Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные;

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных,

где i - номер уравнения,

j - номер неизвестного;

b_i - свободные члены (правые части).

- Система наз. неоднородной, если не все b_i равны нулю.

Система наз. однородной, если все b_i равны нулю.

- Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной.**

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной.**

Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной (совместной и неопределенной).**

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных , то система называется **квадратной.**

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными или равносильными**.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**.

Метод Гаусса

Рассмотрим квадратную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \bigg| & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & \bigg| & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & \bigg| & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & \bigg| & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\
4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\
3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\
5 & -1 & 2 & 1 & 2
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
(-4)\ (-3)\ (-5) \\
+ \\
+ \\
+
\end{array}
\end{array}
\sim
$$

$$\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11\\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45\\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30\\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ 2 \\ + \quad (-2) \quad + \\ (-5)\end{array}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-39) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -205 & -410 \end{array}\right)$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45; \\ x_3 + 6x_4 = 15; \\ -205x_4 = -410. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 11 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 11 + 1 - 3\cdot 3 - 2\cdot 2 = \\ \quad = 11 + 1 - 9 - 4 = -1; \\ 10x_2 = -45 + 13x_3 + 8x_4 = -45 + 13\cdot 3 + 8\cdot 2 = \\ \qquad = -45 + 39 + 16 = 10; \qquad x_2 = 1; \\ x_3 = 15 - 6x_4 = 15 - 6\cdot 2 = 15 - 12 = 3; \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4 \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2 \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-3) \quad (-2) \\ \quad + \qquad\quad + \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Рассмотрим минор

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

назовем его базисным. Тогда

x_1, x_3 – базисные переменные.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\quad -6x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{5x_4 - 1}{-6};$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6};$$

$$-2x_1 = 2 - 3x_2 - 5x_3 - 4x_4;$$

$$x_1 = \frac{2 - 3x_2 - 5x_3 - 4x_4}{-2};$$

$$x_1 = -1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 2x_4 =$$

$$= -1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}\left(-\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6}\right) + 2x_4 =$$

$$= -1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{25}{12}x_4 + \frac{5}{12} + 2x_4 = -\frac{7}{12} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{12}x_4;$$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{12}x_4 - \frac{7}{12};$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6};$$

$$x_1 = \frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{12}C_4 - \frac{7}{12};$$

$$x_2 = C_2;$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}C_4 + \frac{1}{6};$$

$$x_4 = C_4.$$

Метод Жордана-Гаусса

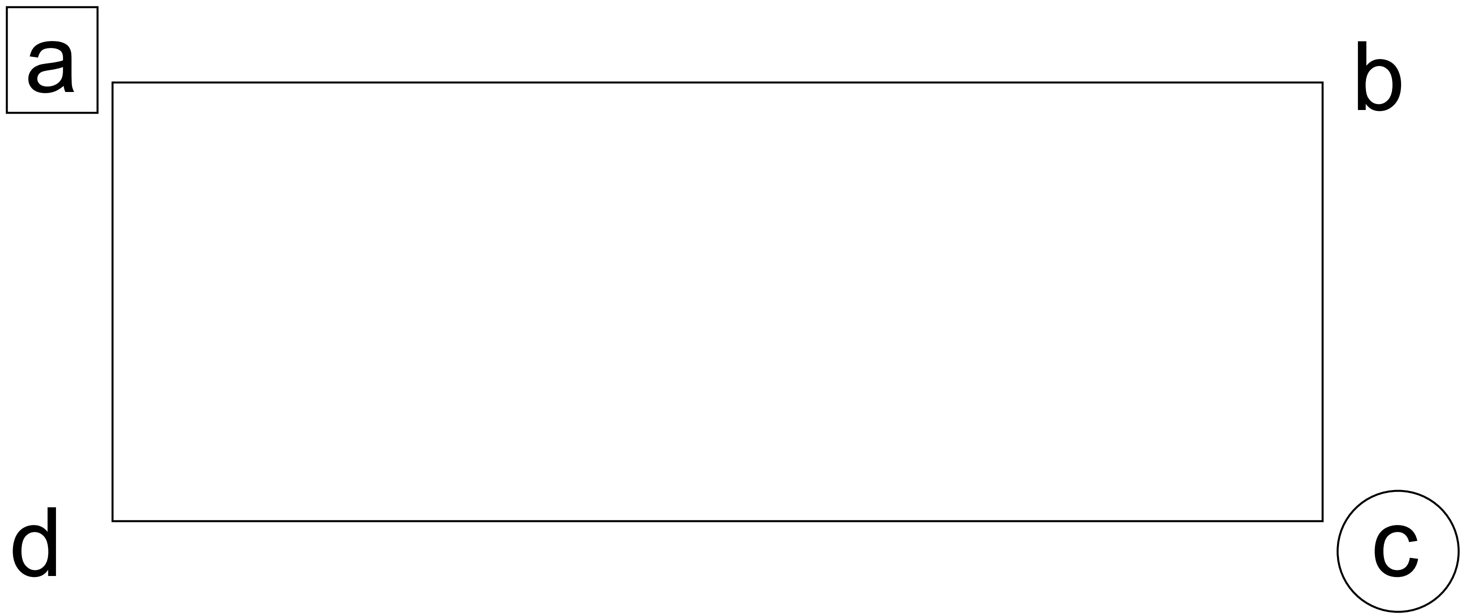
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n' \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$


