

Лекція 2

ПОТОКИ ВИКЛИКІВ

Основні питання

- 1. Поняття потоків викликів і основні способи їхнього задання**
- 2. Класифікація потоків викликів відповідно до їх властивостей**
- 3. Основні класи потоків. Найпростіші потоки**

Література

Омельченко А.В. Основи аналізу систем розподілу інформації. Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – С 13-17, 24

Поняття потоків викликів і основні способи їхнього задання

- **Потоком викликів (заявок) називається послідовність викликів (заявок), що надходять на СРІ в деякі моменти часу [1-5].**
- Потоки можуть бути детермінованими або випадковими.
- Детермінований потік – це потік викликів з фіксованими моментами їхнього надходження. Такий потік рідко зустрічається.
- Якщо моменти надходження викликів залежать від випадкових факторів, то потік називається випадковим. Випадковий потік може бути заданий трьома еквівалентними способами:
 - 1) послідовністю моментів виникнення викликів (див. рис. 2);
 - 2) послідовністю інтервалів між сусідніми викликами (див. рис. 3);
 - 3) цілочисленним процесом, що визначає кількість викликів, які надійшли протягом часу $[t_0, t)$ (див. рис. 4).

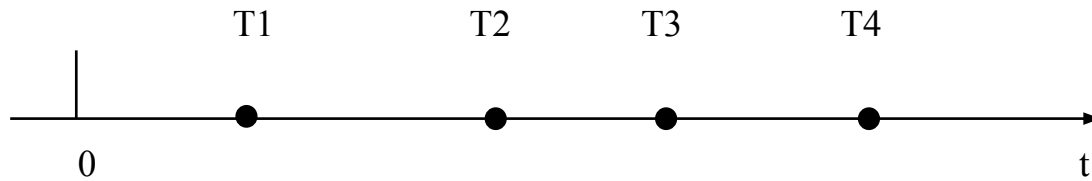


Рисунок 2 – Задання потоку послідовністю моментів виникнення викликів

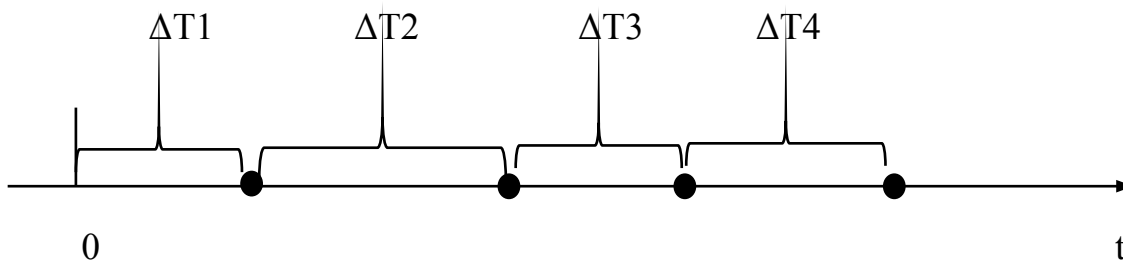


Рисунок 3 – Задання потоку послідовністю інтервалів між моментами появи викликів

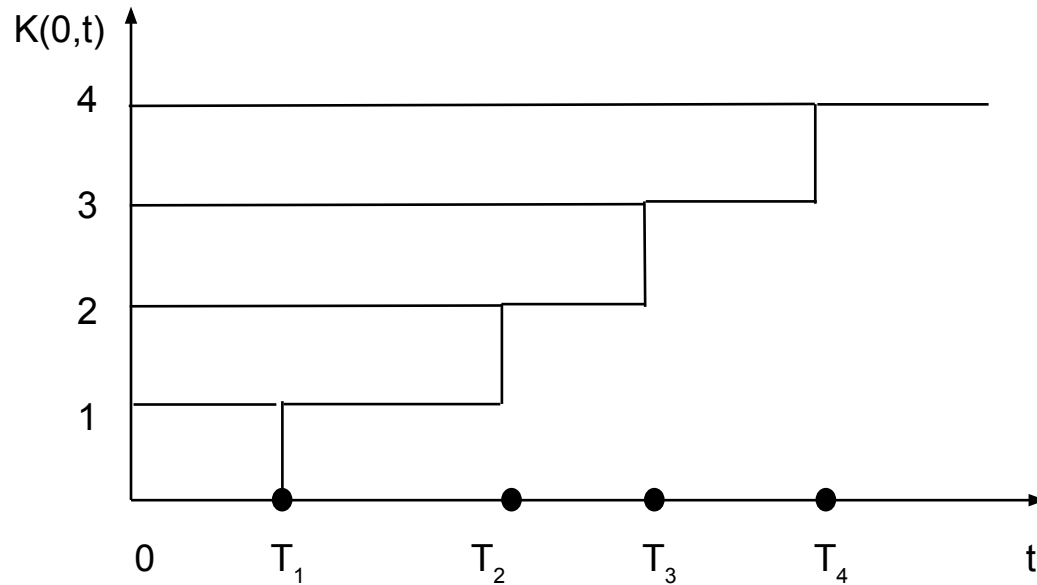


Рисунок 4 – Задання потоку цілочисленним процесом

Надалі використовуватимемо позначення $P_i(t_1, t_2)$ для ймовірності надходження i викликів протягом інтервалу $[t_1, t_2)$, а позначення $P_{i \geq k}(t_1, t_2)$ для ймовірності надходження не менше k викликів за інтервал $[t_1, t_2)$

- Імовірнісний опис потоку викликів може бути виконаний з використанням багатовимірних функцій розподілу обраних характеристик потоку.
- До основних числових характеристик потоків викликів належать: **провідна функція потоку, інтенсивність і параметр потоку.**
- **Провідною функцією потоку** $\Lambda(t)$ називається математичне сподівання числа викликів, що надійшли за інтервал часу $[0, t)$ тобто $\Lambda(t) = M[K(0; t)]$
- Згідно з означенням,

$$\Lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_k(0, t) \quad (1)$$

Провідна функція невід'ємна й неспадна. Потоки з неперервною провідною функцією називаються регулярними, а зі східчастою – сингулярними.

- Під параметром потоку $\lambda(t)$ у момент часу t розуміється величина

