Если основанием логарифма служит число *e*, то говорят, что задан ***натуральный логарифм***. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение ***ln*** (l – логарифм, n – натуральный).

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

$$\ln 1 = 0;$$

$$e^{\ln x} = x;$$

$$\ln e = 1;$$

$$\ln e^r = r;$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

В курсе математического анализа доказано, что для любого значения $x>0$ справедлива формула дифференцирования

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Пример 4:

Вычислить значение производной функции $y = \ln(3x+5)$ в точке x = -1.

Решение:

$$y' = (\ln(3x+5))' = 3 \cdot \frac{1}{3x+5} = \frac{3}{3x+5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3\cdot(-1)+5} = 1,5.$$

Ответ: 1,5

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например: $\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2;$ $\left(4^{x+5}\right)' = 4^{x+5} \cdot \ln 4.$

$$\left(5^{-3x}\right)' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$\ln(x^3+2x^4)$	$\dfrac{3x^2+8x^3}{x^3+2x^4} = \dfrac{3+8x}{x+2x^2}$
$\log_4 \sin x$	$\dfrac{\cos x}{\sin x \ln 4} = \dfrac{ctgx}{\ln 4}$
$\log_2(x^2+1)$	$\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$
$\lg\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}\ln 10} = \dfrac{1}{2x\ln 10}$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Найти производную: а) $(\log_2 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 2}$;

б) $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$;

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ =

.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

3. Производная логарифмической функции

$$\boxed{f(x) = \log_a x \qquad (a > 0, a \neq 1)}$$

$$\forall x > 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a x + \Delta x - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a (1 + \dfrac{\Delta x}{x})}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

Учитывая, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (1 + \dfrac{\Delta x}{x})}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Частный случай $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$