Логика высказываний

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

2016 г.

Из истории логики

2 основных этапа

первый продолжался более двух тысяч лет, в течение которых логика развивалась очень медленно.

второй начался во второй половине XIX в., когда в логике произошла научная революция

Это было обусловлено прежде всегопроникновением в нее математических методов.

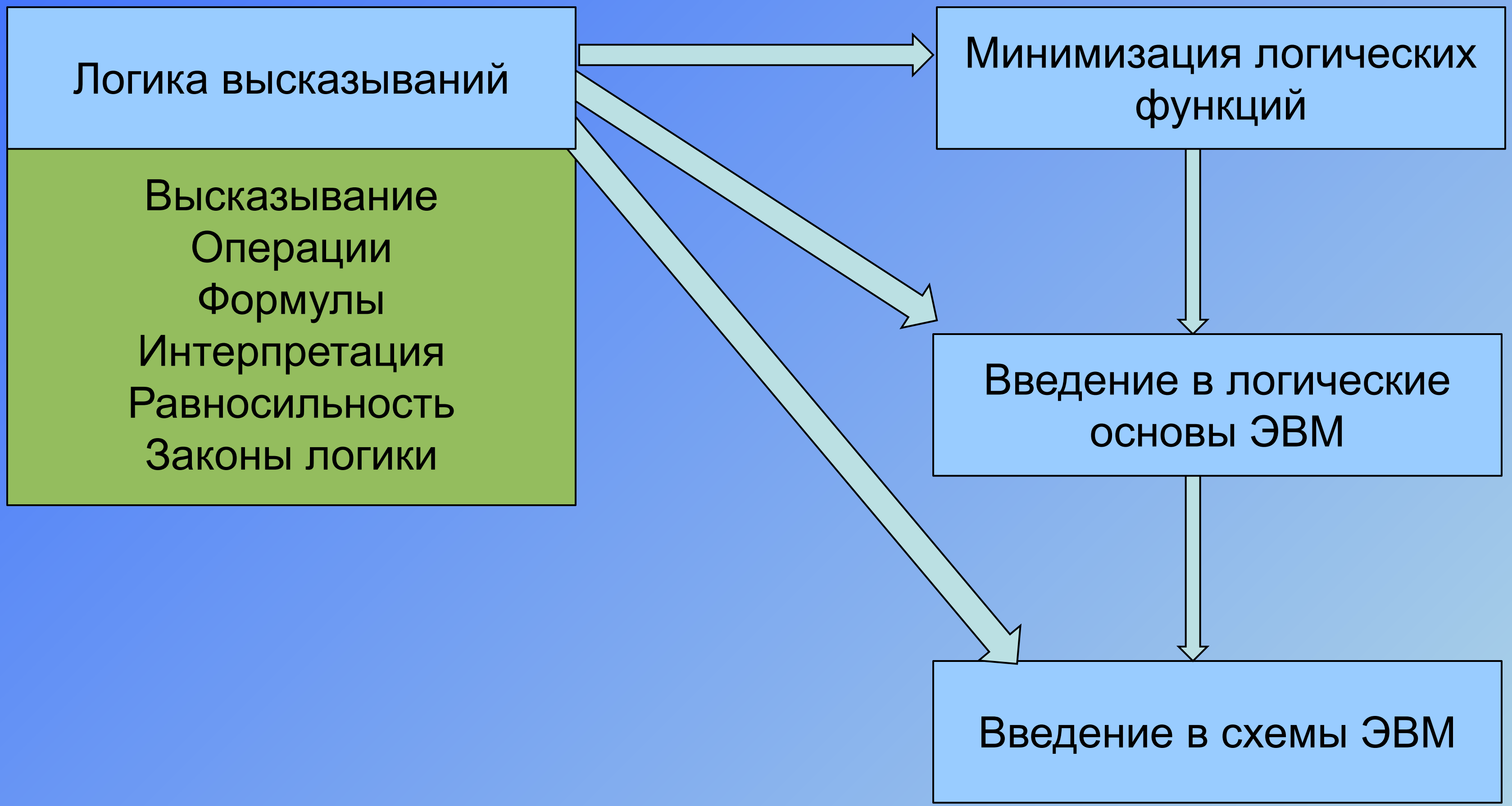
Место логики высказывания

Дискретная математика лежит в основе всей компьютерной логики и принципов организации ЭВМ.

