Основы математической обработки информации

Курс лекций для студентов

Егорова И.С., ХГУ им. Н.Ф. Катанова, 2016 г.

Введение

- Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира (Фридрих Энгельс).
- Математика – это скопление абстрактных форм - математических структур: алгебраических, топологических и структур порядка (коллектив французских математиков под общим псевдонимом Николя Бурбаки)

Разделы современной математики

Сегодня в математике обычно выделяют следующие области:

- *математический анализ*
  - *дифференциальные уравнения*
  - *уравнения с частными производными*
  - *функциональный анализ и интегральные уравнения*
  - *теория функций комплексного переменного*
- *аналитическая геометрия*
- *линейная алгебра*
- *математическая логика*
- *теория вероятностей*
- *математическая статистика*
- *теория случайных процессов*
- *вариационное исчисление и методы оптимизации*
- *уравнения и методы математической физики*
- *вычислительная математика*
- *криптография*
- *теория кодирования и теория искусственного интеллекта*
- *компьютерная геометрия*
- *топология*
- *и др.*

Аксиоматический подход в математике

- В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод. В основу научной теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом. Основными методами в математических исследованиях являются математические доказательства - строгие логические рассуждения.

- перечисление основных понятий;
- изложение определений;
- изложение аксиом;
- изложение теорем;
- доказательство этих теорем.

Аксиома – утверждение, принимаемое без доказательств.

Теорема – утверждение, вытекающее из аксиом.

Доказательство – составная часть дедуктивной системы, это есть рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения вытекает логически из истинности предыдущих теорем или аксиом.

Математика на стыке наук

- математическая физика,
- математическая логика,
- математическая лингвистика,
- математическая экономика,
- математическая история
- и др.

Математика в естествознании

Направления в изучении объектов окружающего мира (направления познания):

- Экспериментальное
- Теоретическое
- Вычислительное

Экспериментальное направление

- Наблюдение
- Эксперимент

→ Экспериментальные данные

- Математическая обработка результатов эксперимента (экспериментальных данных)
  - определение истинных значений измеряемых величин
  - определение вида функциональной зависимости исследуемых величин – построение *эмпирических зависимостей*
  - определение количественных характеристик (параметров) функциональных зависимостей
  - и т.д.

Теоретическое направление

- Выдвижение гипотезы и построение математической модели (в виде уравнений или неравенств)
- Исследование математической модели (решение математической задачи)
- Экспериментальная проверка (если возможно)
- Модификация модели

Основа теоретического подхода –

математическое моделирование

Вычислительное направление

- Выбор или построение математической модели
- Разработка численного алгоритма решения математической задачи
- Составление компьютерной программы
- Проведение вычислений с помощью компьютера
- Анализ результатов и их экспериментальная проверка (если возможно)

Модель + Алгоритм + Программа – основа вычислительного эксперимента

Математическое моделирование

- **Модель** – это такой материальный или мысленно представленный объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект – оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.
- **Математическая модель** — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики.
  - Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений.

Основные этапы математического моделирования

- **Построение модели**. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.
- **Решение математической задачи, к которой приводит модель**. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время. В некоторых случаях для решения математической задачи используют аналитические методы.
- **Интерпретация полученных следствий из математической модели.** Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.
- **Проверка адекватности модели.** На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.
- **Модификация модели.** На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Математический язык

- Математика: мышление, чувствование и язык.
- Язык – это система условных знаков, принятых в некотором сообществе и обеспечивающая коммуникацию его членов.
- Язык математики как и любой другой язык состоит из совокупности высказываний (предложений). Математические высказывания это математические символы, объединенные формулой.

Математика – язык символов и формул.

Математический язык (продолжение)

- Язык в широком смысле – это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке.
- В математическом языке:
  - словарь и грамматика – *математическая операционная система*
  - рассказы, повести и прочее – *математические модели*

Элементы теории множеств

- Множество – первичное понятие современной математики, это понятие не определяется через другие понятия а только поясняется.
- **Множество** –
  - «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью» (Георг Кантор, 1845-1918, немецкий математик, основатель теории множеств);
  - совокупность каких-либо объектов
- Объекты, входящие в множество – ***элементы множества.*** Например: числа, буквы, люди и т.п.

Элементы теории множеств (продолжение)

- Множества, состоящие из конечного числа элементов – *конечные множества*
- Множества, состоящие из бесконечного числа элементов – *бесконечные множества*
- Обозначения:
  - Множества – A, B, X
  - Элементы множества – a, b, x

Элементы теории множеств (продолжение)

- Обозначения:

$x \in X$ Объект *x* есть элемент множества *X*

$x \notin X$ Объект *x* не принадлежит множеству *X*

$A \subset B$ Множество А содержится в множестве В (входит в множество В)

$\varnothing$ Пустое множество

Множества А и В называются ***равными*** (А = В), если они состоят из одинаковых элементов.

Элементы теории множеств (продолжение)

- **Числовые множества**
  - Множество натуральных чисел $N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
  - Множество целых чисел $Z = \{\ldots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
  - Множество рациональных чисел *Q*
  - Множество действительных чисел *R*

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Элементы теории множеств (продолжение)

Упражнения:

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой:
   - A – множество всех квадратов;
   - B – множество всех прямоугольников;
   - C – множество всех четырехугольников с прямыми углами;
   - D – множество всех прямоугольников с равными сторонами;
   - F – множество всех ромбов с прямыми углами

2. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

Алгебраические операции над множествами

- **Объединением множеств A и B** называется новое множество, которое обозначается $A\cup B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B, т.е

$$A\cup B = \{ x\in A \text{ или } x\in B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$

- **Пересечением множеств A и B** называется новое множество, которое обозначается $A\cap B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B, т.е.

$$A\cap B = \{ x\in A \text{ и } x\in B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}=\{2,3\}$

Алгебраические операции над множествами

- **Разностью множеств А и В** называется новое множество, которое обозначается А\В и состоит из всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В, т.е

$$A \setminus B = \{ x \in A \text{ и } x \notin B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\}=\{1\}$

- **Симметрическая разность А∆В** есть множество всех элементов, принадлежащих или А, или В (но не обоим вместе)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Например: $\{1,2,3\} \Delta \{2,3,4\}=\{1,4\}$

