Лекція 5

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЯКОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ ВИКЛИКІВ У ПОВНІСТЮ ДОСТУПНИХ СРІ

Основні питання

1. Постановка задачі

2. Вирішення задач аналізу СРІ з використанням математичного апарата марківських процесів

3. Застосування процесів загибелі й народження для аналізу СРІ

Постановка задачі

- Будемо вважати, що повністю доступна СРІ з v приладами обслуговує виклики, які утворять симетричний потік з простою післядією з параметром λ_i , $i=\overline{0,n}$. Тривалість обслуговування виклику приладом СРІ є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом, і характеризується параметром обслуговування μ .
- Слід визначити ймовірності станів СРІ p_i , $i=\overline{0,n}$, які розрізняються числом зайнятих приладів системи або числом викликів у черзі.

Вирішення задач аналізу СРІ з використанням математичного апарата марківських процесів

- Позначимо через $S(t)$ число викликів, що перебувають у системі в момент часу t. Воно є випадковою величиною, що змінюється у часі. Тому $S(t)$ − випадковий процес із кінцевою множиною значень $S(t) = 0,1,2,...,n$.
- Таким чином, процес $S(t)$ визначає стан СРІ і приймає $(n + 1)$-е значення. Можна показати, що процес $S(t)$ є марківським.
- **Марківським** називається такий випадковий процес, у якому для будь-якого моменту часу ймовірність будь-якого значення в майбутньому залежить тільки від значення процесу $S(t)$ в даний момент і не залежить від попередніх значень цього процесу .

- Марківським процес $S(t)$ є тому, що моменти надходження нових викликів визначаються потоком вхідних викликів і не залежать від стану системи в моменти часу, що передують моменту часу t. Крім того, від плину процесу до моменту часу t не залежать і моменти закінчення викликів (властивість експоненціального розподілу тривалості обслуговування).
- При викладенні теорії випадкових процесів з дискретними станами використовуються орієнтовані графи станів процесів (станів систем). На цих графах вершини зображуються кружечками, у які вписуються стани системи, а дуга, проведена з вершини S_i у вершину S_j, означає можливість переходу з одного стану в інший (рис. 1).

Рисунок 1 − Приклад орієнтованого графу станів системи

- Прийнято вважати , що перехід системи зі стану S_i у стан S_j здійснюється під впливом пуассонівського потоку з інтенсивністю $a_{ij}(t)$. Тоді ймовірність переходу зі стану S_i в стан S_j за малий інтервал часу

$$p_{ij}(t,t+\tau)=a_{ij}(t)\cdot\tau+o(\tau)\quad,\qquad(1)$$

- де $o(\tau)$ - величина меншого порядку порівняно з τ .

- Марківський випадковий процес с дискретними станами і неперервним часом називається однорідним, якщо ймовірність переходу зі стану S_i в стан S_j за час τ не залежить від того, в який момент часу t система знаходилася в стані S_i, а залежить тільки від величини τ:

$$p_{ij}(t,t+\tau)=p_{ij}(\tau) \qquad (2)$$

- Для однорідного процесу Маркова

$$p_{ij}(t,t+\tau)=a_{ij}\cdot\tau+o(\tau).$$

- У цьому випадку можуть використовуватися розмічені орієнтовані графи станів системи (рис. 2).