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{k \geq 1}(t, t + \tau)}{\tau} . \quad (2)$$

Під інтенсивністю потоку розуміється середнє число викликів за одиницю часу:

$$\chi(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{M[K(t, t + \tau)]}{\tau} = \Lambda'(t) . \quad (3)$$

Для будь-яких потоків $\chi(t) \geq \lambda(t)$, причому для так званих ординарних потоків $\chi(t) = \lambda(t)$.

Класифікація потоків викликів відповідно до їх властивостей

- Потоки викликів класифікуються згідно з такими властивостями, як **однорідність**, **стаціонарність**, **ординарність і післядія**. Розглянемо ці властивості.
- 1. У неоднорідному потоці кожен виклик має дві і більше характеристики. Наприклад, виклики, що надходять від абонентів телефонної мережі, характеризуються моментами їхнього надходження, напрямками встановлення з'єднань, тривалістю обслуговування й іншими характеристиками.
- Однорідний потік характеризується лише моментами надходження викликів.
- На практиці потоки викликів, як правило, є неоднорідними. Однак у теорії розглядаються однорідні потоки, якщо відсутні спеціальні застереження.
- 2. Властивість стаціонарності потоку означає, що його ймовірнісні характеристики не змінюються в часі.

- Потік викликів називається стаціонарним, якщо при будь-якому n спільна ймовірність $P\{K(t, t + \tau_i) = k_i, i = \overline{1, n}\}$

надходження викликів за інтервали часу $[t, t + \tau_1)$, $[t, t + \tau_2)$, ..., $[t, t + \tau_n)$ не залежить від початкового моменту часу t .

Для стаціонарного потоку його параметр та інтенсивність постійні: $\lambda(t) = \lambda$, $\chi(t) = \chi$.

Потік, що не має властивості стаціонарності, називається нестаціонарним.

3. Потік викликів називається ординарним, якщо в ньому неможливе одночасне надходження двох і більше викликів, тобто виконується така умова:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{k \geq 2}(t, t + \tau)}{\tau} = 0 \quad . \quad (4)$$

- Потік, що не має цієї властивості, називається неординарним.
- Приклад ординарного потоку – потік викликів, що надходить на АТС від великої групи абонентів, а прикладами неординарних потоків є потоки телеграм у кілька адрес.
- 4. Потік викликів називається потоком без післядії, якщо для будь-якого n сумісна ймовірність надходження k_i , $i = 1, 2, \dots, n$ викликів за відповідні інтервали $[t, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$P\{K(t, t_i) = k_i, i = \overline{1, n}\} \quad (5)$$

не залежить від процесу надходження викликів до початкового моменту часу t .

