Обратная позиционная задача

Обратную позиционную задачу формулируют следующим образом

При заданном положении и ориентации схвата $s = s^*$ **или** $T_N = T_N^*$ **найти обобщенные координаты** $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_N^*\right)^T$

Если обозначить

$$s = f_s(q)$$

или

$$T_N = f_T(q)$$

то искомые обобщенные координаты q^* будут задаваться соотношением

$$q^* = f_s^{-1}(s^*)$$

или

$$q^* = f_T^{-1}(T_N^*).$$

Решение обратной задачи

Решение обратной позиционной задачи сводится в общем случае к решению нелинейной тригонометрической системы шести уравнений с N неизвестными.

Такого рода системы могут:

1. **не иметь ни одного решения**. Это означает, что заданные положение и ориентация схвата системы не могут быть достигнуты никаким выбором углов (перемещений) в сочленениях;
2. **иметь единственное решение**;
3. **иметь более одного решения**. Это означает, что существует несколько (или бесконечно много) конфигураций манипулятора, обеспечивающих заданное положение схвата.

Общего метода решения этой системы в явном виде не существует. Решение является желательным, т.к. управление манипулятором осуществляется в режиме on-line. (*Применение численных методов сопряжено с рядом трудностей, связанных с возможной расходимостью соответствующих итерационных схем*.)

Существует три метода решения обратной позиционной задачи:

1. **метод обратных преобразований,**
2. **тригонометрический подход,**
3. **итерационный метод.**

Выбор метода для решения конкретной задачи определяется спецификой кинематической схемы манипулятора, а также опытом исследователя.

Метод обратных преобразований

Матрица T_N, определяющая положение и ориентацию схвата, имеет вид

$$T_N = A_1 A_2 \ldots A_{N-1} A_N$$

где $A_i = A_i(q_i)$ — матрицы перехода от i-й к (i -1)-й системе координат манипулятора.

Тогда, умножая это выражение на A_1^{-1} (матрица A_1 должна быть невырожденная), имеем

$$A_1^{-1} T_N = A_2 \ldots A_{N-1} A_N$$

Т.к. матрица T_N известна то полученное выражение решено относительно q_1. Если из получившегося выражения можно найти q_1, то этот процесс повторяется для $q_2, q_3, \ldots, q_N$. Если умножить T_N справа на A_N^{-1}, аналогично можно найти q_N.

Численные методы решения обратной задачи

Согласно численным методам, весьма развитым в вычислительной математике и носящим итерационный характер, обратную задачу рассматривают как задачу поиска корня уравнения

