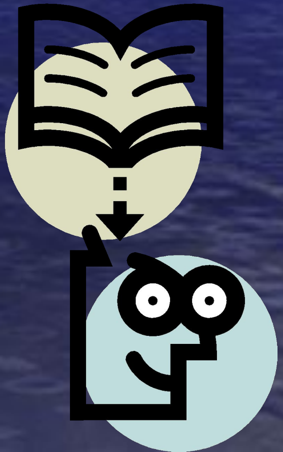
Тема: Война с ОДЗ

Выполнила: ученица 11 класса
Исаклинского лицея
(экономического)
Денисова Мария
Руководитель: учитель математики
Нилова Татьяна Степановна

Проблема

Уравнения и неравенства, в которых нужно находить ОДЗ, не нашли места в курсе алгебры систематического изложения, возможно поэтому я и мои сверстники часто делаем ошибки при решении таких примеров, уделив много времени их решению, забыв при этом об ОДЗ.



Цель

Уметь анализировать ситуацию и делать логически корректные выводы в примерах, где нужно учесть ОДЗ

Задачи

1. Изучить теоретический материал
2. Прорешать множество уравнений, неравенств:
   а) дробно-рациональных;
   б) иррациональных;
   в) логарифмических;
   г) содержащих обратные тригонометрические функции
3. Применить изученные материалы в ситуации, которая отличается от стандартной
4. Создать работу по теме «Война с ОДЗ»

Этапы работы

Работу над проектом я начала с повторения известных мне функций. Область определения многих из них имеет ограничения.

ОДЗ встречается:

1. При решении дробно-рациональных уравнений и неравенств
2. При решении иррациональных уравнений и неравенств
3. При решении логарифмических уравнений и неравенств
4. При решении уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции

Прорешав множество примеров из различных источников (пособий по ЕГЭ, учебников, справочников) я систематизировала решение примеров по следующим принципам:

- можно решить пример и учесть ОДЗ (самый распространённый способ)
- можно решить пример, не учитывая ОДЗ
- можно только учитывая ОДЗ придти к правильному решению
- иногда при решении примера ОДЗ приводит к посторонним корням

Изучила анализ результатов ЕГЭ за 2006 год. Много ошибок было допущено в примерах, в которых нужно учитывать ОДЗ. Это ещё раз подчёркивает **актуальность** моей темы.

Содержание

I Способы решения уравнений и неравенств с ОДЗ

1. При решении дробно-рациональных уравнений и неравенств учитывается неравенство знаменателя нулю.

2.1. Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

2.2. Иррациональные неравенства

$$a)\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$б)\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$в)\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

3.1. Логарифмические уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

3.2. Логарифмические неравенства

$$\log_{f(x)} g(x) \le \log_{f(x)} h(x)$$

$$1)\begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) \le f(x) \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < f(x) \le g(x) \end{cases}$$

4. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

$$\begin{matrix} \arcsin(f(x)) = \arcsin(g(x)) \\ \arccos(f(x)) = \arccos(g(x)) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ |f(x)| \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} arctg(f(x)) = arctg(g(x)) \\ arcctg(f(x)) = arcctg(g(x)) \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

III Необязательность ОДЗ

На уроках математики от нас требуют нахождения ОДЗ в каждом примере. В то же время по математической сути дела нахождение ОДЗ вовсе не является обязательным, часто не нужно, а иногда и невозможно - и все это без какого бы то ни было ущерба для решения примера.

Рассмотрим, к примеру, такое неравенство:

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Здесь ищется ОДЗ, и неравенство решается. Однако при решении этого неравенства вполне можно обойтись без поиска ОДЗ, точнее, можно обойтись и без условия $2 - x \geq 0.$

В самом деле, неравенство, полученное после возведения обеих частей в квадрат: $2-x > x-1+2\cdot\sqrt{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$ «сильнее», чем $2 - x \geq 0$

и в приведенном решении необходимо только неравенство $x - 1 \geq 0$

IV Опасность ОДЗ

Известно также, что в результате некоторых преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, мы можем прийти к *неверным решениям*. Вот примеры решений уравнений:

1) $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$. Перенесесем $\frac{1}{x}$

из правой части в левую, приведем подобные члены уравнения и получим, что x=0. Однако 0 не входит в ОДЗ.