- Іншими словами, відсутність післядії потоку означає незалежність плин у випадкового потоку викликів після деякого моменту часу від його плин до цього моменту.
- Прикладом потоку без післядії може служити потік телефонних викликів, що надходять від великої групи джерел. Це пов'язано з тим, що лише невелика частина (10-20%) абонентської групи водночас бере участь у з'єднаннях.
- Потоки, які не мають властивості відсутності післядії, називаються потоками з післядією.
- Потоки викликів від спарених телефонних апаратів і потоки викликів від малих абонентських груп є прикладами потоків з післядією.

Основні класи потоків

Найпростіші потоки

- **Найпростішим потоком називається стаціонарний ординарний потік без післядії.** Цей потік є основною моделлю в теорії телетрафіку.
- Для найпростішого потоку справедлива теорема.
- *Теорема 1.* Надходження k викликів за інтервал часу тривалістю t у найпростішому потоці підпорядковується розподілу Пуассона з імовірностями

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де $p_k(t)$ – імовірність того, що за інтервал часу довжиною t надійде k викликів; $\lambda > 0$ – параметр найпростішого потоку.

- У відповідності з зазначеною властивістю найпростіший потік називають також пуассонівським. На рис. 5 наведений приклад розподілу числа викликів за законом Пуассона.

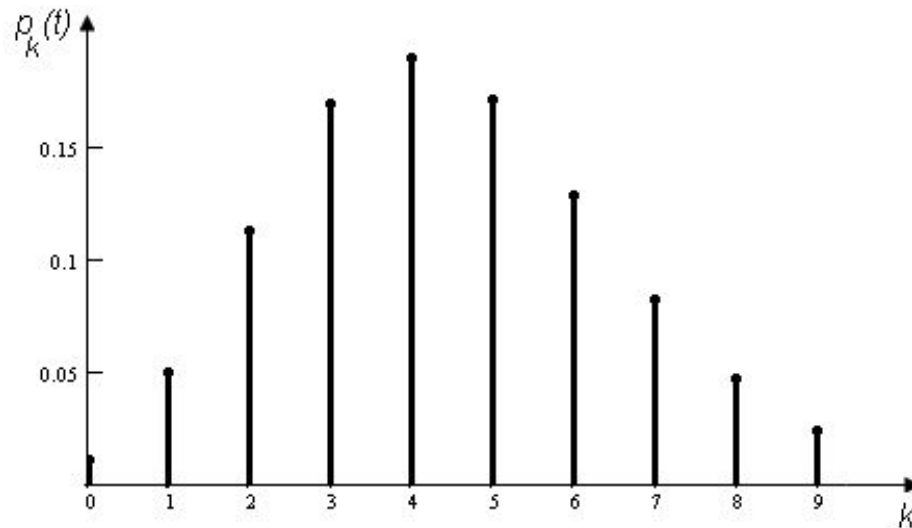


Рисунок 5 – Розподіл числа викликів за законом Пуассона для $\lambda t = 4,5$

Введемо позначення $K = K(0, t)$ для числа викликів за інтервал часу $[0, t)$.

- Тоді із властивостей розподілу Пуассона випливають такі наслідки.
- 1. $M[K] = D[K] = \lambda t$
- 2. Імовірності $p_k(t)$ пов'язані між собою рекурентним співвідношенням

$$p_k(t) = \frac{\lambda t}{k} \cdot p_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

де $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

3. Послідовність імовірностей $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ з розподілу Пуассона при $\lambda \cdot t < 1$ монотонно спадає зі зростанням k .

Якщо $\lambda \cdot t > 1$, то зі зростанням k імовірності $p_k(t)$ спочатку монотонно зростають до досягнення моди або двох модальних значень, а потім монотонно спадають.

- Якщо $\lambda \cdot t$ дрібне число, то мода $m = [\lambda \cdot t]$, де $[x]$ – ціла частина числа x , якщо ж $\lambda \cdot t$ ціле, то розподіл має дві моди: $m_1 = \lambda \cdot t - 1$; $m_2 = \lambda \cdot t$.

4. Зі зростанням добутку $\lambda \cdot t$ обвідна значень $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ наближається до нормального розподілу. Вже при $\lambda \cdot t = 10$ має місце добра апроксимація такої обвідної нормальним розподілом:

$$p_k(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda \cdot t}} \cdot e^{-\frac{(k-\lambda t)^2}{2\lambda t}} \quad (8)$$

- *Теорема 2.* У найпростішому потоці інтервали часу між сусідніми викликами є статистично незалежними випадковими величинами з експоненціальним законом розподілу. Їхня функція розподілу

$$F(\Delta t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \Delta t}, & \Delta t > 0 \\ 0, & \Delta t \leq 0 \end{cases} . \quad (9)$$