Базируется на

Логика высказываний

Место логики высказывания



Логика высказываний

Логика высказывания:

- Простейшая логика
- Близка к человеческой логике неформальных рассуждений

Основной объект логики высказывания:

логическое высказывание

Высказывание

Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

"*6 — четное число*" — высказывание — **"*Рим — столица Франции*"**

так как высказывание истинное

так как высказывание ложное

"*ученик десятого класса*" — НЕ высказывание — **"*информатика — интересный предмет*"**

ничего не утверждает об ученике

слишком неопределённое понятие "*интересный предмет*"

Представление Истины и Лжи

ИСТИНА	И	True	T	1
ЛОЖЬ	Л	False	F	0

позволяет использовать логику высказываний в логических основах ЭВМ

Операции

А. «Число 1 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	ЛОЖЬ	F	простое	
В. «Если число 1 является положительным, то число 2 также является положительным»	ИСТИНА	Т	составное	Если А, то Г
Г. «число 2 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	

Операции

Операции - способы построения одних высказываний из других

Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывания:

1) «X и Y» называется конъюнкцией высказываний X и Y;
2) «X или Y» называется дизъюнкцией высказываний X и Y;
3) «не X» называется отрицанием высказывания X;
4) «если X, то Y» называется импликацией высказываний X и Y;
5) «X тогда и только тогда, когда Y» называется эквиваленцией высказываний X и Y.

Конъюнкция	& $\wedge$	Может не указываться, по аналогии со знаком умножения *
Дизъюнкция	V	
Отрицание	¬	Черточка над высказыванием $\overline{A}$
Импликация	→	
Эквиваленция	↔	

Символы & ($\wedge$) , V, ¬, →, ↔ называются связками.

Операции

Таблица истинности связок:

Случай	p	q	$p \wedge q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	F

Случай	p	q	$p \vee q$
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

Случай	p	$\sim p$
1	T	F
2	F	T

Пример:

А. «Число 1 является положительным»	А
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	Б = ¬А
В. «Если число 1 является положительным, то число 1+1 также является положительным»	В = А → Е
Е. «число 1+1 является положительным»	Е

Условные высказывания

Таблица истинности для высказывания $p \to q$

Случай	p	q	$p \to q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	T
4	F	F	T

Символ $\to$ называется ***импликацией***, или ***условной связкой***.

Пример.

Требуется найти таблицу истинности для выражения

$$(p \to q) \wedge (q \to r)\,.$$

Используя таблицу истинности для $\to$, приведенную выше, построим сначала таблицы истинности для $(p \to q)$ и $(q \to r)$, учитывая, что импликация ложна только в случае, когда $T \to F$.

Случай	p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$
1	T	T	T	T	**T**	T		T	**T**	T
2	T	T	F	T	**T**	T		T	**F**	F
3	T	F	T	T	**F**	F		F	**T**	T
4	T	F	F	T	**F**	F		F	**T**	F
5	F	T	T	F	**T**	T		T	**T**	T
6	F	T	F	F	**T**	T		T	**F**	F
7	F	F	T	F	**T**	F		F	**T**	T
8	F	F	F	F	**T**	F		F	**T**	F
				1	**2**	1		1	**2**	1

Пример. (продолжение)