$$f(q) = s^*,$$

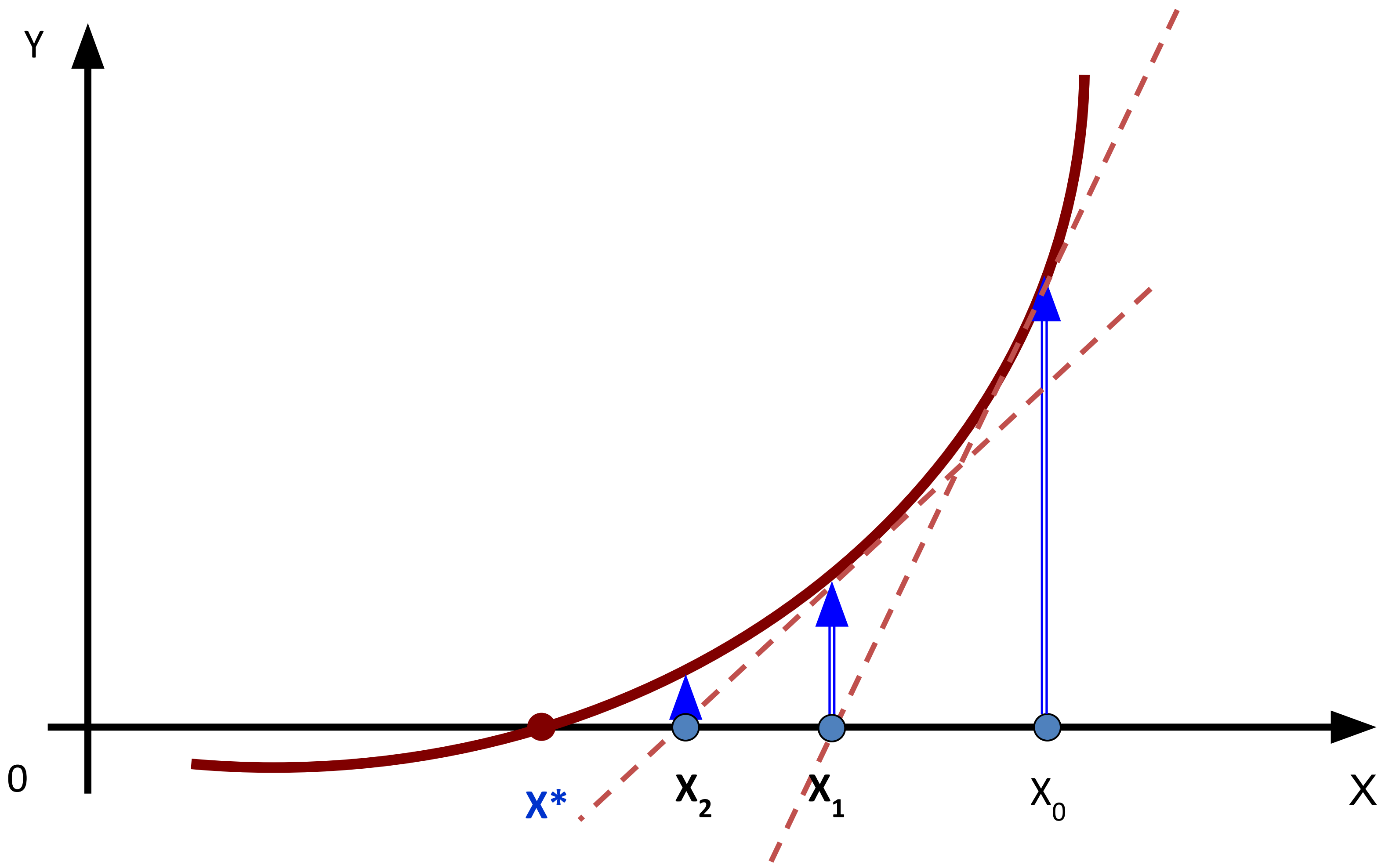
где s^* — заданное положение схвата.

Простейшим из этих методов является метод Ньютона (метод касательных). В основе метода лежит простая геометрическая идея, состоящая в том, что если для решения скалярного уравнения

$$\varphi(x) = 0$$

достаточно выбрать некоторое начальное приближение x_0 и построить следующее приближение x_1 как точку пересечения касательной к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке x_0 с осью X, то полученное значение x_1 «ближе» к корню x^*, чем x_0.

Иллюстрация к численному методу



Сходимость итерационного метода

Продолжая этот процесс и получая аналогичным образом x_2, x_3, …. можно рассчитывать на то, что последовательность $\{x_i\}$ сойдется к **x***.

Реализация этого подхода приводит к следующей итерационной схеме:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\varphi(x_i)}{\varphi'(x_i)}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Существует теорема о достаточных условиях сходимости итерационного процесса.

Пусть **x*** является решением рассматриваемого уравнения. Обозначим через Ω_ε ε-окрестность точки **x***:

$$\Omega_\varepsilon = \{x : |x - x^*| < \varepsilon\}.$$

Пусть при некоторых $a > 0, a_i \geq 0$ выполняются условия

$$|\varphi'(x)| < a_1, \quad x \in \Omega_a$$

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2) - \varphi'(u_2)\cdot(u_1 - u_2)| \leq a_2 |u_2 - u_1|, \quad u_1, u_2 \in \Omega_a.$$

Пусть $c = a_1 \cdot a_2$, $b = \min(a, c^{-1})$. Тогда при этих условиях и $x_0 \in \Omega_b$ процесс сходится к **x*** с оценкой погрешности $|x_n - x^*| \leq c^{-1} \cdot (c \cdot |x_0 - x^*|)^{2^n}$. Если $\varphi(x)$ имеет ограниченную вторую производную, то последнее условие выполнимо.

Применение численного метода

Применяя метод Ньютона для решения уравнения $f(q) = s^*$, получаем следующую схему:

$$q_{i+1} = q_i + \frac{\left(s^* - f(q_i)\right)}{f_q'(q_i)}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