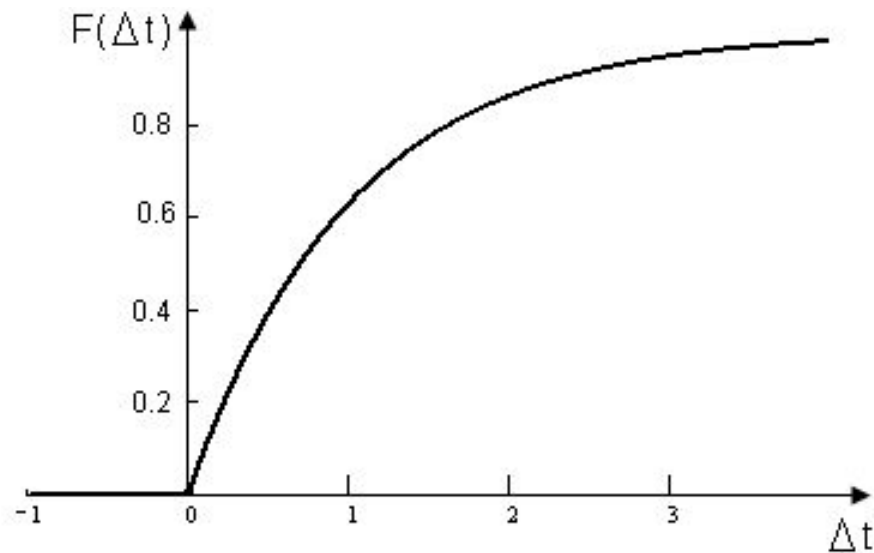


Рисунок 6 – Функція розподілу інтервалів часу між викликами при $\lambda = 1$

- Щільність імовірності експоненціального розподілу описується виразом

$$p(\Delta t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \Delta t} , \quad \Delta t \geq 0 , \quad (10)$$

а математичне очікування й дисперсія відповідно дорівнюють

$$M[\Delta T] = \frac{1}{\lambda} , \quad D[\Delta T] = \frac{1}{\lambda^2} . \quad (11)$$

Можна показати, що розподіл інтервалів часу між викликами за експоненціальним законом є не тільки необхідною, але й достатньою умовою для того, щоб потік був найпростішим.

Експоненціальний закон має таку важливу властивість: якщо проміжок часу, розподілений за експоненціальним законом, тривав певний час, то це жодним чином не впливає на закон розподілу тієї частини, що залишилася від усього проміжку.

Нестаціонарний пуассонівський потік викликів

- Нестаціонарним пуассонівським потоком (або найпростішим потоком із змінним параметром) називається ординарний потік без післядії, у якого параметр $\lambda(t)$ залежить від часу t .

Для цього потоку ймовірність надходження k заявок на інтервалі часу $[0, t)$ визначається формулою

$$p_k(t) = \frac{[\int_0^t \lambda(t') dt']^k}{k!} \cdot \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t') dt'\right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Потоки з обмеженою післядією

- **Потоком з обмеженою післядією називається потік, у якого послідовність інтервалів часу між сусідніми викликами**

$$\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_n, \dots$$

являє собою послідовність незалежних випадкових величин. Такий потік викликів описується послідовністю функцій розподілу інтервалів між викликами.

Окремими випадками потоку з обмеженою післядією є:

- **рекурентний потік**, що характеризується однаково розподіленими інтервалами між викликами

$$F_k(\Delta t) = P\{\Delta T_k < \Delta t\} ; \quad (13)$$

- **рекурентний потік із запізнюванням**, для якого

$$F_2(\Delta t) = F_3(\Delta t) = \dots = F(\Delta t) ; \quad F_1(\Delta t) \neq F(\Delta t) . \quad (14)$$

Потоки з обмеженою післядією

- У теорії надійності рекурентний потік називається процесом відновлення, а рекурентний потік із запізнюванням – загальним процесом відновлення.

Потоки Пальма

- **Стационарний ординарний рекурентний потік із запізнюванням називається потоком Пальма.**
- Потоки Пальма описують виклики, загублені в СРІ.
- Найпростіший потік є особливим випадком потоку Пальма, у якого всі проміжки часу між викликами, в тому числі і перший, мають експоненціальний розподіл.
- **Існує теорема Пальма**, яка стверджує, що якщо на СРІ із втратами та експоненціальним законом розподілу тривалості обслуговування викликів надходять виклики, що утворять потік Пальма, то потік не обслужених викликів є потоком Пальма. Зокрема, якщо вихідний потік найпростіший, то потік загублених викликів буде потоком Пальма.

