

Знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця A називається невинродженою, якщо визначник $\det A \neq 0$. В протилежному випадку матриця A називається винродженою.

Оберненою матрицею по відношенню до даної невинродженої квадратної матриці A n -ного порядку, називається матриця, яка, помножена ліворуч, і праворуч на дану матрицю, дає одиничну матрицю.

Обернена матриця позначається символом A^{-1} . Таким чином, відповідно визначення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$A \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow A^T \rightarrow A^+ \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$$

Трисидна матриця отримується шляхом заміни кожного елемента матриці A на його алгебраїчне відповідне доповнення.

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то обернена матриця не існує.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти матрицю обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знаходимо матрицю A^{-1} . Визначник матриці **A**:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Оскільки $\det A \neq 0$, матриця A має обернену матрицю A^{-1}

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Бажано зробити перевірку . $A \cdot A^{-1} = E$

Одержуємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} 4 & -9 & 10 \\ -8 & 11 & -20 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{10}{14} \\ \frac{8}{14} & -\frac{11}{14} & \frac{20}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{1}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{12}{14} + \frac{16}{14} + \frac{10}{14} & \frac{27}{14} - \frac{22}{14} - \frac{5}{14} & -\frac{30}{14} + \frac{40}{14} - \frac{5}{14} \\ -\frac{16}{14} + \frac{16}{14} + 0 & \frac{36}{14} - \frac{22}{14} + 0 & -\frac{40}{14} + \frac{40}{14} + 0 \\ -\frac{4}{14} + \frac{8}{14} - \frac{4}{14} & \frac{9}{14} - \frac{11}{14} + \frac{2}{14} & -\frac{10}{14} + \frac{20}{14} + \frac{4}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Обернена матриця знайдена вірно