a
b
d
c

$$c' = \frac{a \cdot c - b \cdot d}{a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

разрешающая строка

разрешающий столбец

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & \dots. & \dots. & \dots. \\ 0 & \dots. & \dots. & \dots. \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 14 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots. \\ 0 & 1 & 0 & \ldots. \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \dfrac{1}{-2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{2} & -2 & -1 \\ -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{-6} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{5}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\dfrac{3}{2} & 0 & \dfrac{1}{12} & -\dfrac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{12}x_4 = -\dfrac{7}{12} \\ \qquad\qquad x_3 + \dfrac{5}{6}x_4 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{12}x_4 - \frac{7}{12};$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6}.$$

$$x_1 = \frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{12}C_4 - \frac{7}{12};$$

$$x_2 = C_2;$$

$$x_3 = -\frac{5}{6}C_4 + \frac{1}{6};$$

$$x_4 = C_4.$$

Матричный метод

- С помощью этого метода можно решать квадратные системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Систему можно записать в виде

$$A \cdot X = B \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Если матрица A невырожденная, то

можно выполнить преобразования

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 5x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 30 - 5 - 6 + 8 = 25$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 15) = 19$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+2) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2+5 = 3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2-10) = 8$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 2) = -5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 19 & 3 & -5 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 19 & 3 & -5 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -4 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \\ 19 \cdot 2 + 3 \cdot 9 + (-5) \cdot 3 \\ 9 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + (-5) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -8+18+15 \\ 38+27-15 \\ 18+72-15 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Метод Крамера

- Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система является определенной и её единственное решение находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь Δ_i – определитель, получающийся из определителя Δ заменой *i*-го столбца столбцом свободных членов.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_2 + \ldots + A_{n1}\cdot b_n}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_2 + \ldots + A_{n1}\cdot b_n$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$
\begin{cases}
x + 2y - z = 2 \\
2x - y + 3z = 9 \\
5x + 2y - 2z = 3
\end{cases}
$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 4 + 30 - 5 - 6 + 8 = 25$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 + 18 - 18 - 3 - 12 + 36 = 25$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -18 + 30 - 6 + 45 - 9 + 8 = 50$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 8 + 90 + 10 - 12 - 18 = 75$$

$$x = \frac{25}{25} = 1;$$

$$y = \frac{50}{25} = 2;$$

$$z = \frac{75}{25} = 3.$$

- Если $\Delta = 0$ и по крайне мере один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения.

- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0$, система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- Система не имеет решения, т.к. первое и третье уравнения противоречивы

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 6 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

- Второе уравнение получается умножением первого на два. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Система имеет бесчисленное множество решений.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

$$y = 3x + 2z + 1$$

$$2x + 3(3x + 2z + 1) - z = 3$$

$$2x + 9x + 6z + 3 - z = 3$$

$$11x + 5z = 0$$

$$x = -\frac{5}{11}z$$

$$y = -\frac{15}{11}z + 2z + 1$$

$$y = 1 + \frac{7}{11}z$$

$$x = -\frac{5}{11} z$$

$$y = 1 + \frac{7}{11} z$$

$$z = z$$

Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы система m неоднородных линейных уравнений с n неизвестными была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$r(A) = r(A^*)$$

- Замечание. Пусть система совместна и

- $k = n$ если число уравнений равно числу неизвестных, причем $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение;

- $k < n$ если число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет множество решение.

$$A^{*}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}(-2)\quad(-5)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(A^*) = 2 < 4$$

$$x_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4;$$

$$x_2 = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4.$$

Однородные системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема о совместности однородной системы

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был меньше числа неизвестных n.