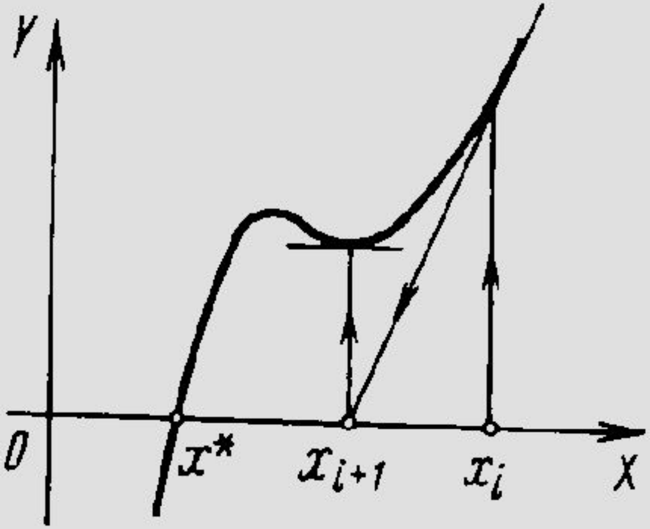
где q_0 - заданное начальное значение вектора обобщенных координат.

Входящую в выражение матрицу $J(q) = f'(q)$ называют **матрицей Якоби**, которая используется достаточно часто для управления манипуляторами. При использовании метода Ньютона **требуется вычислять обратную матрицу Якоби на каждом шаге итерации**.

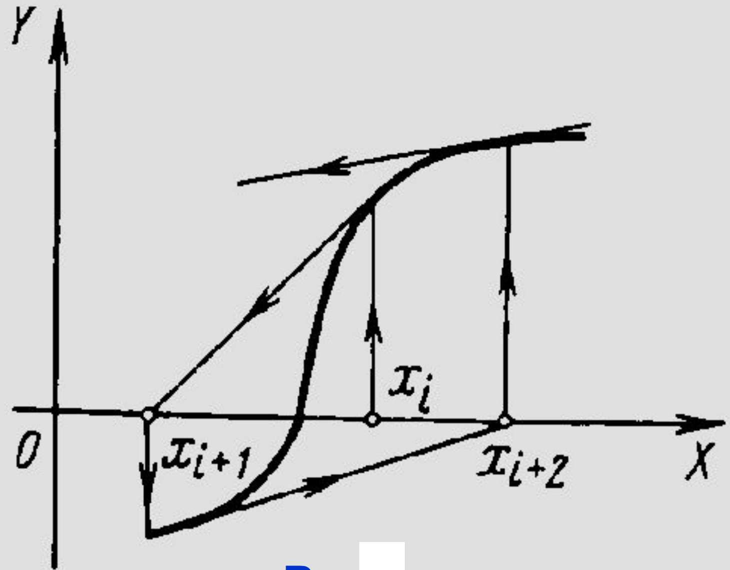
Использование метода Ньютона приводит к весьма простым соотношениям, однако в процессе его применения может возникнуть ряд трудностей.

Гарантом сходимости, является выбор «правильного» начального приближения, удовлетворяющего условиям сформулированной выше теоремы.

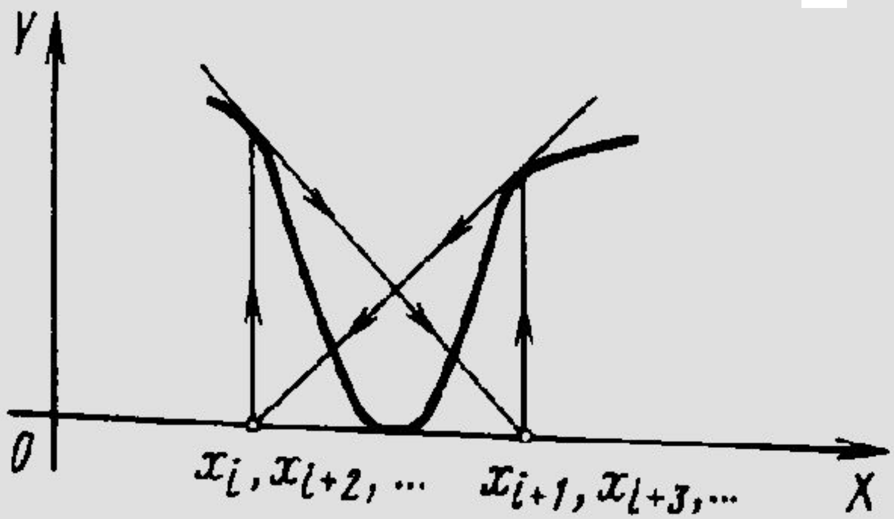
Основные проблемы при численном решении ОЗК



Производная = 0



Расхождение



Зацикливание

Метод последовательных приближений (численное решение ОЗК)

Задача сводится к поиску m обобщенных координат по заданным m элементам матрицы T, при этом $m \le 6$.