2) $\sqrt{x^2-1}=0$. Преобразуем левую часть, используя формулу разности квадратов, и придем к уравнению $\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}=0$. Отсюда x = 1 или x = -1. При x = -1, $\sqrt{x-1}$ не существует. Однако ответ: x=1 неполный, а потому неверен.

3) $(x+1)\sqrt{x}=0$. Возведем обе части уравнения в квадрат - в данном случае вроде бы безобидное действие, основанное на очевидном соображении: число равно нулю тогда и только тогда, когда его квадрат равен нулю. Получим $(x+1)^2\cdot x=0$. Однако полученное уравнение имеет корень -1, которого нет у исходного уравнения.

V ОДЗ – есть решение

И наконец, в массе примеров нахождение ОДЗ позволяет получить ответ *без громоздких выкладок,* а то и вовсе устно.

1. ОДЗ представляет собой пустое множество, а значит, исходный пример не имеет решений.

1) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}$. 3) $\sqrt{\lg_2 x}=\lg_x(1-x)$.

2) $\lg\frac{1}{x}=\lg(-x)$.

2. В ОДЗ находится одно или несколько чисел, и несложная подстановка быстро определяет корни.

$\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}$. В ОДЗ находятся два числа: 2 и 3, и оба подходят.

$\sqrt{1-\sqrt{1-x}}>\sqrt{x^2-x}$. **В ОДЗ находятся два числа 0 и 1, и подходит только 1**.

$\sqrt{a-|x|}+\sqrt{x-a}=-a$. Из ОДЗ следует, что $a\geq|x|$ откуда имеем $a\geq 0$

Из рассмотрения правой части уравнения видим, что $a\leq 0$ Поэтому необходимо равенство a=0, после чего решение ясно.

3) $2arcctg(x+1)+1=0$. Решение. Число -0,5 не входит в промежуток $(0;\pi)$ область допустимых значений арккотангенса, поэтому данное уравнение не имеет решения.

А теперь я приведу пример, попавшийся нам на уроке алгебры, решить его было нам не под силу, но найдя ОДЗ всё стало ясно.

Найдите целочисленный корень уравнения

$$\frac{\log_2(7+6x-x^2)-\log_2(x-2)}{10x-24-x^2}=2$$

Найдём ОДЗ:
$$\begin{cases} 7+6x-x^2>0 \\ x-2>0 \\ 10x-24-x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+1)<0 \\ x>2 \\ (6-x)(4-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;7) \\ x>2 \\ x_{1,2}\neq 4;6 \end{cases}$$

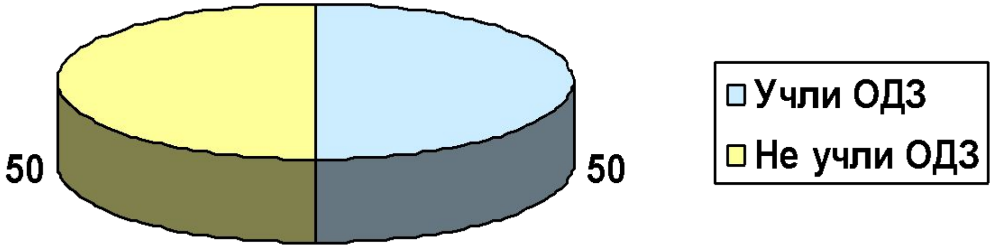
$$x\in(2;4)\cup(4;6)\cup(6;7);$$

Целочисленное решение возможно лишь при x=3 и x=5. Проверкой находим, что корень x=3 не подходит, а значит ответ: x=5.

