Лекція 6

АНАЛІЗ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ ЗА ДИСЦИПЛІНОЮ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЯВНИМИ ВТРАТАМИ

Основні питання

1. **Обслуговування викликів у СРІ типу М/М/v/L**
2. **Обслуговування викликів у СРІ типу Mi/М/v/L**
3. **Порівняння пропускної здатності повністю доступної СРІ при обслуговуванні викликів примітивного й найпростішого потоків**

Література

2. Омельченко А.В. Основи аналізу систем розподілу інформації. Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – С 35-42

Обслуговування викликів у СРІ типу M/M/v/L

- Система типу M/M/v/L вперше була досліджена А. К. Ерлангом.
- Сформулюємо постановку задачі.
- На вхід повністю доступної СРІ з приладами надходить найпростіший потік викликів, параметр якого не залежить від стану СРІ: $\lambda_i = \lambda$, $i = \overline{0,v}$.
- Тривалість обслуговування виклику приладом СРІ є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом і характеризується параметром обслуговування μ.
- Необхідно визначити ймовірності станів СРІ.

- Зазначимо, що система типу M/M/v/L є окремим випадком системи Mr/M/v, яка фактично була розглянута у попередньому розділі. Для цього випадку параметр потоку звільнень $v_i = i \cdot \mu$, $i = \overline{0, v-1}$. Тому скористаємося формулами для фінальних станів (8,9). У результаті підстановки в них виразів для параметра потоку викликів і параметра потоку звільнень отримаємо

$$\boxed{p_i = \frac{\frac{y^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{v} \frac{y^k}{k!}} = E_{i,v}(y) \, , \quad i = \overline{0, v} \, ,} \qquad (1)$$

де $y = \lambda / \mu$ – інтенсивність вхідного навантаження.

- **Послідовність імовірностей p_i, $i=\overline{0,v}$, розрахована згідно з (1), називається розподілом Ерланга.**
- Для розподілів Ерланга справедливе рекурентне співвідношення

$$p_i = p_{i-1} \cdot \frac{y}{i}, \quad i=\overline{1,v}, \tag{2}$$

де

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{v} \frac{y^k}{k!}} \tag{3}$$

- Із порівняння формули (2) з аналогічним співвідношенням для розподілу Пуассона випливає, що з точністю до постійного множника, розподіл Ерланга співпадає з розподілом Пуассона. Тому розподіл Ерланга називають ще усіченим розподілом Пуассона.