Если необходимо найти 6 обобщенных координат $\{q_1, q_2, \dots, q_6\}$, т.е m=n=6 заданными будут являться **6 наддиагональных элементов** матрицы T.

Зададимся начальными произвольными значениями обобщенных координат $\{q_1^0, q_2^0, \dots, q_6^0\}$.

Обозначим через q_i^{k-1} - приближенное значение для k-ого шага, и q_i^k - уточненное значение.

Матрицу T представим в виде степенного ряда Тейлора для отрезка с центром в q_i^{k-1}, ограничившись только его линейными членами:

$$T = T^{k-1} + \sum_{j=1}^{6} \frac{dT^{k-1}}{dq_j} \cdot (q_j^k - q_j^{k-1}),$$

где T^{k-1} - матрица T, элементы которой выражены через приближенные значения обобщенных координат.

Вычисление производных

Введем следующее обозначение

$$U_j = \frac{dT}{dq_j}.$$

Тога ряд Тейлора можно записать в виде:

$$T = T^{k-1} + \sum_{j=1}^{6} U_j^{k-1} \cdot (q_j^k - q_j^{k-1})$$

Таким образом, мы получаем систему из 16 уравнений (матрица размером 4*4), но нас интересуют только наддиагональные элементы:

$$t_{12} = t_{12}^{k-1} + \sum_{j=1}^{6} (U_j)_{12}^{k-1} \cdot (q_j^k - q_j^{k-1})$$

$$t_{13} = t_{13}^{k-1} + \sum_{j=1}^{6} (U_j)_{13}^{k-1} \cdot (q_j^k - q_j^{k-1})$$

……..

Так как q_j^{k-1} известны, то получаем систему уравнений относительно q_j^k. После разрешения системы полученный результат обозначаем через q_j^{k-1} и повторяем расчеты до тех пор, пока $q_j^k - q_j^{k-1} \le \varepsilon$, где ε – заданная малая величина (ошибка).

Вычисление U_j

В общем случае, т.к. $U_{ij} = \frac{dT_i}{dq_j}$, $i = n$.

$$U_{ij} = \frac{dT_i}{dq_j} = \frac{d}{dq_j}(A_1 A_2 \ldots A_j \ldots A_i)$$

T представляет собой произведение локальных матриц перехода, из которых только одна зависит от q_j - A_j, поэтому:

$$U_{ij} = A_1 A_2 \ldots \frac{dA_j}{dq_j} \ldots A_i$$

Можно данное выражение упростить, т.к. обобщенные координаты – это или перемещение или вращение относительно оси Z:

$$U_{ij} = A_1 A_2 \ldots \Omega_j \cdot A_j \ldots A_i,$$

где $\Omega_j = \begin{cases} \Omega_{rot} - \text{вращение} \\ \Omega_{trans} - \text{перемещение} \end{cases}$

Вид дифференцирующих матриц

$$\Omega_{rot} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Omega_{trans} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{, поэтому } \frac{dA_i}{dq_i} = \Omega_i A_i$$

Пусть $T_3 = A_1 A_2 A_3$, при этом кинематическая схема манипулятора ВПП, тогда

$$U_{31} = \Omega_{rot} A_1 A_2 A_3$$

$$U_{32} = A_1 \Omega_{trans} A_2 A_3$$

$$U_{33} = A_1 A_2 \Omega_{trans} A_3$$

Если $T_3 = \begin{vmatrix} -c_1 & 0 & -s_1 & -q_3 s_1 \\ -s_1 & 0 & c_1 & q_3 c_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, тогда $U_{31} = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & -q_3 c_1 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & -q_3 s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

$$U_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad U_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение задачи ОК

$$\begin{cases} t_{14} = -q_3\sin(q_1) & = 30 \\ t_{24} = q_3\cos(q_1) & = 100 \\ t_{34} = q_2 & = 115 \end{cases}$$

$$(U_{31})_{14} = -q_3\cos(q_1)$$

$$(U_{32})_{14} = 0$$

$$(U_{33})_{14} = -\sin(q_1)$$

Поэтому первое уравнение имеет вид:

$$30 = -q_3^{k-1} \cdot \sin(q_1^{k-1}) - -q_3^{k-1} \cdot \cos(q_1^{k-1}) \cdot (q_1^k - q_1^{k-1}) + 0 \cdot (q_2^k - q_2^{k-1}) - \sin(q_1^{k-1}) \cdot (q_3^k - q_3^{k-1})$$

Составляем аналогично еще 2 уравнения, подставляем вместо (k-1) компонентов приближенные значения и ищем решение системы линейных уравнений относительно q_i^k.