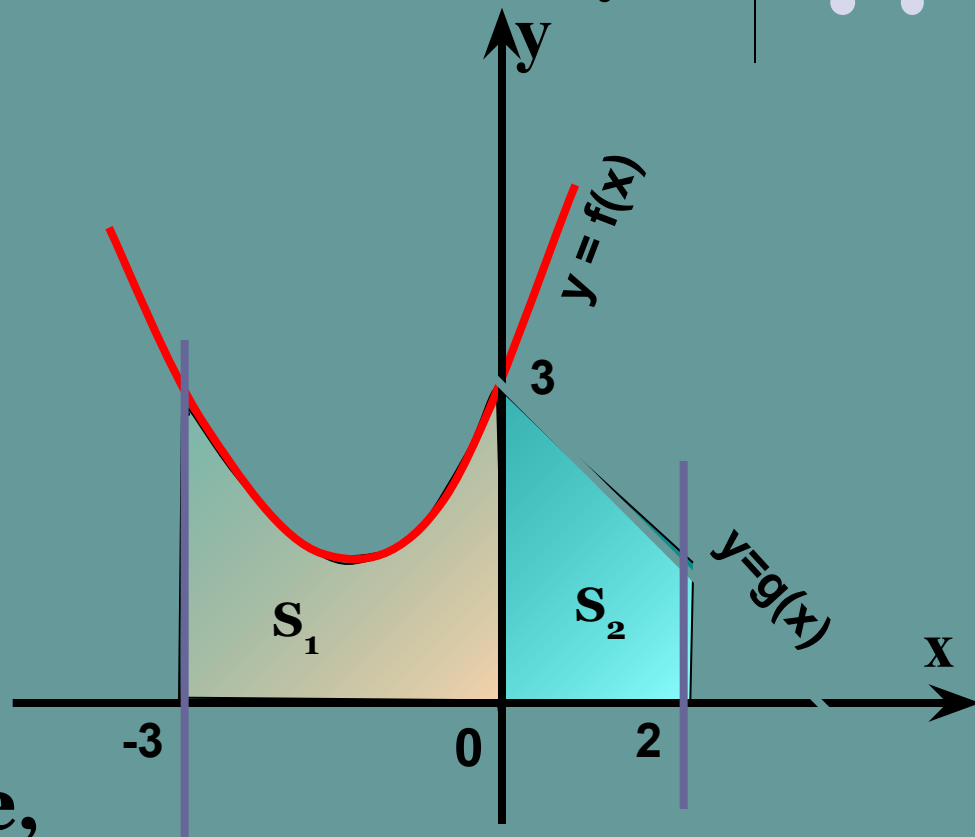


Выполнить решение,
как в предыдущей
задаче

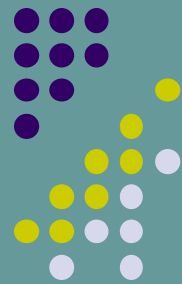
Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$g(x) = 3 - x, \quad f(x) = 0,5x^2 + 2x + 3, \quad x = -3, \quad x = 2, \quad y = 0$$

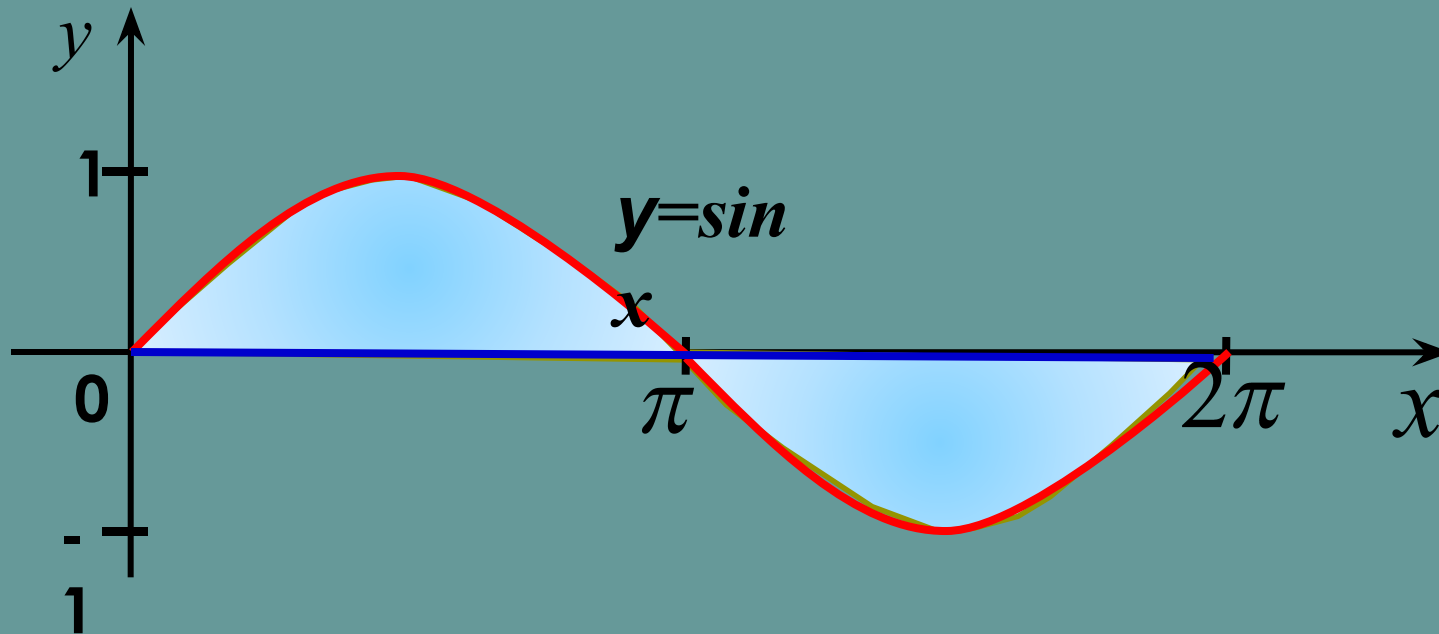
$$S_{\text{ф}} = S_1 + S_2$$



Выполнить решение,
как в предыдущей
задаче



Найти площадь криволинейной трапеции,
трапеции,
изображенной на рисунке



**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**