Потоки Пальма

- У теорії випадкових потоків показується, що для потоку Пальма випадкові величини ΔT_1 мають неперервний розподіл із щільністю ймовірності

$$p_1(\Delta t) = \frac{1 - F(\Delta t)}{\overline{\Delta T}}, \quad (15)$$

де

$$\overline{\Delta T} = M[\Delta T_k], \quad k \neq 1. \quad (16)$$

Для потоків Пальма

$$\chi = \lambda = \frac{1}{\overline{\Delta T}}. \quad (17)$$

Потік Ерланга

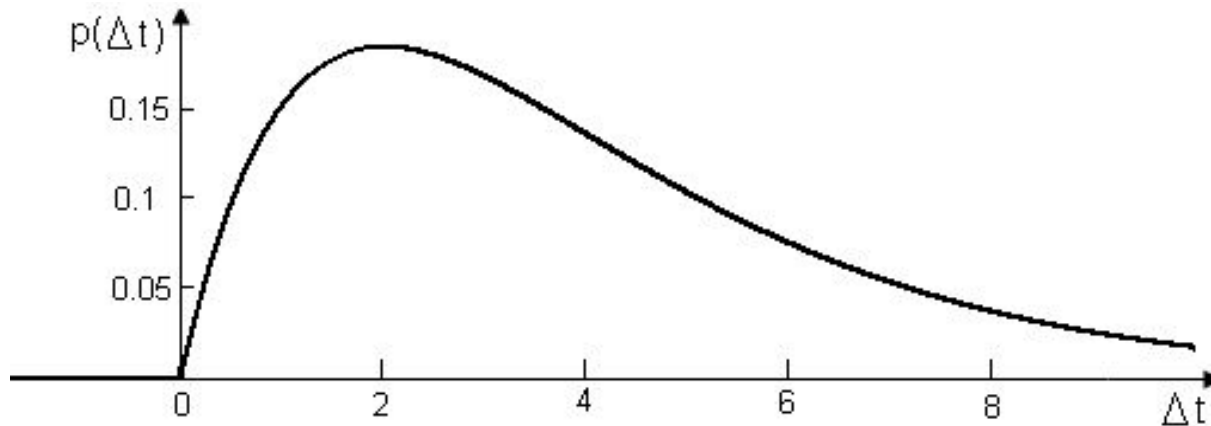
- Поток Ерланга m -го порядку називається потік Пальма, в якому інтервали між сусідніми викликами – статистично незалежні випадкові величини, розподілені за законом Ерланга m -го порядку, тобто мають неперервний розподіл із щільністю ймовірності

$$p(\Delta t) = \begin{cases} \frac{\lambda^{m+1} \Delta t^m}{m!} e^{-\lambda \cdot \Delta t}, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}, \quad (18)$$

де λ – параметр розподілу Ерланга.

Потік Ерланга відноситься до класу потоків з обмеженою післядією, для яких інтервали часу між сусідніми викликами є статично незалежними випадковими величинами з довільними й у загальному випадку різними законами розподілу.

Потік Ерланга



- Рисунок 7 – Щільність імовірності розподілу Ерланга першого порядку з параметром $\lambda=0,5$
- Потік Ерланга m -го порядку може бути отриманий з найпростішого потоку з параметром λ за допомогою операції регулярного просівання. Суть цієї операції полягає в тому, що у найпростішому потоці зберігається кожна $(m+1)$ -а заявка, а всі інші відсіваються.

Потік Ерланга

- При $m=0$ розподіл Ерланга збігається з експоненціальним розподілом.
- При $m \geq 0$ розподіл Ерланга має єдиний максимум у точці $\Delta t = m/\lambda$, тому що

$$\frac{d \ln p(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(m \ln z - \lambda z) = \frac{m}{z} - \lambda = 0 \quad . \quad (19)$$

Математичне очікування й дисперсія інтервалу часу між сусідніми викликами в потоці Ерланга m -го порядку дорівнюють

$$M[\Delta T] = \frac{m+1}{\lambda} \quad , \quad D[\Delta T] = \frac{m+1}{\lambda^2} \quad , \quad (20)$$

де λ – параметр розподілу.

Потік Ерланга

- Потоки Ерланга при різному порядку створюють потоки з різним ступенем випадковості: від найпростішого при $m=0$ до детермінованого при $m=\infty$.
- Модель потоку Ерланга застосовують для опису процесів у системах розподілу інформації, коли найпростіший потік викликів розділяється на $m+1$ напрямків згідно з операцією регулярного просіювання.