Дополнительные главы математики

Лекция 1

Тема 1. Матрицы и определители

§1. Понятие матрицы. Действия с матрицами

Прямоугольной матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей строк и столбцов.

Матрицу записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mn}.$$

Любая матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов ($m=n$), называется квадратной матрицей порядка n.

Её элементы $a_{11}, a_{22},\ldots, a_{nn}$ составляют главную диагональ,

а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1},\ldots,a_{n1}$ – побочную диагональ.

При $m=n=1$ матрица состоит из одного числа и отождествляется с ним.

Важную роль в теории матриц играют следующие частные виды матриц:

-матрица-столбец (матрица размера $m\times 1$)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

-матрица-строка (матрица размера $1\times n$)

$$A=(a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n});$$

-ступенчатая матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

- треугольная матрица – квадратная матрица, в которой все элементы выше (ниже) главной диагонали равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

- диагональная матрица – квадратная матрица, в которой отличны от нуля только элементы главной диагонали

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

- скалярная матрица – диагональная матрица, все элементы которой равны ($a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=\lambda$)

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix};$$

- единичная матрица – скалярная матрица при $\lambda=1$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix};$$

- нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны нулю.

Действия с матрицами

1. Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными, если они одного размера и соответствующие их элементы равны $a_{ij}= b_{ij}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$.

2. Сумма $A+B$ матриц A и B одного размера $m\times n$ есть матрица C того же размера, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Свойства:

$A+B=B+A$;

$(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Операция умножения матрицы на число:
$tA=At=(t\,a_{ij})$.

Свойства операции:

$t\cdot(l\cdot A)=(t\cdot l)\cdot A$;

$(t+l)\cdot \mathrm{A}=t\cdot A+l\cdot A$;

$t\cdot(A+B)=t\cdot A+t\cdot B$.

Пример. Найти матрицу $C=2A+4B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Операция умножения матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{k\times p}$ определена только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то есть $n=k$.

Определим первоначально умножение матрицы-строки $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1}\end{pmatrix}$

$$A\cdot B = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{s1}.$$

Тогда произведением матрицы A размера $m\times n$ со строками $A_1, A_2,\ldots, A_m$ на матрицу B размером $n\times p$ со столбцами $B_1, B_2,\ldots, B_p$ называется матрица размера $m\times p$, элементы которой получаются следующим образом: каждая строка матрицы последовательно умножается на каждый столбец матрицы и записывается в i-ю строку и j-й столбец матрицы C, т. е. $C_{ij} = A_i B_j = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_nB_1 & A_nB_2 & \cdots & A_nB_p \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить значение многочлена $f(x)=3x^2-2x+5$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матриц:

1. $A(B+C)=AB+AC$,
2. $(A+B)C=AC+BC$,
3. $A(\lambda B)=\lambda(AB)$,
4. $A(BC)=(AB)C$,
5. $AE=EA=A$.

5. Транспонированием матрицы называется операция замены строк матрицы её столбцами с сохранением их номеров.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

– транспонированная матрица.

Свойства операции транспонирования:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A^T)^T = A$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(A \cdot B)^T = B^T A^T$.

§2. Определители и их свойства

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц и при $n \geq 3$ связано с понятием минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A.

Минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A − определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из данной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Пример. Найти алгебраические дополнения матрицы третьего порядка.

Уральский федеральный университет

Тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$

$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$

Определитель n-го порядка вводится по индукции аналогичным образом через определители $(n-1)$-го порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Краткая запись: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства определителей:

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы: $\det A^T = \det A$.
2. При перестановке местами двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
3. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.
4. Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не изменится, если к некоторой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на число λ.

Часто определители удобно вычислять, используя их свойства. Например, определитель удобно разлагать по строке (столбцу), содержащей нули, использовать пропорциональность строк (столбцов) и т.д.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

§3. Обратная матрица

Матрица $B=A^{-1}$ называется *обратной* к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1}=A^{-1} \cdot A=E$.

Замечание. Не для всякой матрицы существует обратная.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда $A \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица A не имеет обратной, так как $A \cdot A^{-1} \neq E$.

Если для матрицы A существует обратная A^{-1}, то матрица называется *обратимой* (или невырожденной). В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Свойства операции обратимости матрицы.

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $A^{-1}A = E$.

3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$, так как $E = E^{T} = (A \cdot A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{T} \cdot A^{T}$.

4. Если для матрицы существует обратная , то она единственна.

Теорема. Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A не имеет обратной.

Теорема. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то обратная матрица A^{-1} существует и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Замечание. По этой формуле удобно вычислять обратную матрицу для матриц 2-го или 3-го порядка.

Пример1. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Пример2. Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение матричных уравнений

С помощью обратной матрицы можно решить матричное уравнение $AX = B$ (или $XA = B$).

Если матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$), то для нее существует обратная A^{-1}.

Тогда, умножив уравнение $AX = B$ слева на A^{-1}

(а уравнение $XA = B$ справа на A^{-1}),

получим $X = A^{-1}B$ $(X = BA^{-1})$.

Пример 1. Решить матричное уравнение $A\ X\ B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований

Рассмотрим следующие элементарные преобразования матрицы:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

Для отыскания обратной матрицы A^{-1} следует:

1) построить расширенную матрицу $(A|E)$, приписывая к матрице A справа единичную матрицу;

2) используя элементарные преобразования строк расширенной матрицы, получить на месте матрицы A единичную матрицу E; тогда на месте единичной матрицы будет обратная матрица A^{-1}.

Схема этого процесса: $(A|E) \sim \ldots \sim (E|\, A^{-1})$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения методом элементарных преобразований

Для решения уравнения вида $AX = B$ следует:

1) построить расширенную матрицу $(A|B)$;

2) используя элементарные преобразования строк расширенной матрицы, получить на месте матрицы A единичную матрицу E; тогда на месте матрицы B будет искомая матрица X.

Схема этого процесса: $(A|B)\sim\ldots\sim(E|\,X)$

Для решения уравнения вида $XA = B$ следует:

1) транспонировать исходное уравнение $(XA)^T = B^T$, тогда $A^T X^T = B^T$ (получаем уравнение, соответствующее предыдущему случаю);

2) реализовать схему: $(A^T | B^T) \sim \ldots \sim (E | X^T)$;

3) найти решение: $X = (X^T)^T$.

Пример 2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$