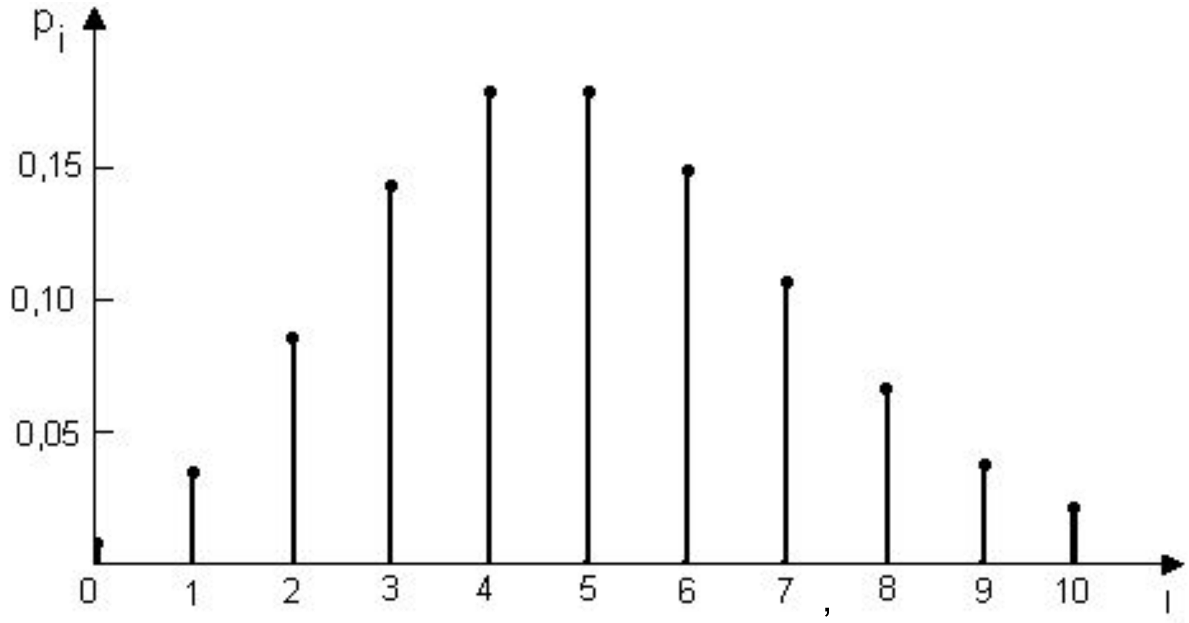

Рисунок 1 – Приклад розподілу Ерланга для випадку $v = 10$, $y = 5$

Севастьянов Б.Л. показав [1], що формула для розподілу Ерланга справедлива для довільного розподілу тривалості обслуговування, якщо тільки середня тривалість обслуговування є скінченною величиною.

Імовірності втрат

- ***Імовірність втрат за часом*** p_t являє собою проміжок часу, протягом якого зайняті всі v приладів СРІ і згідно (1) дорівнює

$$p_t = p_v = \frac{\dfrac{y^v}{v!}}{\sum\limits_{k=0}^{v} \dfrac{y^k}{k!}} \qquad (4)$$

- ***Імовірність втрат за викликами*** визначається як відношення інтенсивності потоку втрачених викликів до інтенсивності потоку вхідних викликів

$$p_в = \frac{\chi_{втр}}{\chi} \quad , \tag{5}$$

де

$$\chi = \sum_{i=0}^{v} \lambda_i \cdot p_i \quad ; \qquad \chi_{втр} = \lambda_v \cdot p_v \quad .$$

У цьому випадку маємо

$$\chi = \sum_{i=0}^{v} \lambda \cdot p_i = \lambda \quad ; \qquad \chi_{втр} = \lambda \cdot p_v \quad .$$

Тому ймовірність втрат

$$p_в = p_t = p_v \quad .$$

- ***Імовірність втрат за навантаженням*** визначається як відношення інтенсивності втраченого навантаження до інтенсивності вхідного навантаження

$$p_н = \frac{y_{втр}}{y} = \frac{y - y_o}{y} \qquad (6)$$

- Тут інтенсивність обслуженого навантаження

$$y_o = \sum_{i=0}^{v} i \cdot p_i$$

З урахуванням виду розподілу Ерланга одержимо

$$y_o = \sum_{i=1}^{v} i \cdot \frac{\dfrac{y^i}{i!}}{\sum\limits_{k=0}^{v} \dfrac{y^k}{k!}} = y \cdot \frac{\left[1 + \dfrac{y}{1!} + \ldots + \dfrac{y^{v-1}}{(v-1)!}\right]}{\sum\limits_{k=0}^{v} \dfrac{y^k}{k!}} = y \cdot [1 - p_v]$$

Тому

$$\boxed{p_н = p_t = p_v\ .} \qquad (7)$$

Отже, при обслуговуванні викликів найпростішого потоку повністю доступною СРІ ймовірності втрат за часом, викликами і навантаженням рівні між собою й дорівнюють ймовірності того, що СРІ перебуває у стані v

- $$\boxed{p_t = p_в = p_н = E_v(y) = \frac{\frac{y^v}{v!}}{\sum_{k=0}^{v} \frac{y^k}{k!}}} \quad . \qquad (8)$$
- **Формула (8) була виведена Ерлангом у 1917 році. Ця формула для втрат у повністю доступній СРІ називається першою формулою Ерланга або В-формулою Ерланга.**
- Перша формула Ерланга табульована. При сучасному розвитку обчислювальної техніки значення функції $E_v(y)$ можуть бути обчислені з використанням комп`ютерних програм Mathcad, Matlab та інших. При цьому при великій кількості приладів ( $v \geq 100$ ) доцільно використовувати зв`язок розподілу Ерланга з розподілом Пуассона.

- На рис. 2 у графічному вигляді зображені функції Ерланга $E_v(y)$ для значень параметра v рівних відповідно 5, 10, 15, 20, 25 і 30.