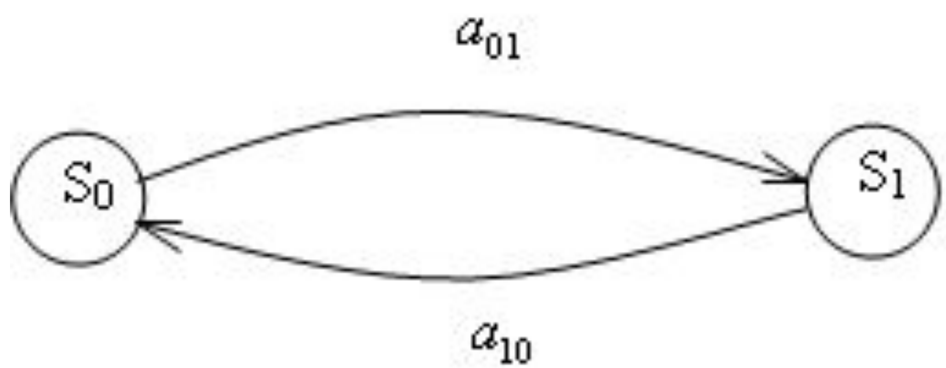

Рисунок 2 − Приклад розміченого орієнтованого графа станів системи

Розглянемо систему, що має $n+1$ можливих станів $S_0, S_1, ..., S_i, ..., S_n$. Нехай $p_i(t)$ − імовірність того, що в момент часу t система перебуває у стані S_i.

- Можна показати, що якщо ймовірності переходів $p_{ij}(t, t+\tau)$ задовольняють співвідношенню (1), то ймовірності станів марківського процесу підкоряються системі диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\boxed{\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} p_j(t) \cdot a_{ji}(t) - p_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}(t) \quad , \quad i = 0, \ldots, n} \quad (3)$$

- При складанні рівнянь Колмогорова по графу станів зручно використовувати поняття потоку ймовірності .

  При цьому потоком імовірності, що переводить систему зі стану S_j у стан S_i, називається добуток імовірності $P_j(t)$ на інтенсивність $a_{ji}(t)$ потоку подій, що переводять систему по цій дузі.

- Рівняння Колмогорова складаються за таким правилом: похідна ймовірності будь-якого стану системи дорівнює сумі потоків імовірності, що переводять систему в цей стан, мінус сума всіх потоків імовірності, що виводять систему із цього стану.
- Систему рівнянь Колмогорова вирішують при початкових умовах, що задають ймовірності станів у початковий момент часу $p_0(0)$, $p_1(0)$,….. , $p_n(0)$

  з урахуванням умови нормування

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1 \tag{4}$$

Назвемо марківський процес, що протікає в системі, ергодичним, якщо для усіх перехідних ймовірностей існує межа

$$\lim_{\tau \to \infty} p_{ji}(t, t+\tau) = p_i \geq 0, \quad \forall j, i = \overline{0,n}.$$

- Відповідно до теореми Маркова, для того, щоб процес, який відбувається в системі, був ергодичним, необхідно, щоб її граф стану був сильно зв'язаним, а ймовірності переходів задовольняли умові однорідності (2).
- Для систем, що є ергодичними, після проходження деякого часу наступає стаціонарний режим, коли ймовірності станів не залежать від часу: $p_i(t) = p_i, \quad i = \overline{0,n}$. Ймовірності $p_i, \quad i = \overline{0,n}$ називаються фінальними.

- Якщо ергодична система перебуває в стаціонарному режимі, то, як витікає з рівнянь Колмогорова, сума всіх потоків імовірності, що переводять систему з інших станів у стан S_i, дорівнює сумі всіх потоків імовірності, що переводять систему зі стану S_i в інші стани

$$\boxed{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} p_j \cdot a_{ji} = p_i \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}, \qquad i = 0, \ldots, n} \tag{5}$$

Застосування процесів загибелі й народження для аналізу СРІ

- Для вирішення задач обслуговування викликів симетричного потоку повністю доступною СРІ зручно використовувати окремий випадок марківських процесів – процес загибелі й народження.
- Процесом загибелі й народження називається такий марківський процес із неперервним часом , який має кінцеву або злічену множину станів, у кожному з яких за нескінченно малий інтервал часу $[t, t+\tau)$ з імовірностями більшими нуля можливі безпосередні переходи тільки в сусідні стани. Іншими словами, зі стану i можливий перехід тільки у стани $i-1$ або $i+1$, або ж процес зберігає стан i .

