

Системи лінійних рівнянь, умови їх сумісності і визначенності

Метод Гаусса

Типи систем рівнянь

Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має розв'язок, и *несумісною*, якщо вона не має розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок и *невизначеною*, якщо вона має безкінечну множину розв'язків.

Две сумісні системи називаються *рівносильними*, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

Биография

Дед Гаусса был бедным крестьянином, отец — садовником, каменщиком, смотрителем каналов в герцогстве Брауншвейг. Уже в **двухлетнем возрасте** мальчик показал себя **вундеркиндом**. В **три года** он умел **читать и писать**. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы: $1+100=101$, $2+99=101$ и т. д., и мгновенно получил результат $50 \times 101 = 5050$.

После 1801 года Гаусс включил в круг своих интересов естественные науки. Катализатором послужило открытие малой планеты Церера, вскоре после наблюдений потерянной. 24-летний Гаусс проделал (за несколько часов) сложнейшие вычисления по новому, открытому им же методу, и указал место, где искать беглянку; там она, к общему восторгу, и была вскоре обнаружена.

Умер Гаусс 23 февраля 1855 года в Гёттингене.



Елементарні перетворення

До елементарних перетворень системи вінесемо наступне:

1. зміна місцями двох любих рівнянь;
2. множення обох частин любого з рівнянь на довільне число, відмінне від нуля;
3. додавання до обох частин одного з рівнянь системи відповідних частин другого рівняння, множення на любе дійсне число.

Загальний випадок

Розглянемо метод Гауса для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими у випадку, коли існує єдиний розв'язок:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

1-ий крок метода Гауса

На першому шаге виключимо невідоме x_1 із всіх рівнянь системи (1), крім першого. Нехай коефіцієнт a_{11} назвемо ведучим елементом. Розділимо перше рівняння системи (1) на a_{11} . Отримаємо рівняння:

$$\text{де } a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \quad j=1,2,3; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Виключимо x_1 із другого і третього рівнянь системи (1). Для цього віднімемо з них рівняння (2), помножене на коефіцієнт при x_1 (відповідно a_{21} і a_{31}).

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad (2)$$

Система прийме вигляд:

Верхній індекс (1) вказує, що мова йде про коефіцієнти першої перетвореної системи

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (3)$$

2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3) из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{23}^{(1)}$ за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \quad (4)$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

где

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$.
Получим уравнение: $a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)}$
Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0$, находим $x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{(3)}$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \quad (5)$$

Система вида (5) называется **треугольной**.

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги [1](#) и [2](#)) называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют **обратным ходом метода Гаусса**.

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2 . Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1 .

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система m линейных уравнений с n неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

Такая система имеет единственное решение, которое находится в

результате проведения обратного хода метода Гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{array} \right.$$

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2,5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго ($a_{21}=1$, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на $a_{31}=3$

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4,5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$x_3 = -42 / (-14) = 3;$$

$$x_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

$$x_1 = 8 - 0,5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1$$

Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

Габриэль Крамер

(31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция)

Биография

Крамер родился в семье франкоязычного врача. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

1727: Крамер 2 года путешествовал по Европе, заодно перенимая опыт у ведущих математиков — Иоганна Бернулли и Эйлера, Галлея и де Муавра, Мопертюи и Клеро.

В свободное от преподавания время Крамер пишет многочисленные статьи на самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей.

1751: Крамер получает серьёзную травму после дорожного инцидента с каретой. Доктор рекомендует ему отдохнуть на французском курорте, но там его состояние ухудшается, и 4 января 1752 года Крамер умирает.