Алгебраические операции над множествами

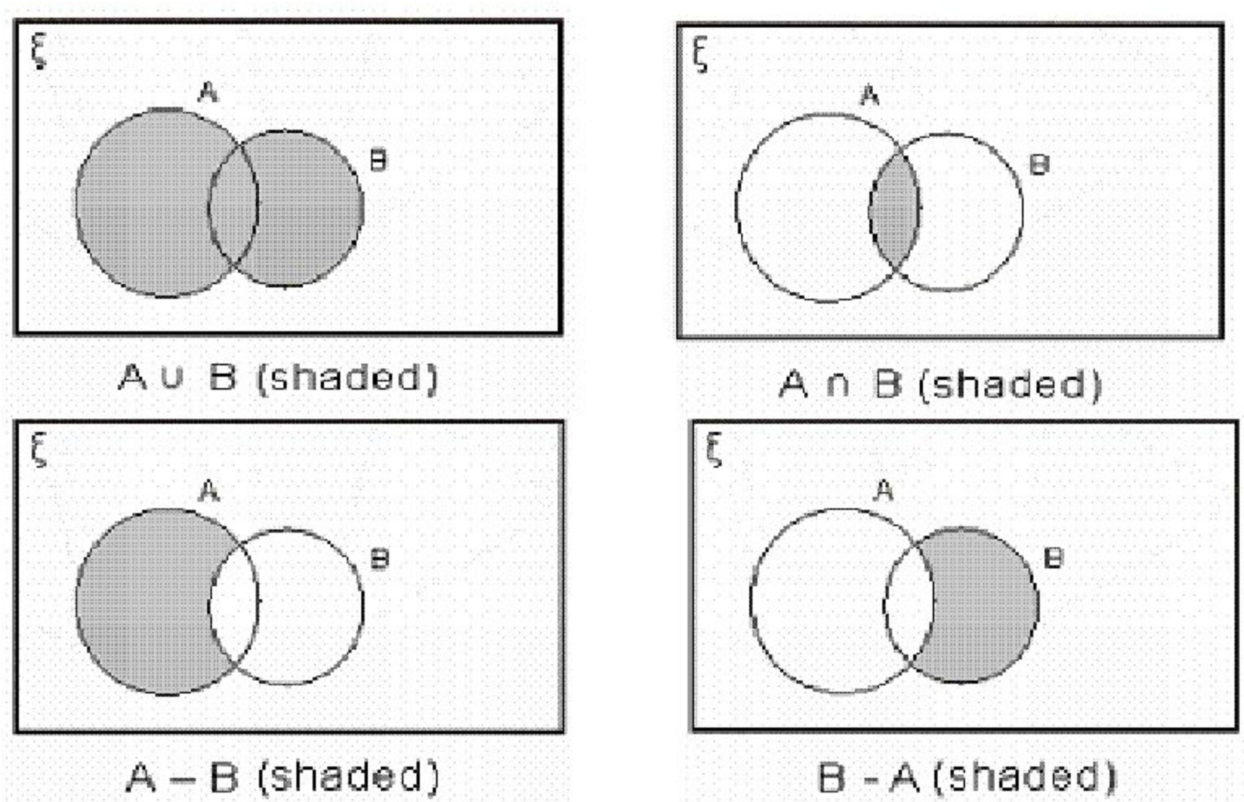
- **Декартовым произведением множеств A и B** называется новое множество, обозначаемое A×B, элементами которого являются всевозможные пары (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, то есть $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

  Например, если A={1, 2, 3}, B={1, 3, 4},

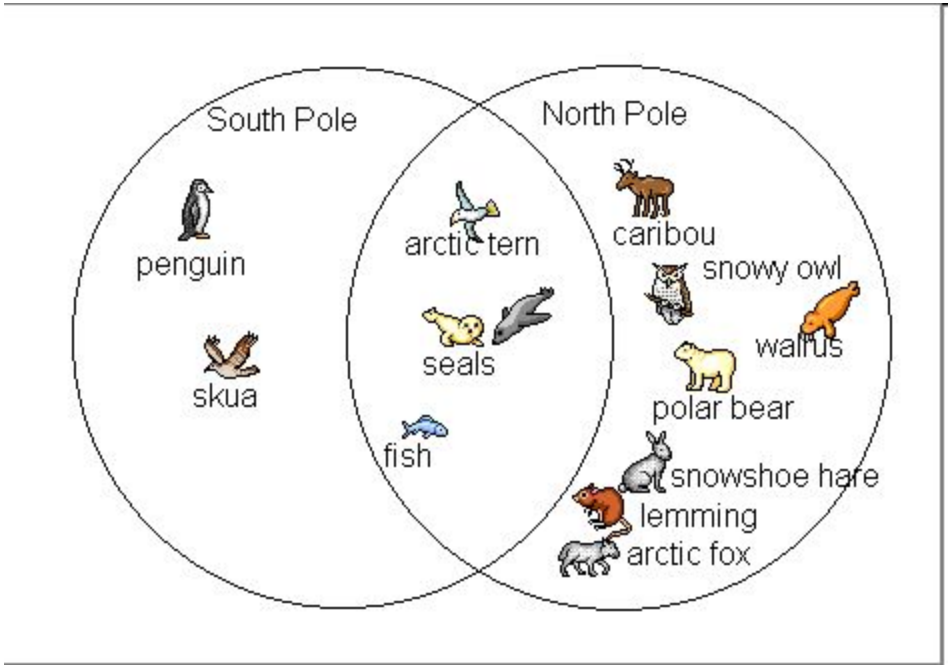
  то A×B={(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4)}.

  Отметим, что с декартовым произведением связано понятие координатной плоскости. Множество координат точек координатной плоскости является декартовым произведением R × R, где R – множество действительных чисел – координаты точек по оси x и оси y, соответственно.

Алгебраические операции над множествами. Круги Эйлера или диаграммы Венна.



Алгебраические операции над множествами. Круги Эйлера или диаграммы Венна.



Алгебраические операции над множествами

Упражнения

1. Выпишите все подмножества множества B = {1, 2, 3}

2. Запишите множество A перечислением его элементов, если
A = {x∈N, 2<x<8}

3. Даны два множества: A = {1, 2 ,3 ,4} и B = {3, 4, 5, 6}. Записать множества, представляющие:
а) объединение A∪B;
б) пересечение A∩B;
в) разность A \ B, B \ A;
г) симметрическую разность AΔB, BΔA;
д) декартово произведение A×B.

4. Определить пересечением или объединением множеств A={5,7,8} и B={1,5,6} является множество C = {1,5,6,7,8}?

5. Проверить выполняется ли переместительный закон умножения для декартова произведения двух множеств, т.е. верно ли, что A×B= B×A? В качестве множеств A и B возьмите множества: A={2}; B={1,3}.