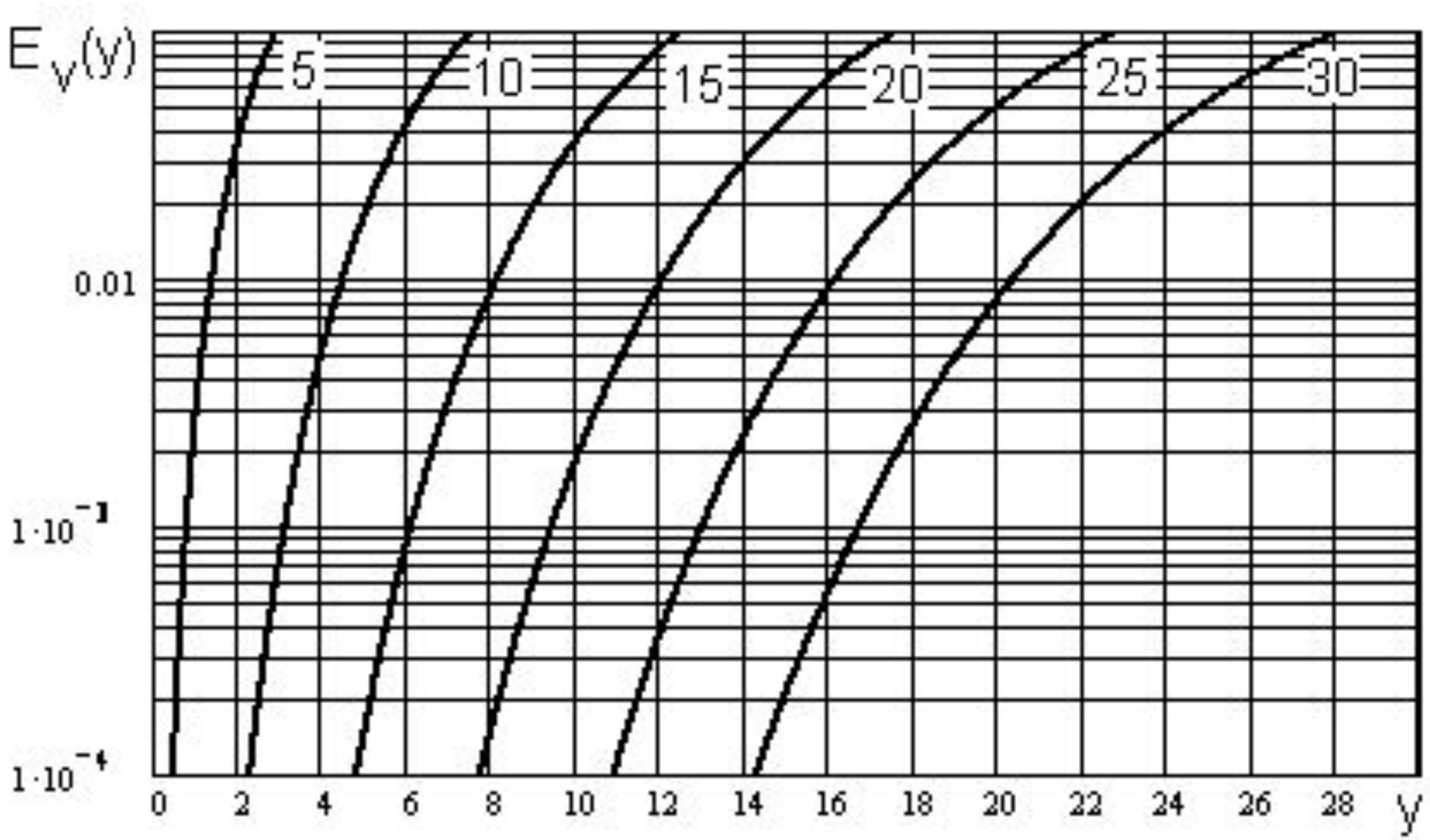

Рисунок 2 − Вид функцій Ерланга

- Аналіз формули Ерланга показує, що за умови фіксованої якості обслуговування середнє використання одного приладу $\eta = y/v$ (пропускна здатність одного приладу) збільшується зі зростанням числа приладів . В телефонії ця властивість називається «перевагою великих жмутків» ліній, що обслуговують виклики.
- Знайдемо навантаження, що обслуговується кожним приладом повністю доступної СРІ при впорядкованому зайнятті вільних приладів, коли кожен виклик обслуговується вільним приладом з найменшим номером.

- Навантаження, що обслуговується *i*-им приладом, дорівнює

$$\eta_i = y_o(i) - y_o(i-1) = y[1 - E_i(y)] - y[1 - E_{i-1}(y)]$$

$$\eta_i = y[E_{i-1}(y) - E_i(y)] \qquad (9)$$

- Слід звернути увагу на високе використання першого приладу, що дорівнює

$$\eta_1 = \frac{y}{1+y} \qquad (10)$$

- Згідно з (10) при y=100, 50 і 10 Ерл перша лінія пучка пропускає відповідно навантаження 0,99, 0,98 і 0,91 Ерл.