Теперь используем таблицу для $\wedge$, чтобы получить для высказывания

$$(p \to q) \wedge (q \to r)$$

таблицу истинности

Случай	p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$
1	T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T
2	T	T	F	T	T	T	**F**	T	F	F
3	T	F	T	T	F	F	**F**	F	T	T
4	T	F	F	T	F	F	**F**	F	T	F
5	F	T	T	F	T	T	**T**	T	T	T
6	F	T	F	F	T	T	**F**	T	F	F
7	F	F	T	F	T	F	**T**	F	T	T
8	F	F	F	F	T	F	**T**	F	T	F
				1	2	1	*	1	2	1

Высказывание вида $(p \to q) \wedge (q \to p)$ обозначается через $p \leftrightarrow q$. Символ $\leftrightarrow$ называется ***эквиваленцией***. Очевидно, таблица истинности для $(p \to q) \wedge (q \to p)$ определяет таблицу истинности для $p \leftrightarrow q$.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(p \to q)}$	$\boldsymbol{\wedge}$	$\boldsymbol{(q \to p)}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow r}$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	T	F
3	F	T	T	F	F	F
4	F	F	T	T	T	T
				$*$		$*$

Непосредственно из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда p и q имеют одинаковые истинностные значения.

Эквивалентные высказывания

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания называются ***логически эквивалентными***. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Например, пусть *p* и *q* обозначают высказывания

p: *Сегодня шел дождь*.

q: *Сегодня шел снег*.

Рассмотрим сложные высказывания:

Неверно, что сегодня шел дождь или снег,

Или символически

$$\sim(p \vee q),$$

И

Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег.

Или символически

$$\sim p \wedge \sim q.$$

Построим таблицы истинности для обоих высказываний.

Случай	p	q	$\sim$	$(p \vee q)$	$\sim p$	$\wedge$	$\sim q$
1	T	T	F	T	F	F	F
2	T	F	F	T	F	F	T
3	F	T	F	T	T	F	F
4	F	F	T	F	T	T	T
			*			#	

Итак, во всех четырех строках истинностные значения для $\sim(p \vee q)$ (обозначенные *) и для $\sim p \wedge \sim q$ (обозначенные #) совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны, т.е.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q\,.$$

Эквивалентность — очень полезное свойство; используя его, можно строить отрицание высказываний с “или”, осуществляя отрицание каждой из его частей и меняя “или” на “и”.

С условным высказыванием — импликацией $p \to q$ — связаны еще три типа высказываний: ***конверсия***, ***инверсия*** и ***контрапозиция*** высказывания $p \to q$. Они определяются следующим образом:

$p \to q$	импликация
$q \to p$	конверсия высказывания $p \to q$
$\sim p \to \sim q$	инверсия высказывания $p \to q$
$\sim q \to \sim p$	контрапозиция высказывания $p \to q$

Пусть дано высказывание-импликация *Если он играет в футбол, то он популярен*. Для этой импликации имеем:

конверсия:	*Если он популярен, то он играет в футбол*
инверсия:	*Если он не играет в футбол, то он не популярен*
контрапозиция:	*Если он не популярен, то он не играет в футбол*

Формулы

Как можно абстрагироваться от высказываний на естественном языке?

Как можно применить математический аппарат для высказываний?

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой**.

Формулы

Атомарными формулами логики высказываний называются буквы U,V,W,X,Y,Z с индексами и без них, а также символы истины 1 и лжи 0.

Формулами логики высказываний называются
1) атомарные формулы;
2) выражения вида (F)&(G), (F) V(G), ¬(F), (F) → (G), (F) ↔ (G), где F и G –формулы логики высказываний.