6. Проверьте на примере множеств A={2}; B={1,3} и C={4,5} выполняется ли сочетательный закон для декартова произведения, т.е. верно ли, что (A×B) × C=A×(B×C).

Численность множества

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – конечные множества. Число элементов множества $\boldsymbol{A}$ условимся обозначать символом $\boldsymbol{m(A)}$ и называть ***численностью*** множества $\boldsymbol{A}$.

Число элементов объединения и разности двух конечных множеств:

Определим численность объединения множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются, то $\boldsymbol{m(A \cup B) = m(A) + m(B)}$.

Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пересекаются, то в сумме $\boldsymbol{m(A) + m(B)}$ число элементов пересечения $\boldsymbol{A \cap B}$ содержится дважды: один раз в $\boldsymbol{m(A)}$, а другой – в $\boldsymbol{m(B)}$. Поэтому, чтобы найти численность объединения $\boldsymbol{m(A \cup B)}$, нужно из указанной суммы вычесть $\boldsymbol{m(A \cap B)}$.

Таким образом: $\boldsymbol{m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)}$

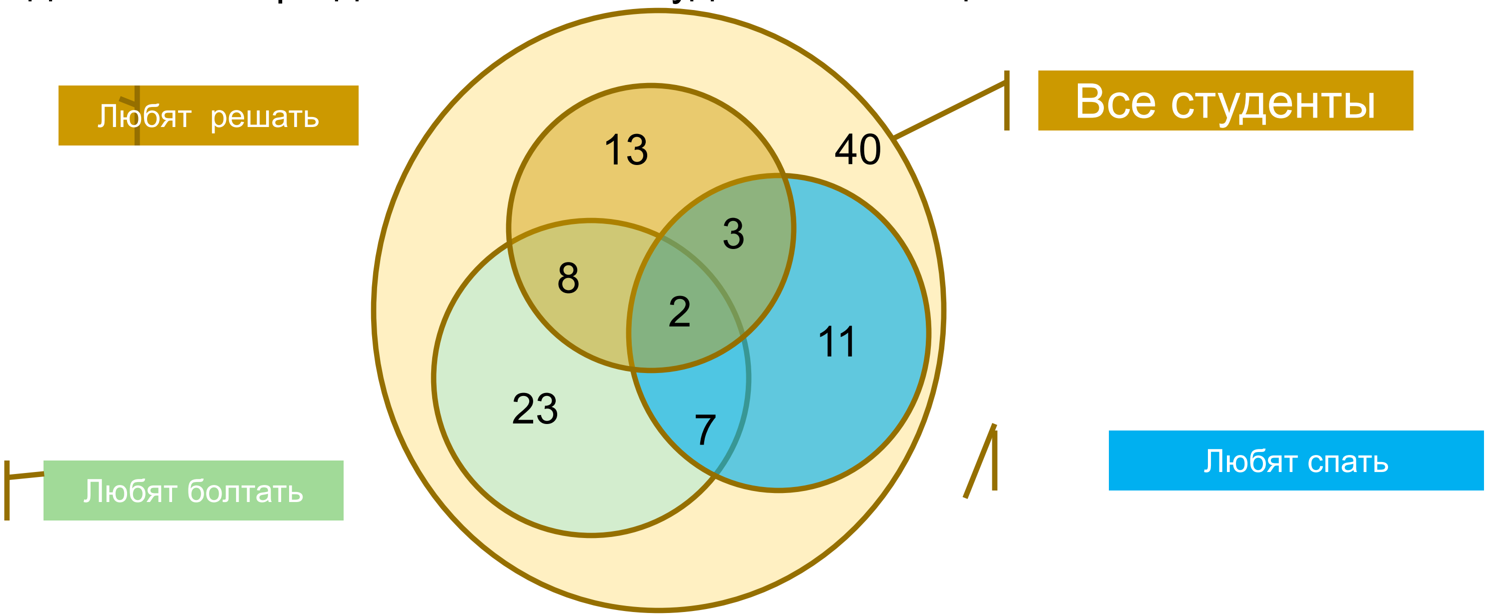
Определим теперь численность разности множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются, то $\boldsymbol{A \setminus B = A}$, и поэтому $\boldsymbol{m(A \setminus B) = m(A)}$.
Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пересекаются, то $\boldsymbol{m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)}$.
Если $\boldsymbol{B \subset A}$, то $\boldsymbol{A \cap B = B}$, и, следовательно, $\boldsymbol{m(A \setminus B) = m(A) - m(B)}$.

Использование теории множеств для решения задач

Задача 1

В группе 40 студентов. Из них 23 любят болтать на занятиях, 13 — решать задачи, 11 любят на занятиях спать. Среди тех, кто болтает на занятиях, постоянно засыпают — 7, а среди тех, кто решает задачи, засыпают только 3. Болтать и решать задачи умеют 8 человек; а 2 человека успевают на одной паре делать все три дела. Сколько студентов вообще ничего не любят?



Использование теории множеств для решения задач

Задача 2

В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение задачи:

Обозначим:

U – универсальное множество, т.е. множество всех туристов,
A – множество туристов, знающих английский язык,
B – множество туристов, знающих французский язык.

Необходимо найти количество туристов, не знающих ни одного языка, т.е. количество элементов множества $\mathbf{D = U \setminus (A \cup B)}$.

Дано (по условию): $m(U) = 100$ (чел.)
$m(A) = 70$ (чел.)
$m(B) = 45$ (чел.)
$m(A \cap B) = 23$ (чел.)

Найти: $m(D) = m(U) – m(A \cup B)$ - ?

Решение: Используя формулу, находим количество туристов, знающих хотя бы один язык:

$\mathbf{m(A \cup B) = m(A) + m(B) – m(A \cap B)} = 70 + 45 - 23 = 92$, $\Rightarrow$
количество туристов, не знающих ни одного языка:
$\mathbf{m(D) = m(U) - m(A \cup B)} = 100 – 92 = 8$ (чел.)

Ответ: 8 чел.

Использование теории множеств для решения задач

Задача 3
20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Сколько обгоревших мальчиков не было покусано комарами? Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели?

Задача 4
Из 40 предложений 30 содержат предлог «в», 27 предлог «на», в пяти предложениях нет ни того, ни другого. Сколько предложений содержат оба предлога?

Элементы дискретной математики

Элементы комбинаторики

- ***Комбинаторика*** – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

- Например: сколько различных четырехзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр?