- Неважко показати, що найбільше навантаження обслуговує перший прилад. А потім зі збільшенням номера приладу обслужене навантаження спадає. З фізичної точки зору це пояснюється тим, що на кожний наступний прилад надходить навантаження меншої інтенсивності, ніж на попередній прилад. Крім того, на другий і наступний прилад надходять навантаження, що створюються потоками Пальма, які характеризуються більшою нерівномірністю інтервалів між викликами, ніж у найпростіших потоках. При цьому, чим більший номер приладу, тим вища нерівномірність потоку.

Обслуговування викликів у СРІ типу Mi/M/v/L

- Постановка задачі обслуговування викликів у СРІ типу Mi/M/v/L формулюється так же, як і в попередньому розділі з тією різницею, що на вхід системи поступає примітивний потік викликів, що є окремим випадком симетричного потоку з простою післядією. Його параметр

$$\lambda_i = (n-i)\cdot\alpha \ , \qquad 0 \le i \le v \quad , \qquad (11)$$

де α – параметр потоку викликів від одного вільного джерела;

n – число джерел викликів.

Після підстановки (11) у вираз для ймовірностей станів СРІ (5.8, 5.9), а також з огляду на те, що параметр потоку звільнень

$\nu_i = \mu \cdot i$, одержимо

$$\boxed{p_i = \frac{C_n^i \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i}{\sum_{k=0}^{\nu} C_n^k \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k}\quad, \qquad i = 0,1,\ldots,\nu\quad.} \tag{12}$$

Послідовність імовірностей p_i , $i = \overline{0,\nu}$, розрахована згідно з (12), називається розподілом Енгсета.

Якщо число джерел викликів $n \to \infty$, а параметр джерела у вільному стані $\alpha \to 0$ так, що $n \cdot \alpha = \lambda$, то

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \alpha \to 0}} C_n^i \cdot \alpha^i = \frac{\lambda^i}{i!} .$$

Тому розподіл Енгсета (12) збігається до розподілу Ерланга (1).

Визначимо інтенсивність навантаження, що надходить від одного джерела. Для цього розглянемо випадок, коли система працює без втрат. Це має місце, якщо $n \leq v$

У цих умовах втрат не виникне, якщо за кожним джерелом закріплюється свій прилад.

- Тому достатньо розглянути випадок $n = v = 1$.
- При цьому згідно з (12) одержимо

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \alpha}, \qquad p_1 = \frac{\alpha}{\mu + \alpha}. \qquad (13)$$

- При цьому інтенсивність навантаження, що надходить від одного джерела, дорівнює

$$a = p_1 = \frac{\alpha}{\mu + \alpha}. \qquad (14)$$

- Звідси маємо

$$\alpha = \frac{a}{1-a}\mu \quad . \qquad (15)$$

- Після використання формули (15) у виразі (12) одержимо вираз для розподілу Енгсета у такому вигляді

$$\boxed{p_i = \frac{C_n^i a^i (1-a)^{n-i}}{\sum_{k=0}^{v} C_n^k a^k (1-a)^{n-k}} \;, \quad i = 0,1,\ldots,v \quad .} \qquad (16)$$

- Звідси зрозуміло, чому розподіл Енгсета називається усіченим біноміальним розподілом. При $n = v$ розподіл Енгсета співпадає з біноміальним розподілом.

- Визначимо імовірності втрат в СРІ типу Mi/M/v/L.
- ***Імовірність втрат за часом*** являє собою проміжок часу, протягом якого зайняті всі прилади СРІ

$$\boxed{p_t = p_v = \frac{C_n^v a^v (1-a)^{n-v}}{\sum_{k=0}^{v} C_n^k a^k (1-a)^{n-k}}.} \qquad (17)$$

- З огляду на те, що значення ймовірностей $p_i, \quad i = \overline{0, v}$ у формулі (5), визначаються згідно з (12), одержимо, що ***імовірність втрат за викликами***

$$\boxed{p_в = \frac{\alpha(n-v) \cdot C_n^v (\frac{\alpha}{\mu})^v}{\sum_{k=0}^{v} \alpha(n-k) \cdot C_n^k (\frac{\alpha}{\mu})^k}.}$$

- Звідси випливає, що

$$\boxed{p_{в} = \frac{C_{n-1}^{v}(\frac{\alpha}{\mu})^{v}}{\sum\limits_{k=0}^{v} C_{n-1}^{k}(\frac{\alpha}{\mu})^{k}} = p_t(n-1).} \qquad (18)$$

- Таким чином, у повністю доступній системі, на яку надходить найпростіший потік викликів, втрати за викликами за наявності n джерел дорівнюють втратам за часом за наявності $n-1$-го джерела. При цьому втрати за викликами менші втрат за часом.

