Интегрирование иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов,содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей.Их можно найти следующим образом: **под радикалом выделить полный квадрат:**

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$ и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$

При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Пример№1. Найти интеграл: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$

Решение: Так как

$$4x^2 + 2x + 1 = 4(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) = 4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}),$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}}} = \left[\begin{array}{c} x + \frac{1}{4} = t \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln\left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C = \frac{1}{2}\ln\left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}} \right| + C$$

Пример №2. Найти интеграл : $I=\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx.$

Решение: Выделим полный квадрат :

$$6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-((x+1)^2-7)=7-(x+1)^2,$$

Сделаем подстановку: $\begin{bmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}$

Тогда: $I=\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}dt=\int\frac{t}{\sqrt{7-t^2}}dt+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$

$$=-\frac{1}{2}\int(7-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(7-t^2)+3\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=-\sqrt{6-2x-x^2}+3\cdot\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\,dx, \quad \int \cos ax \cos bx\,dx, \quad \int \sin ax \sin bx\,dx, \qquad \neq$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right].$$

Пример №1. Найти интеграл: $\int \sin 3x \cos 7x dx$

Решение: Воспользуемся формулой

$$\left[\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]\right]$$

Получим: $\frac{1}{2}[\sin(3-7)x + \sin(3+7)x]$

Тогда $\int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-4x) + \sin 10x) dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 4x) dx =$

$$\frac{1}{2}(-\frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 4x) + C = \frac{\cos 10x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$$

Пример№2. Найти интеграл: $\int \cos 6x \cdot \cos x dx$

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]$$

Получим:

$$\cos 6x \cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(6-1)x + \cos(6+1)x\right]$$

Тогда $\int \cos 6x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 7x) dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 7x}{14} + C$

Пример№3. Найти интеграл $\int \sin 2x \cdot \sin \frac{2x}{3} dx.$

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

Получим: $$\sin 2x \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos(2-\frac{2}{3})x - \cos(2+\frac{2}{3})x\right]$$

Тогда: $$\int \sin 2x \sin \frac{2x}{3} dx = \frac{1}{2}\int (\cos\frac{4x}{3} - \cos\frac{8x}{3})dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\sin\frac{4x}{3} - \frac{3}{8}\sin\frac{8x}{3} + C) = \frac{3}{8}\sin\frac{4x}{3} - \frac{3}{16}\sin\frac{8x}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{16}(2\sin\frac{4x}{3} - \sin\frac{8x}{3}) + C$$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) Подстановка $\sin x = t,$ если $n -$ целое положительное **<u>нечетное</u>** число;
2) Подстановка $\cos x = t,$ если $m -$ целое положительное **<u>нечетное</u>** число;
3) Формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

Если m n $-$ целые **<u>неотрицательные четные</u>** числа;

4) Подстановка $tgx = t,$ если $m+n-$ есть **<u>четное отрицательное целое</u>** число.

Пример№1. Найти интеграл: $I=\int \sin^4 x\cdot\cos^5 x dx.$

Решение: Применим подстановку $\sin x=t.$ Т.к.n=5 (1 случай).

Тогда $\left[\begin{array}{c} x=\arcsin t \\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ \cos x=\sqrt{1-t^2} \end{array}\right]$

Получим: $I=\int t^4\cdot(\sqrt{1-t^2})^5\cdot\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int t^4(\sqrt{1-t^2})^4 dt=\int t^4(1-t^2)^2 dt=$

$$=\int(t^4-2t^6+t^8)dt=\frac{t^5}{5}-2\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C.$$

Пример №2. Найти интеграл: $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$

Решение: воспользуемся формулой

$$1)\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$2)\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x cox 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Пример №3. Найти интеграл:

$$I=\int\frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\int\cos^{-1}x\cdot\sin^{-3}x dx.$$

Решение: Здесь $m+n=-4.$ (4 случай)

Обозначим $tgx=t.$ Тогда $\left[\begin{array}{c} x=arctgt \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right]$

Получим:

$$I=\int\frac{dt/(1+t^2)}{1/\sqrt{1+t^2}\cdot t^3/(\sqrt{1+t^2})^3}=\int\frac{dt/(1+t^2)}{t^3/(\sqrt{1+t^2})^2}=\int\frac{dt/(1+t^2)}{t^3/(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{1+t^2}{t^3}dt=\int t^{-3}dt+\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}ctg^2x+\ln|tgx|+C$$

• Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрическихфункций.Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$,над которыми выполняются рациональные действия (сложения,вычитание,умножение иделение)

Принято обозначать $R(\sin x;\cos x)$, R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$

Сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$,которая называется **универсальной**

Действительно,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Поэтому $\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$

Где $R_1(t) -$ рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий,зато всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие,более простые подстановки,

в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции.

В частности,удобны следующие правила:

1)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ *нечётна относительно* $\sin x$

Т.е $R(-\sin x;\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$ *,*то подстановка $\cos x = t$

рационализирует интеграл;

2)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ *нечётна относительно* $\cos x$

Т.е. $R(\sin x;-\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$,то делается подстановка $\sin x = t$

3)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ $\cos x$

$R(-\sin x;-\cos x) = R(\sin x;\cos x)$ *,*то интеграл

рационализируется подстановкой $tgx = t$.Такая же

подстановка применяется,если интеграл имеет вид $\int R(tgx)dx$

Пример: Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$

Тогда

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arg tg \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \arg tg \frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$