Элементы комбинаторики

Основные правила комбинаторики

1. **Правило сложения**

Из пункта А в пункт Б можно добраться:

- самолетом (2 авиамаршрута)
- поездом (1 маршрут)
- автобусом (3 маршрута)

Общее число маршрутов 2+1+3=6

Если элемент **A** можно выбрать **n** способами, а элемент **B** можно выбрать **m** способами, то выбрать **A или B** можно **n+m** способами.

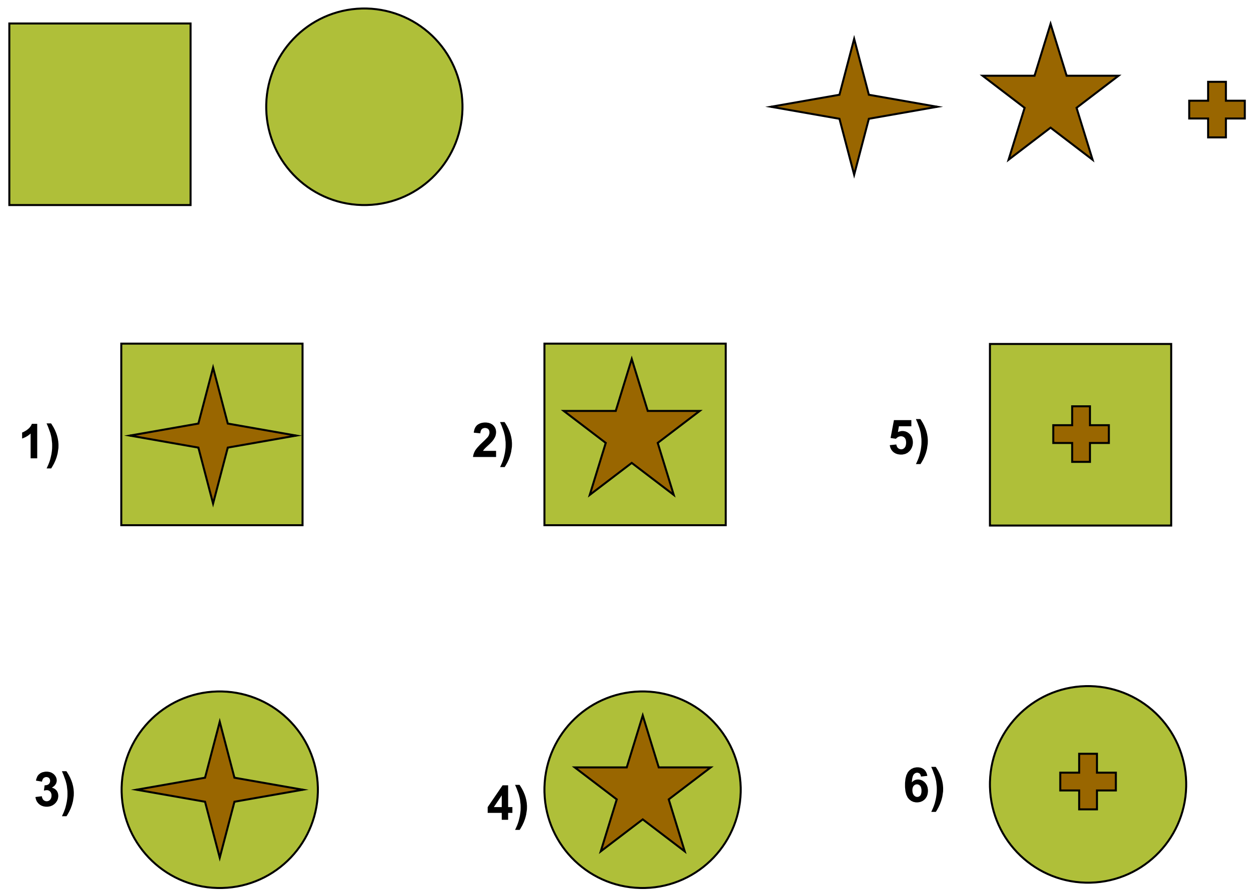
Основные правила комбинаторики

2. **Правило умножения**

   Если элемент A можно выбрать n способами и, при любом выборе A (то есть независимо), элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать n*m способами.

Основные правила комбинаторики

Правило умножения (пример)



2 · 3 = 6 способов

Элементы комбинаторики

- **Размещения**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

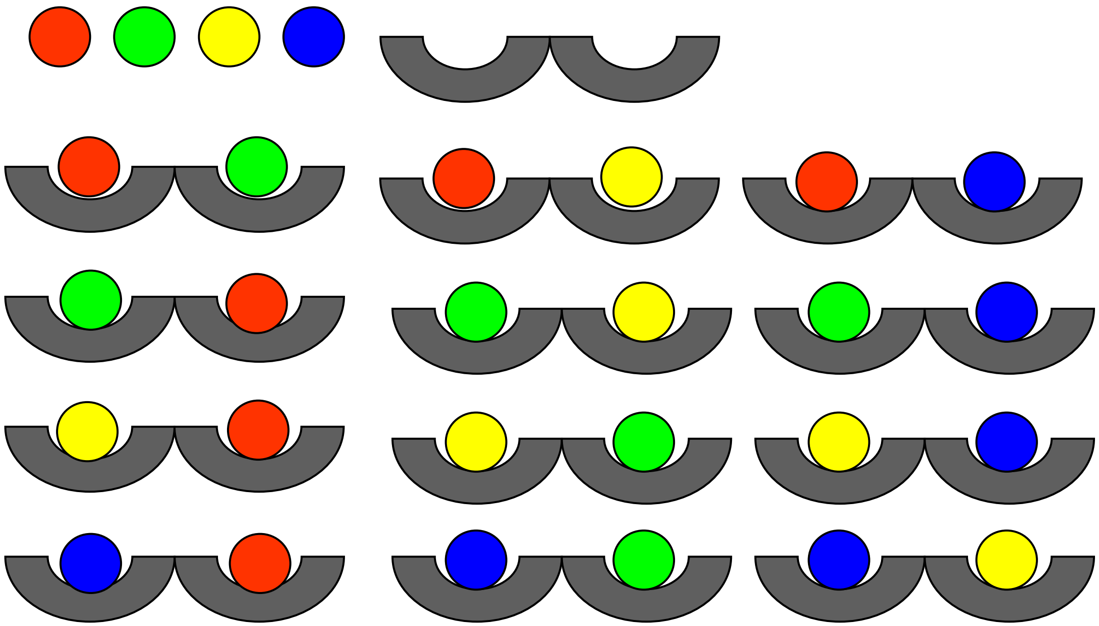
  Размещением из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее ***k*** различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ - \text{факториал числа } n, \quad 0! = 1$$