- ***Імовірність втрат за навантаженням*** визначимо як відношення інтенсивності втраченого навантаження до інтенсивності вхідного навантаження

$$p_н = \frac{y_n}{y} = \frac{1 - y_o}{y} \quad . \tag{19}$$

Інтенсивність вхідного навантаження $y = n \cdot a$

Інтенсивність обслуженого навантаження визначимо за формулою

$$y_o = \sum_{i=0}^{v} i \cdot p_i \quad .$$

У результаті досить громіздких обчислень одержимо

$$p_н = (1 - \frac{v}{n}) p_t \ . \tag{20}$$

- З формули (20) випливає, що ймовірність втрат за навантаженням є менша ймовірності втрат за викликами, оскільки

$$p_н = (1 - \frac{v}{n}) \cdot \frac{C_n^v (\frac{\alpha}{\mu})^v}{\sum_{k=0}^{v} C_n^k (\frac{\alpha}{\mu})^k} = \frac{C_{n-1}^v (\frac{\alpha}{\mu})^v}{\sum_{k=0}^{v} C_n^k (\frac{\alpha}{\mu})^k} < \frac{C_{n-1}^v (\frac{\alpha}{\mu})^v}{\sum_{k=0}^{v} C_{n-1}^k (\frac{\alpha}{\mu})^k} = p_в \quad ,$$

де враховано, що

$$C_n^v = \frac{n}{n-v} \cdot C_{n-1}^v \ .$$

У граничному випадку при $v = n$ ймовірність втрат за навантаженням дорівнює нулю. У цьому випадку ймовірність втрат за викликами також дорівнює нулю, оскільки інтенсивність потоку загублених викликів

$\chi_n = \lambda_v \cdot p_v = \alpha(n-n)p_v = 0$, а ймовірність втрат за часом дорівнює $p_t = a^n$.

Таким чином, при обслуговуванні примітивного потоку викликів повністю доступною СРІ мають місце співвідношення

$$\boxed{p_н \le p_в \le p_t\ .} \tag{21}$$

При обслуговуванні ж найпростішого потоку ймовірності всіх втрат однакові:

$$p_н = p_в = p_t\ .$$

Порівняння пропускної здатності повністю доступної СРІ при обслуговуванні викликів примітивного й найпростішого потоків

- При обслуговуванні викликів примітивного й найпростішого потоків має місце однаковий характер залежності пропускної здатності від числа приладів СРІ при заданих імовірностях втрат за викликами (або за навантаженням). Водночас при обслуговуванні викликів примітивного потоку навантаження є вищим в області будь-яких значень втрат.

- Так наприклад, при числі приладів $\boldsymbol{v}$**=30** обслужене навантаження, що створюється примітивним потоком від 50 джерел при $\boldsymbol{p_н}$**=0,01**, на **12%** вище, а при $\boldsymbol{p_н}$**=0,2** на **6%** вище навантаження, що створюється найпростішим потоком.
- Таким чином, за критерієм максимуму величини обслуженого навантаження, примітивний потік викликів завжди «кращий» найпростішого потоку.
- В області малих імовірностей втрат за викликами пропускна здатність СРІ є вищою при обслуговуванні примітивного потоку, ніж при обслуговуванні найпростішого потоку.

- Для примітивного потоку зі зменшенням числа джерел n збільшується пропускна здатність пучка. Так при ***v*=30** і ймовірності втрат ***pв*=0,005** навантаження, що створюється примітивним потоком з ***n*=100** і ***n*=50**, можуть відповідно досягати **21,65** Эрл і **20,00** Ерл, а навантаження, що створюється викликами найпростішого потоку − **18,7** Ерл, тобто навантаження від ***n*=50** джерел на **8,2%** більше навантаження від ***n*=100** джерел і на **16 %** більше навантаження, створюваного викликами найпростішого потоку. Зі збільшенням імовірності втрат за викликами вплив числа джерел на пропускну здатність системи зменшується.