"если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог"

"если Игорь знает английский или японский язык, то он получит место переводчика"

(A v B) → C

Формула

Формулы

Использование операция в записи формул:

Приоритет связок-операций: (аналогично с арифметическими операциями)

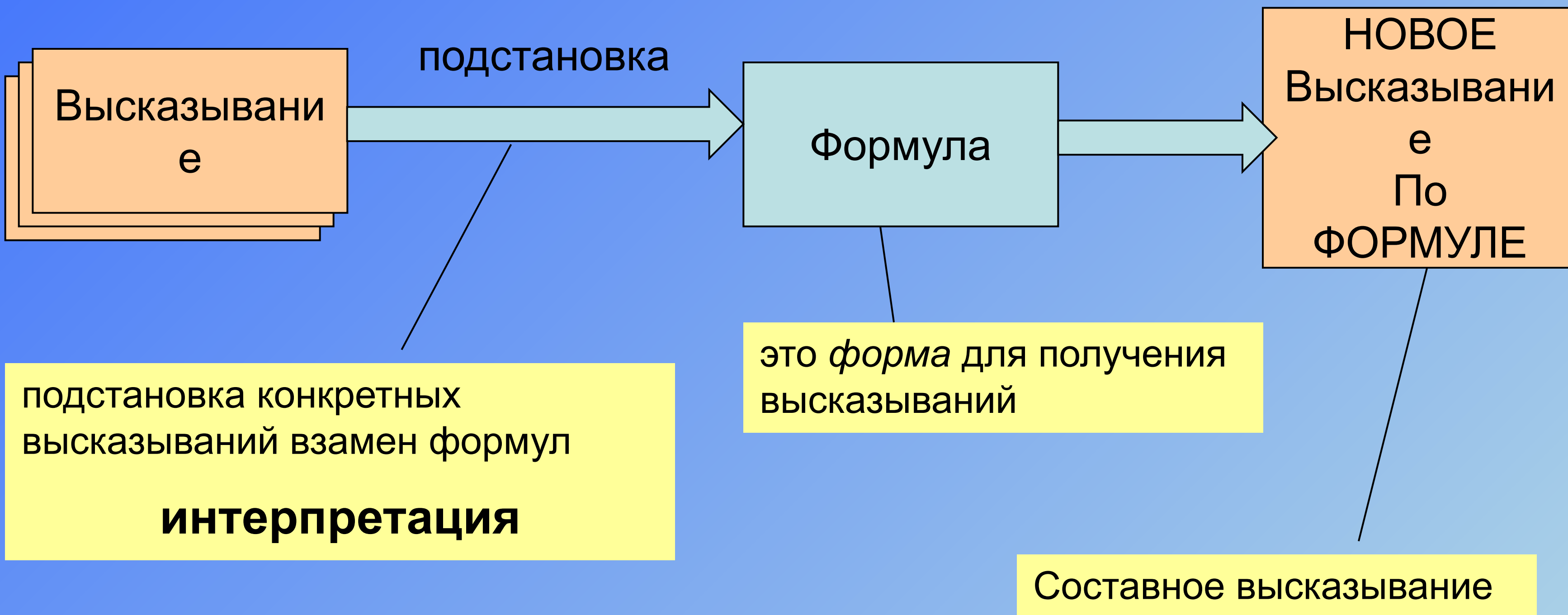
- * / + - ()

1	наивысший	¬	Отрицание
2	высокий	&	Конъюнкция
3	средний	V	Дизъюнкция
4	низкий	→ ↔	Импликация Эквиваленция

Примеры:

(X&Y) V Z	X & Y V Z
(¬X)&Y	¬X&Y
XV(¬Y)	XV¬Y
(X V Y) & Z	(X V Y) & Z
((X)&(Y))→(Z)	X&Y→Z
(X V Y) ↔ (K & L)	X V Y ↔ K & L

Интерпретация



Интерпретация

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть функцию

I: F → P

где F - множество всех формул логики высказывания

P - множество всех высказываний

такую, что I(0)=ложь, I(1)=истина

Некая функция интерпретации I ставит в соответствие формуле (из области определения функции) значение — высказывание (которое является значением функции).