VIII ЕГЭ и ОДЗ

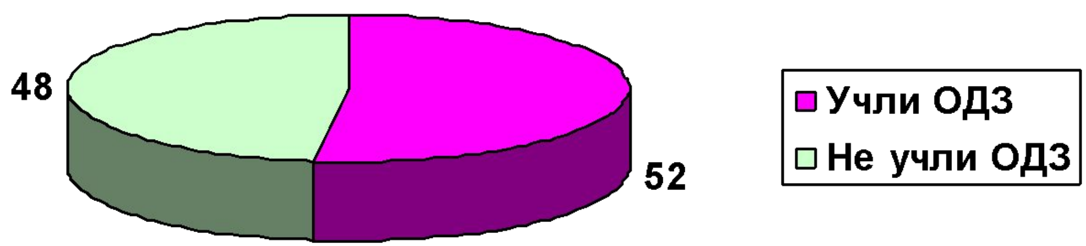
Ежегодно выпускники при сдаче ЕГЭ допускают ошибки из-за того, что не нашли ОДЗ. Приведу несколько примеров.

1) Низкий результат показали выпускники при решении логарифмических неравенств и иррациональных уравнений. Так с решением простейшего логарифмического неравенства (например, $\log_3(x + 6) < 2$) справилась только половина выпускников. Можно предположить, что сдающие здесь не учитывали область определения логарифмической функции.



VIII ЕГЭ и ОДЗ

2) Умение применять стандартные методы для решения иррациональных уравнений (например, $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$) продемонстрировали 52% выпускников. Одной из причин таких низких показателей является тот факт, что многие выпускники не произвели отбор корней, полученных из уравнения после его возведения в квадрат.



Рассмотрим, например, решение одной из задач С1: "Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \frac{\lg(23 - 10x)}{36 - 20x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{1}{36 - 20x}$

Задание сводится к решению дробного неравенства, содержащего логарифмическое выражение. Приемы решения таких неравенств нам известны. Самым распространенным из них является метод интервалов. Однако при его применении сдающие допускают разнообразные ошибки. Рассмотрим наиболее распространенные ошибки на примере неравенства:

$$\frac{\lg(23-10x)}{36-20x} > \frac{1}{36-20x}$$

1. Выпускники правильно находят ОДЗ, решая систему неравенств: $\begin{cases} 23-10x > 0, \\ 36-20x \neq 0, \end{cases}$

откуда $x \in (-\infty; 1,8) \cup (1,8; 2,3)$

Далее, умножая обе части неравенства на общий знаменатель, получают неравенство: lg(23 - 10*x*) > 1, откуда следует $x \in (-\infty; 1,3)$

Здесь допущена грубая ошибка, так как не рассмотрен случай 36 - 20*x* < 0.

2. Сдающие приходят к неравенству $\frac{\lg(23-10x)-1}{36-20x}>0$ правильно находят "нули" числителя и знаменателя (1,3 и 1,8) и решают неравенство методом интервалов. Полученный ответ $(-\infty;\quad 1{,}3)\cup(1{,}8;\quad +\infty)$ неверен, так как не учтена ОДЗ неравенства.

Другое задание С2 содержало иррациональное уравнение. Наиболее характерные ошибки и недочеты, допущенные при решении уравнения

$$\sqrt{x^2-20x+100}+\sqrt{3x^2-28x-31}=10-x.$$

1. Неверное возведение в квадрат обеих частей, в результате чего получается уравнение:

x^2 - 20x + 100 + 3x^2 - 28x – 31 = (10 - x)^2.

Корни этого уравнения 10 и –1. Некоторые учащиеся в результате проверки корней получают верный ответ (-1) при грубейшей ошибке в ходе решения.

2. Сдающие верно преобразуют к виду $\sqrt{(x-10)^2}+\sqrt{3x^2-28x-31}=10-x$

После этого некоторые ребята допускают грубую ошибку $\sqrt{(x-10)^2}=x-10$

Далее они получают x – 10 + $\sqrt{3x^2-28x-31}=10-x$ $\quad\sqrt{3x^2-28x-31}=20-2x$

Решая это уравнение и учитывая условие $20-2x\geq 0$

выпускники делают вывод – уравнение не имеет решений.

Заключение

Подводя некоторый итог, можно сказать, что универсального метода решения уравнения и неравенств нет. Каждый раз, если хочешь понять, что делаешь, а не действовать механически, возникает дилемма: а какой способ решения выбрать, в частности искать ОДЗ или не надо? Я думаю, что полученные мною знания и навыки помогут мне решить эту дилемму. Я перестану делать ошибки, научившись правильно использовать ОДЗ. Получится ли у меня это, покажет время, точнее ЕГЭ.