Основные правила комбинаторики

Число размещений (пример)



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = \frac{24}{2} = 12$$

Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

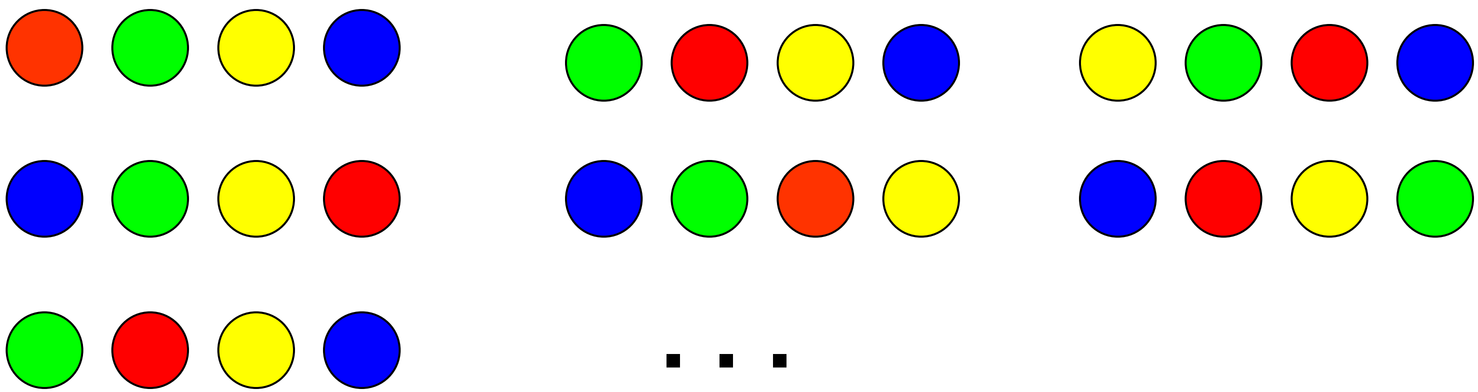
  Перестановкой из ***n*** элементов называется размещение из ***n*** элементов по ***n*** элементов.

  Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е.} \quad P_n = n!$$

Основные правила комбинаторики

Число перестановок (пример)



$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Элементы комбинаторики

- **Сочетания**

  Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

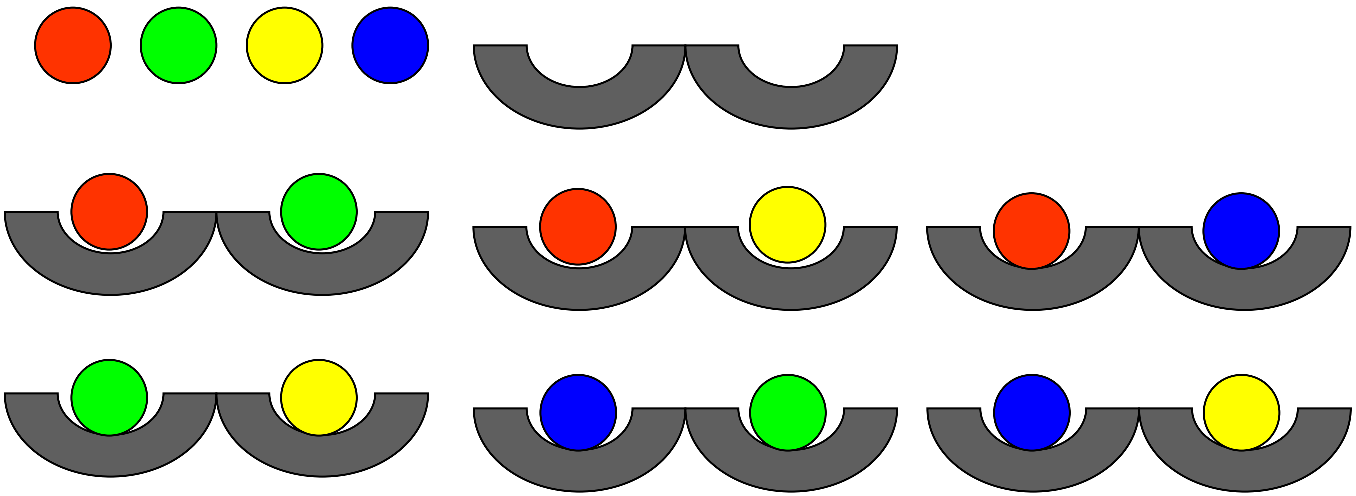
  Сочетанием из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется любое подмножество, которое содержит ***k*** различных элементов данного множества.

  Различные сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Основные правила комбинаторики

Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Элементы комбинаторики

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
2. Сколькими способами восемь человек могут встать в очередь к театральной кассе?
3. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться?
4. Сколько слов (цепочек букв) можно образовать из букв слова **фрагмент**, если слова должны состоять из четырех букв? Сколько среди них таких, которые начинаются на букву «ф» и заканчиваются на букву «т»?
5. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Элементы комбинаторики

Задача на комбинированную выборку

- ***Задача:***
  В колоде – 36 карт: четыре масти по девять карт (от шестёрки до туза). Сколько существует способов составить набор из шести карт так, чтобы в него вошли два короля, три десятки и одна дама?

  В данной задаче важно определить, на какие сорта (классы) надо разбить всю совокупность, чтобы выбор осуществлялся из каждого класса в определенном количестве.

  Схема рассуждений такова:

  - **королей всего четыре, из них берем два, способов** $C_4^2 =$ ***6*****;**
  - **десяток всего четыре, из них берем три, способов** $C_4^3 =$ ***3*****;**
  - **дам всего четыре, из них берем одну, способов** $C_4^1 =$ ***4*****,**

  поскольку требуется сделать выбор и (1), и (2), и (3), то, по правилу умножения, число комбинированных наборов равно 6 · 3 · 4 = 72.

Элементы комбинаторики

Возможные ошибки

- ***Задача:***
  Сколько существует вариантов выбрать шесть карт из колоды (36 карт) так, чтобы среди них была хотя бы одна дама?

Первый способ. Возьмём одну даму (*4* варианта). В колоде осталось *35* карт. Выберем из них любые пять карт (*324632* способов). По правилу умножения получим всего *4 · 324632=1298528* способов.

Второй способ. Рассмотрим все варианты выбора по шесть из *36* (сочетания по шесть из *36*). Из них уберём все те варианты, в которых нет ни одной дамы (сочетания по шесть из *32*). Получим всего – *1041600* способов.