- Якщо на повністю доступну СРІ надходить ординарний потік викликів, то процес обслуговування викликів є процесом народження й загибелі. Граф станів системи для цього випадку наведений на рис. 3.

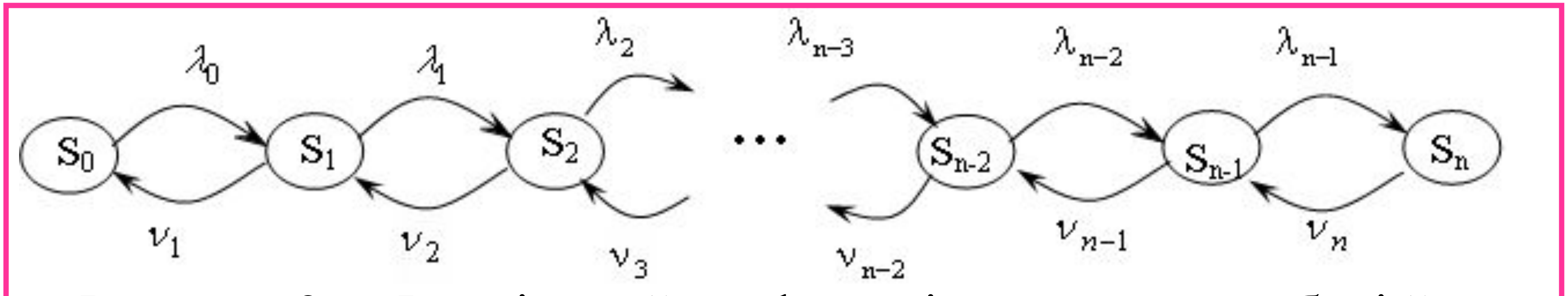

Рисунок 3 − Розмічений граф станів процесу загибелі й народження

- Процес народження в розглянутому випадку ототожнюється з процесом зайняття приладів системи, а процес загибелі − із процесом звільнення приладів. Параметри потоків зайняття і потоків звільнень позначимо відповідно λ_i та ν_i , $i = 1,\dots,n$.

- Для інтенсивностей переходів у процесах народження й загибелі, що описують стани СРІ, справедливі наступні співвідношення

$$\boxed{a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & j = i + 1; \\ \nu_i, & j = i - 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}} \qquad (6)$$

- Для процесів народження й загибелі система рівнянь Колмогорова має простий вигляд, до якого можна було б прийти, виходячи з умови рівності потоків імовірності між сусідніми станами процесів

$$
\boxed{\begin{cases}
\lambda_0 p_0 = \nu_1 p_1; \\
\lambda_1 p_1 = \nu_2 p_2; \\
\ldots \\
\lambda_{i-1} p_{i-1} = \nu_i p_i; \\
\ldots \\
\lambda_{n-1} p_{n-1} = \nu_n p_n.
\end{cases}} \qquad (7)
$$

- Систему рівностей (7) можна сформулювати у вигляді такого правила: для процесу загибелі й народження, що описує СРІ, яка перебуває у стаціонарному режимі, потоки ймовірності між будь-якими двома сусідніми станами рівні. Сформульоване правило відбиває такий інтуїтивний принцип: частота переходів СРІ, що перебувають у стаціонарному режимі, зі стану S_{i-1} у стан S_i, дорівнює частоті переходів зі стану S_i у стан S_{i-1}

Розв`яжемо систему (7) з урахуванням умови нормування

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 .$$

В результаті отримаємо вираз для фінальних станів СРІ

$$\boxed{p_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{i} \nu_k} p_0 , \quad i = 1,2,\ldots,n} \tag{8}$$

де

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{i} \nu_k}}} \qquad (9)$$

- Вирази для фінальних станів (8, 9) надзвичайно важливі в теорії телетрафіку. З них як окремі випадки випливають конкретні формули, що дозволяють аналізувати характеристики якості СРІ для різних моделей.