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

I1(X) = «1 - положительное число»

I2(Y) = «2 - четное число»

F=X & Y

I1(F) = I1(X) & I1(Y) =

= «1 – положительное число» & «2 — четное число» =

= **«1 – положительное число И 2 — четное число»**

Интерпретация

На самом деле от высказываний I(F) нам, в основном, будут нужны только их истинные значения 1 и 0.

Интерпретацией в узком смысле мы будем называть функцию

$$\mathbf{I: F \rightarrow \{0,1\}}$$

где F - множество всех формул логики высказывания

такую, что I(0)=0 - ложь, I(1)=1 - истина

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

I1(X) = 1

I2(Y) = 1»

F=X & Y

I1(F) = I1(X) & I1(Y) =

= 1 & 1 = $\boxed{\mathbf{1}}$

Равносильность

Формулы, которые выражают одно и то же, например, формулы X V Y и Y V X, будем называть *равносильными*.

Формулы F и G называются *равносильными*, если для любой интерпретации I выполняется равенство I(F)=I(G)

обозначается символом "=" или символом "≡"

Формула F называется *тождественно истинной* если для любой интерпретации j выполняется равенство I(F)=1

Законы логики

1	F & 1 = F	
2	F v 1 = 1	
3	F & 0 = 0	
4	F v 0 = F	
5	F & F = F	идемпотентность
6	F v F = F	
7	F & G = G & F	коммутативность
8	F v G = G v F	
9	F & (G&H) = (F&G) & H	Ассоциативность конъюнкции. Ассоциативность конъюнкции означает, что в конъюнкции трех формул скобки можно ставить как угодно, а, следовательно, вообще не ставить.
10	F v (GvH) = (FvG) v H	Ассоциативность дизъюнкции. Скобки можно ставить как угодно, а соответственно, вообще не ставить.
11	F & (GvH) = (F&G) v(F&H)	Дистрибутивность - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
12	F v (G&H) = (FvG) & (FvH)	Дистрибутивность - дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

Законы логики

13	F & (FvG) = F	закон поглощения
14	F v (F&G) = F	
15	F & ¬F = 0	закон противоречия
16	F v ¬F = 1	закон исключенного третьего
17	¬(F&G) = ¬F v ¬G	законы де Моргана, в честь известного французского математика и логика
18	¬(FvG) = ¬F & ¬G	
19	¬¬F = F	закон снятия двойного отрицания
20	F→G = ¬F v G	
21	F↔G = (F→G) & (G→F)	

Теорема.

а) ***Законы идемпотентности***

$$p \wedge p \equiv p;$$
$$p \vee p \equiv p.$$

б) ***Закон двойного отрицания***

$$\sim(\sim p) \equiv p.$$

в) ***Законы де Моргана***

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q;$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

г) ***Свойства коммутативности***

$$p \wedge q \equiv q \wedge p;$$
$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

д) ***Свойства ассоциативности***

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

Теорема (продолжение)

д) ***Свойства ассоциативности***

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r\,;$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r\,.$$

е) ***Свойства дистрибутивности***

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

ж) ***Закон контрапозиции***

$$p \to q \equiv\ \sim q \to\ \sim p\,.$$

з) ***Другие полезные свойства***

$$p \to q \equiv\ \sim p \vee q\,;$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывание, истинное во всех случаях, называется ***логически истинным***, или тавтологией; высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется ***логически ложным***, или ***противоречием***. Теоремы в математике являются примерами тавтологий.

Рассмотрим высказывание вида

$$(p \wedge (p \to q)) \to q\,.$$

Ему соответствует таблица истинности

Случай	p	q	$(p$	$\wedge$	$(p \to q))$	$\to$	q
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	F	T	F	F	T	F
3	F	T	F	F	T	T	T
4	F	F	F	F	T	T	F
						*	

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Имея логически истинное высказывание - тавтологии, легко построить логически ложное высказывание - противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание

$$\sim((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$$

логически ложно.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются

$$p \to q.$$

Примеры таких конструкций:

Если p, то q.

p достаточно для q.
p является достаточным условием для q.

q необходимо для p.
q является необходимым условием для p.

p, только если q (или: только если q, то p).