В первом способе допущена грубая ошибка: некоторые наборы просчитываются по нескольку раз. Например, если сначала выбрана дама пик, а затем дама червей и четыре туза, то это тот же набор, что и набор полученный выбором дамы червей, а затем дамы пик и четырёх тузов. Во втором способе все наборы просчитываются по одному разу. Второй ответ является верным.

Элементы комбинаторики

Задания на дом: 1) Составить таблицу 2) Придумать задачи

Размещения	Перестановки	Сочетания
Без повторений		
Определение. Размещениями из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов. **Признаки:** n различных элементов k различных мест порядок следования элементов на местах важен. **Описание и формула:** выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ способами.	**Определение.** Перестановками называют размещения из n элементов по n мест. n различных предметов, расположенных на n различных местах, можно переставить **Признаки:** n различных элементов n различных мест порядок следования элементов на местах важен. **Описание и формула: …**	**Определение:** **Признаки:** **Описание и формула…**
С повторениями		
…	…	…

Элементы математической логики

- **Логика** – это наука о формах и законах правильного мышления. Она появилась приблизительно в IV веке до н. э. в Древней Греции. Ее создателем считается знаменитый древнегреческий философ и ученый Аристотель (предложил систему силлогизмов).

- **Математическая логика** (теоретическая логика, символическая логика) – раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики. Зарождение математической логики можно отнести к XVII в., когда возникла идея построения универсального языка для всей математики и формализации на базе такого языка математических доказательств.

Элементы математической логики

- По содержанию человеческое мышление бесконечно многообразно, но форм, в которых выражается это разнообразие, совсем немного!

  Рассмотрим высказывания:

  1) Все караси – это рыбы; Все треугольники – это геометрические фигуры; Все стулья – это предметы мебели.

  - **Все А – это В,   где А и В – какие-либо объекты.**

  2) Если наступает осень, то опадают листья; Если завтра пройдет дождь, то на улице будут лужи; Если вещество – металл, то оно электропроводно.

  - **Если А, то В.**

- Логика не интересуется содержанием мышления, она изучает только формы мышления; ее интересует не то, что мы мыслим, а то, как мы мыслим, поэтому она часто называется **формальной логикой**.

Элементы математической логики

- **Высказывание** – любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

- Символическое обозначения высказываний – латинские буквы *a*, *b*, *c*, …, *x*, *y*, *z*, …

  Логическое значение высказывания «истина» («ложь») обозначается или буквой «и», («л»), или цифрой 1, (0).

  a = 1, b = 0, x = «и», y = «л»

Элементы математической логики

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волхов впадает в озеро Ильмень;
2) всякий человек имеет брата;
3) пейте томатный сок!;
4) существует человек, который моложе своего отца;
5) который час?;
6) ни один человек не весит более 1000 кг;
7) $23 < 5$;
8) для всех действительных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$;
9) $x^2 - 7x + 12$;
10) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7) – ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Основные логические операции

1. Отрицание. *Отрицанием* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\bar{x}$ и читается «не x» или «неверно, что x».

Пусть x высказывание. Так как $\bar{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\bar{x}$, то есть высказывание $\bar{\bar{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x. Ясно, что логические значения высказываний $\bar{\bar{x}}$ и x совпадают.

Например для высказывания «Волга впадает в Балтийское море» отрицанием будет высказывание : «Неверно, что Волга впадает в Балтийское море» или «Волга не впадает в Балтийское море», а двойным отрицанием будет высказывание: «Неверно, что Волга не впадает в Балтийское море».

Основные логические операции

2. **Конъюнкция (логическое умножение).** ***Конъюнкцией*** двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x\&y$ или ($x \wedge y$), читается «x и y». Высказывания x, y называются членами конъюнкции.

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Основные логические операции

3. Дизъюнкция (логическое сложение). *Дизъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x \vee y$, читается «x или y». Высказывания x, y называются членами дизъюнкции.

Например, высказывание «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике DFE угол D острый», «В треугольнике DFE угол E острый».

Основные логические операции

4. Импликация. *Импликацией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x, y обозначается символом $x \to y$, читается «если x, то y» или «из x следует y». Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y – следствием или заключением, высказывание $x \to y$ – следованием или импликацией.

Например, высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Основные логические операции

5. Эквиваленция. *Эквиваленцей* (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y». Высказывания x, y называются членами эквиваленции.

Например, эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$» является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Основные логические операции

Пример 2. Пусть a – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b – высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \bar{b}$;   2) $a \to b$;   3) $\bar{b} \leftrightarrow \bar{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; б) «Если студент Иванов изучает английский язык, то он успевает по математической логике»; в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Основные логические операции

Упражнения:

1.8. Пусть p и q обозначают высказывания:
p – «Я учусь в школе»,
q – «Я люблю математику».
Прочтите следующие сложные высказывания:

1) $\bar{p}$; 2) $\bar{\bar{p}}$; 3) $p \& q$; 4) $p \& \bar{q}$; 5) $\bar{p} \& q$; 6) $\bar{p} \& \bar{q}$; 7) $\overline{p \& q}$.

1.9. Какие из следующих импликаций истинны:
1) если $2 \times 2 = 4$, то $2 < 3$;
2) если $2 \times 2 = 4$, то $2 > 3$;
3) если $2 \times 2 = 5$, то $2 < 3$;
4) если $2 \times 2 = 5$, то $2 > 3$?

Основные логические операции

Таблицы истинности

Таблица истинности для логического отрицания имеет вид:

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Логические значения остальных операций описываются следующей таблицей:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний x, y, z можно построить высказывания

$$(x \& y) \vee \overline{z} \quad \text{и} \quad x \to \overline{\left(y \vee (x \& z)\right)}.$$

Первое из них есть дизъюнкция конъюнкции x, y и отрицания высказывания z, а второе высказывание есть импликация, посылкой которой является высказывание x, а заключением – отрицание дизъюнкции высказывания y и конъюнкции высказываний x, z.

Все высказывания можно разделить на простые (или элементарные) и составные (или сложные).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется *формулой алгебры логики*.

Формулы алгебры логики

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

В связи с этим формулы

$$(x \& y) \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \to \overline{(y \vee (x \& z))}$$

могут быть записаны так:

$$x \& y \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \to \overline{y \vee x \& z}.$$

Формулы алгебры логики

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $\overline{x \& y} \vee \overline{z}$ в случае, если $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ будет истина, то есть $\overline{x \& y} \vee \overline{z} = 1$.

Упражнение:

1.15. Пусть $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Определить логические значения нижеследующих сложных высказываний:

1) $x \wedge (y \wedge z)$;
2) $(x \wedge y) \wedge y$;
3) $x \to (y \to z)$;
4) $x \wedge y \to z$;
5) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \overline{y})$;
6) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$.

Использование таблиц истинности

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например: Составить таблицу истинности для формулы: $a \vee \bar{b}$

a	b	$\bar{b}$	$a \vee \bar{b}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Легко видеть, что, если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

Использование таблиц истинности

Например, для формулы $\overline{x} \vee y \to x \& \overline{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$x \& \overline{y}$	$\overline{x} \vee y \to x \& \overline{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Равносильности алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний $(A \equiv B)$.

$x \& 1 \equiv x.$

$x \vee 1 \equiv 1.$

$x \& 0 \equiv 0.$

$x \vee 0 \equiv x.$

$x \& \overline{x} \equiv 0$ — закон противоречия.

$x \vee \overline{x} \equiv 1$ — закон исключенного третьего.

$x \& y \equiv y \& x.$

$x \vee y \equiv y \vee x.$

$x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z).$

$x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z).$

Равносильности алгебры логики

1.20. Доказать равносильность:

1) $(x \vee y) \& (x \vee \bar{y}) \equiv x$;

2) $x \vee (\bar{x} \& y) \equiv x \vee y$;

Решение логических задач

Пример 1. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1. Антон был вторым, а Борис – пятым.
2. Виктор был вторым, а Денис – третьим.
3. Григорий был первым, а Борис – третьим.
4. Антон был третьим, а Евгений – шестым.
5. Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение логических задач

Решение. Будем обозначать высказывания зрителей символом X_y, где X – первая буква имени участника турнира, а y – номер места, которое он занял в турнире.

Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний

$$A_2 \vee Б_5 \equiv 1,\ B_2 \vee Д_3 \equiv 1,\ Г_1 \vee Б_3 \equiv 1,\ A_3 \vee E_6 \equiv 1,\ B_3 \vee E_4 \equiv 1.$$

Но тогда будет истинной и формула

$$L \equiv (A_2 \vee Б_5) \& (B_2 \vee Д_3) \& (Г_1 \vee Б_3) \& (A_3 \vee E_6) \& (B_3 \vee E_4).$$

Путем простых равносильных преобразований легко показать, что $L \equiv A_3 \& Б_5 \& B_2 \& Г_1 \& E_4$. Но $L \equiv 1$ и, значит, $A_3 \equiv 1$, $Б_5 \equiv 1$, $B_2 \equiv 1$, $Г_1 \equiv 1$, $E_4 \equiv 1$, что и дает ответ на вопрос задачи.

Табличный метод решение задач

Табличный метод решения логических задач весьма удобен при установлении истинности одного из нескольких высказываний, сделанных участниками задачи и содержащих описание их действий.

Пример:

Иванов, Петров и Сидоров подозреваются в совершении преступления. В ходе следствия они дали следующие показания:

Иванов: Петров виновен, а Сидоров – нет.

Петров: Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров. (Они всегда действуют сообща).

Сидоров: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Необходимо установить:

а) Совместимы ли показания всех троих подозреваемых, т.е. могут ли они быть одновременно истинны?

б) Предполагая, что показания всех обвиняемых истинны, укажите, кто виновен, а кто нет?

в) Если все трое невиновны, то кто лжесвидетельствует?

Табличный метод решение задач

Решение.

Обозначим через *I* высказывание «Виноват Иванов», *P* — «Виноват Петров», *S* — «Виноват Сидоров». Именно эти высказывания являются простыми, исходными. Тогда показания подозреваемых описываются следующими формулами алгебры высказываний:

Иванов: $P \& \neg S$
Петров: $I \to S$.
Сидоров: $\neg S \& (I \vee P)$.

Построим таблицу истинности, поместив в ее первые три столбца значения исходных высказываний *I*, *P*, *S* , а в следующие столбцы – значения высказываний подозреваемых и вспомогательных формул (ниже).

Теперь ответим на вопросы задачи.

а) Показания Иванова, Петрова и Сидорова одновременно истинны, т.е. имеют значение 1, в шестой строке таблицы. Таким образом, показания всех подозреваемых совместны.

б) Если показания всех обвиняемых истинны (пункт а) – шестая строка таблицы), то в этом случае P=1, а I=0 и S=0, т.е. виновен Петров, а Иванов и Сидоров – невиновны.

в) И, наконец, если все подозреваемые невиновны P=0, I=0, S=0 (восьмая строка), то лишь Петров говорит правду, а Иванов и Сидоров по какой-то причине лжесвидетельствуют.

Табличный метод решение задач

Исходные высказывания			Вспомогательные формулы		Утверждения			Пункты задачи
					Иванова:	*Петрова*:	*Сидорова*:	
I	***P***	***S***	¬S	I ∨ P	P & ¬S	I → S	¬S & (I ∨ P)	
1	1	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	1	1	1	а), б)
0	0	1	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	1	0	в)

Основы теории вероятностей

- **Теория вероятностей** – раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

- **Методы теории вероятностей** широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также в экономике, страховом деле, массовом обслуживании.

- Зарождение основных понятий теории вероятностей – попытка создания **теории азартных игр** (Б.Паскаль, П. Ферма, Х.Гюйгенс)
- Основной вклад в развитие внесли: Я.Бернулли, П.Лаплас, К. Гаусс, П.Чебышев, А.Марков, А.Ляпунов, А. Колмогоров и др.

Основные понятия теории вероятностей

Понятие о случайном событии

Опыт, эксперимент, наблюдение, повторяемое многократно называют *испытанием*.

Например: бросание монеты, бросание игральной кости (кубика).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются выпадение герба или цифры, появление того или иного числа очков.

Виды событий: *достоверные*, *случайные*, *невозможные*.

Для обозначения событий используют большие буквы латинского алфавита: А, В, С и т.д.

Основные понятия теории вероятностей

Определение. Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение. Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Определение. Событие *A* называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Основные понятия теории вероятностей

Определение вероятности

Вероятность события А – число Р(А), характеризующее возможность появления этого события. По определению,

$$0 \le P(A) \le 1$$

Классическое определение вероятности: если событие А происходит в результате одного из *M* равновероятных исходов, при общем числе исходов равном *N*, то

$$P(A)=M/N$$

Рассчитанная таким образом вероятность называется *априорной*.