Таблица для $p \to q$ показывает, что если $p \to q$ истинно и p истинно, тогда q должно быть истинным, т.е. истинность p достаточна для истинности q. Поэтому *p достаточно для q* имеет тот же смысл, что и $p \to q$. Таким образом, если q ложно и *q необходимо для p*, тогда p должно быть ложно. Поэтому, если $\sim q$ истинно, тогда $\sim p$ должно быть истинно и $\sim q \to \sim p$. Но последнее выражение — контрапозиция для $p \to q$; следовательно, *q необходимо для p* имеет то же значение, что и $p \to q$.

Законы логики

Модус поненс и модус толленс

Модус поненс и модус толленс
«Модусом» в логике называется разновидность некоторой общей формы рассуждения. Далее будут перечислены четыре близких друг другу модуса, известных еще средневековым логикам.

Модус поненс, называемый иногда ***гипотетическим силлогизмом, позволяет от утверждения условного высказывания и утверждения его основания перейти к утверждению следствия этого высказывания***:

Если А, то В; А
В

Здесь высказывания «если А, то В» и «А» — посылки, высказывание «В» — заключение.
Горизонтальная черта стоит вместо слова «следовательно».
Другая запись:
Если А, то В. А. Следовательно, В.

Законы логики

Модус поненс и модус толленс

Модусом толленсом называется следующая схема рассуждения:
<u>Если А. то В; неверно В</u>
Неверно А
Здесь высказывания «если А, то В» и «неверно В» являются посылками, а высказывание «неверно А» — заключением. Другая запись:
Если А, то В. Не-В. Следовательно, не-А.
Посредством этой схемы от утверждения условного высказывания и отрицания его следствия осуществляется переход к отрицанию основания.
Например: «Если гелий — металл, он электропроводен.
Гелий неэлектропроводен. Следовательно, гелий — не металл».
По схеме модус толленс идет процесс *фальсификации,* установления ложности теории или гипотезы в результате ее эмпирической проверки.
Из проверяемой теории Т выводится некоторое эмпирическое утверждение А, то есть устанавливается условное высказывание «если Т, то А».
Посредством эмпирических методов познания (наблюдения, измерения или эксперимента) предложение А сопоставляется с реальным положением дел.
Выясняется, что А ложно и истинно предложение не-А.
Из посылок «если Т, то А» и «не-А» следует «не-Т», то есть ложность теории Т.

Проверка на равносильность

Способы проверки на равносильность:

1

С использованием таблицы истинности

2

С использованием логического преобразования

Проверка на равносильность

Способ 1: Построение таблицы истинности.

Для того, чтобы даказать эквивалентность двух формул алгебры логики, достаточно показать, что они принимают одни и те же значения на одинаковых наборахзначений своих переменных.

Докажем справедливость первого закона де Моргана:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Формулы $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$ принимают одинаковые знаения на одинаковых наборах значений своих аргументов, значит эти две формулы эквивалентны.

Проверка на равносильность

С использованием таблицы истинности

Проверим на равносильность формулы:

$$F = X \to Y$$

$$G = \neg X \vee Y$$

X	Y	$F = X \to Y$	$\neg X$	$G = \neg X \vee Y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

при всевозможных интерпретациях X и Y интерпретации F и G имеют равные значения.

Значит F = G, то есть F и G равносильны.

Проверка на равносильность

Способ 2: Если конечная цепочка тождественных преобразований переводит одну формулу к другой, формулы также являются эквивалентными.

Докажем справедливость второго закона де Моргана при условии, что первый закон де Моргана выполняется:

$$\overline{x \wedge y} = \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}} = \left| \begin{array}{c} \text{по } 1 - \text{му законy} \\ \text{де Моргана} \end{array} \right| = \overline{\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}} = \bar{x} \vee \bar{y}$$