Статистическое определение вероятности:

Отношение р = m/n числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события приближается к вероятности P этого события.

Основные понятия теории вероятностей

Алгебра событий

Определение. *Суммой* событий A и B называется событие $C = A+B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

Например, появление четной грани игральной кости есть сумма трех событий: выпадение 2, или 4, или 6.

Определение. Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Основные понятия теории вероятностей

Теорема сложение вероятностей
Если события A и B – несовместные, то вероятность суммы этих событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если события A и B – совместные, то вероятность суммы этих событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема умножения вероятности
Если события A и B – независимые, то вероятность произведения этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Если события A и B – зависимые, то вероятность произведения этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$P_A(B)$ – *условная вероятность* (вероятность события В при условии, что произошло событие А).

Основы теории вероятностей

Примеры задач на подсчет вероятностей

1. Игральную кость подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы 1 раз?

2. Два стрелка стреляют в одну цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0.8, а вторым – 0.5. Стрелки стреляют одновременно. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков? Какова вероятность, что оба стрелка поразят цель одновременно?

3. В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность того, что: а) оба вынутых шара черные; б) вынутые шары разного цвета?

- *Случайная величина (СВ)* – величина, которая в результате опыта принимает одно заранее неизвестное значение

Примеры:

- количество очков, выпадающих при бросании игрального кубика;
- число посетителей аптеки в течение случайно взятого дня;
- температура больного в наугад выбранное время суток;
- рост случайно выбранного студента.

Виды случайных величин (СВ)

- Дискретные СВ (ДСВ) – СВ, *значения которых можно пересчитать (например: число звонков на станцию скорой помощи в течение часа или количество очков, выпадающих при бросании игрального кубика);*
- Непрерывные СВ (НСВ) – *значения которых непрерывно заполняют какой-либо промежуток (их нельзя пересчитать). Например: давление крови человека, температура его тела или состав крови.*

Закон распределения СВ

Основная задача теории вероятностей, оперирующей случайными величинами, – это определение ***закона распределения случайной величины, то есть установление соответствия между возможными значениями случайной величины и вероятностью наблюдения этих значений.***

Числовые характеристики СВ

- *Математическое ожидание M(X) – это центральная точка, вокруг которой рассеяны все значения случайной величины X.*
- Математическое ожидание дает представление о среднем значении случайной величины.

Найти математическое ожидание случайной величины X можно по следующим формулам:

а) если X -- дискретная случайная величина, то $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$;

б) если X - непрерывная случайная величина, то $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Свойства математического ожидания:

1) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$, где X и $У$ – случайные величины.

2) $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, где X и $У$ – случайные величины.

3) $M(CX)=CM(X)$, где C – постоянная величина.

Дисперсия

Дисперсия D(X) – это характеристика степени разброса случайной величины относительно ее среднего значения. Она находится как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Размерность дисперсии D(X) равна размерности случайной величины, возведенной в квадрат: $[D(X)] = [X^2]$.

Найти дисперсию случайной величины X можно по следующим формулам:

а) если X -- дискретная случайная величина, то $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 p_i$;

б) если X - непрерывная случайная величина, то $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx$.

Свойства дисперсии

1) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, где X и $У$ – случайные величины.

2) $D(CX) = C^2 D(X)$, где C – постоянная величина.

3) $D(X) = M(x^2) - (M(x))^2$.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma \quad (\sigma = \sqrt{D})$$

Основные понятия математической статистики (МС)

- *Математическая статистика* – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей

- ***Генеральная совокупность*** – совокупность всех объектов, подлежащих изучению.
- ***Сплошное наблюдение*** – изучение всех объектов генеральной совокупности.
- ***Выборочное наблюдение*** – изучение n объектов *(выборки)*, извлеченных случайным образом из генеральной совокупности.
- ***Объем выборки*** – количество элементов в выборке.

- *Варианта* (x_i) – наблюдаемое значение
- *Частотота* (n_i) - число наблюдений значения
- *Относительная частота* (n_i/n) – отношение частоты к объему выборки

Описательная статистика

- *Меры центральной тенденции*

  Мода (Мо) – наиболее часто встречающееся значение в ряду данных.

  Выборка может иметь два значения моды (бимодальная выборка) и более двух (полимодальная)

  Пример: 3,3,5,7,8,9,5,0

  Мо1=3, Мо2=5

- **Среднее арифметическое значение** – отношение суммы всех значений изучаемого признака к числу слагаемых.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{n}$$

- **Медиана (Ме)–** разбивает ряд на две равные части.

  Для определения медианы сначала **ряд упорядочивают** (записывают в порядке возрастания или убывания), а затем выбирают **значение, стоящее посередине.**

  Если значений четное количество, то медиана равна среднему арифметическому двух значений, стоящих посередине

Меры изменчивости

- Размах - разница между максимальным и минимальным значениями.

- Дисперсия – мера разброса данных относительно среднего

Вариационный размах: $R = x_{\max} - x_{\min}$

Дисперсия: $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x - \bar{x}\right)^2}{n}$$

Среднее квадратическое отклонение: $s = \sqrt{s^2}$

Первичное описание исходных данных

- ***Вариационный ряд*** – таблица, отражающая зависимость между видами исходов проводимого опыта и количеством тех или иных исходов.
- ***Полигон частот*** – ломанная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, n_i)

В таком виде изучать выработку рабочих тоже не очень удобно из-за обилия числовых данных. Поэтому разобьем варианты на отдельные интервалы, т.е. проведем их *группировку*.

Число интервалов m следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был громоздким, и не очень малым, чтобы не потерять особенности распределения признака.

Согласно *формуле Стерджеса* рекомендуемое число интервалов $m = 1 + 3{,}322\lg n$, а ***величина интервала*** (***интервальная разность, ширина интервала***)

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322\lg n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

При изучении вариационных рядов наряду с понятием частоты используется понятие *накопленной частоты* (обозначаем $n_i^{\text{нак}}$). Накопленная частота показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x. Отношение накопленной частоты $n_i^{\text{нак}}$ к общему числу наблюдений n назовем *накопленной частостью* $w_i^{\text{нак}}$

Гистограмма служит только для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака $k_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., m$, и высотами, равными частотам (частостям) n_i (w_i) интервалов. Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то можно получить полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая (*кумулята*) — кривая накопленных частот (частостей). Для дискретного ряда кумулята представляет ломаную, соединяющую точки $(x_i, n_i^{\text{нак}})$ или $(x_i, w_i^{\text{нак}})$, $i = 1, 2, ..., m$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината — накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.