Функція розподілу випадкової величини та її головні характеристики. Нормальний розподіл

1. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини: (приклади: біноміальний розподіл, розподіл Пуассона)
3. Математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини, їх властивості.
4. Властивості розподілів неперервної випадкової величини.
5. Нормальний розподіл. Вплив параметрів нормального розподілу на форму нормальної кривої.
6. Обчислення ймовірності заданого відхилення. Правило трьох сигм.

1. Дискретні та неперервні випадкові величини

випадкова величина (ВВ) – величина, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, що наперед невідоме і залежить від випадкових причин, які завчасно (перед випробуванням) не можуть бути враховані

- дискретна ВВ – ВВ, яка приймає **окремі**, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями

Кількість можливих значень – скінчена або нескінченна

- Неперервна ВВ – ВВ, яка приймає **всі можливі** значення з певного скінченого або нескінченного проміжку

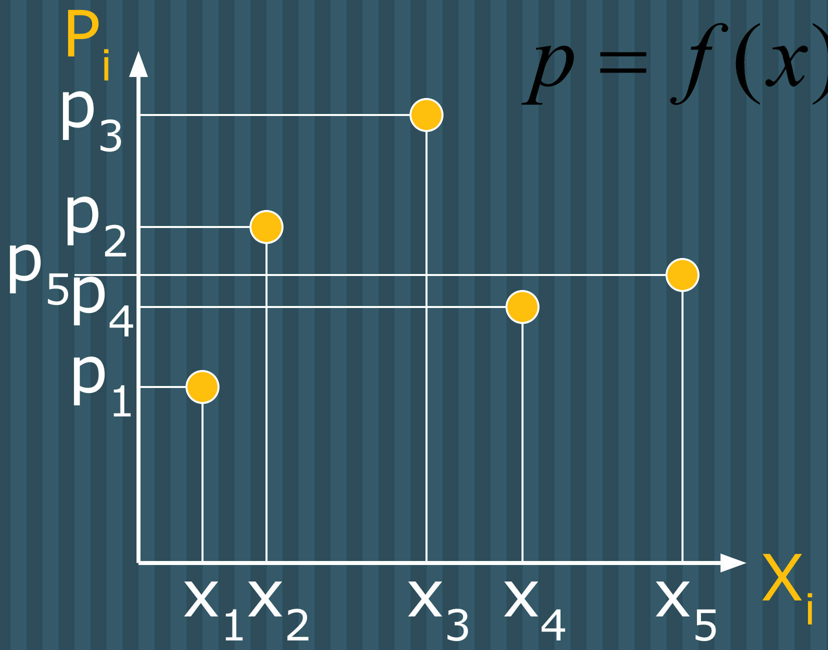
Кількість можливих значень - нескінченна

2. Закон розподілу ймовірностей ДВВ

- Закон розподілу ДВВ – відповідність між можливими значеннями ВВ і їх ймовірностями.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

$$p = f(x)$$



Задається: графічно, аналітично, таблично:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

X_i	x_1	x_2	…	x_n
P_i	p_1	p_2	…	p_n

Приклад:

Умова:

- У клітці 20 щурів: 1 – білий, 10 – сірих і 9 чорних. Навмання витягли 1 щура. Знайти закон розподілу для випадкової величини X – кольору щура

Розв'язок:

- Можливий колір позначимо 1 – білий, 2 – сірий, 3 – чорний, тобто:

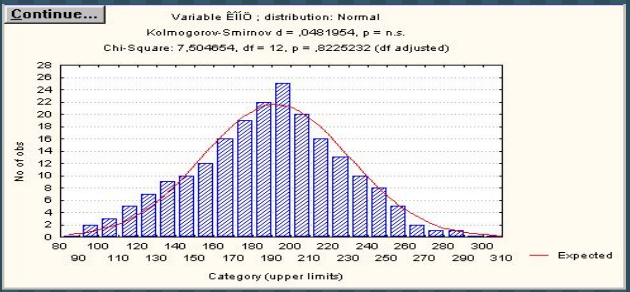
$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 2,$$
$$x_3 = 3.$$

Для цих значень ймовірності є:

$$p_1 = 1/20,$$
$$p_2 = ½,$$
$$p_3 = 9/20$$

X	1	2	3
P	1/20	1/2	9/20

Біноміальний розподіл



- Нехай проводять n незалежних випробувань; ймовірність появи події **A** у кожному з них p (не появи – q=1-p).
- Ймовірність появи події A рівно k разів у n випробуваннях:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Формула Бернуллі

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Біноміальний розподіл – це розподіл ймовірностей, який визначається формулою Бернуллі:

x	n	n-1	…	k	…	0
p	p^n	$n*p^{n-1}*q$	…	$C_n^k*p^k*q^{n-k}$	…	q^n

Найімовірніше число появи події А у випадку біноміального розподілу:

$$np - q \le k_0 \le np + q$$

Приклад:

X	0	1	2	3
P	0,118	0,367	0,382	0,133

Умова:

- У сім'ї народилась трійня. Знайти закон розподілу кількості хлопчиків, коли ймовірність народження хлопчика = 0,51

- Розв'язок:
- q=1-0.51=0.49

Можливо, що в трійні буде 0, 1, 2 і 3 хлопчиків, тоді ймовірності цих подій:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0.51^0 \cdot 0.49^3 = 0.49^3 = 0,117649,$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0.51^1 \cdot 0.49^{3-1} = 3 \cdot 0.51 \cdot 0.49^2 = 0,367353,$$

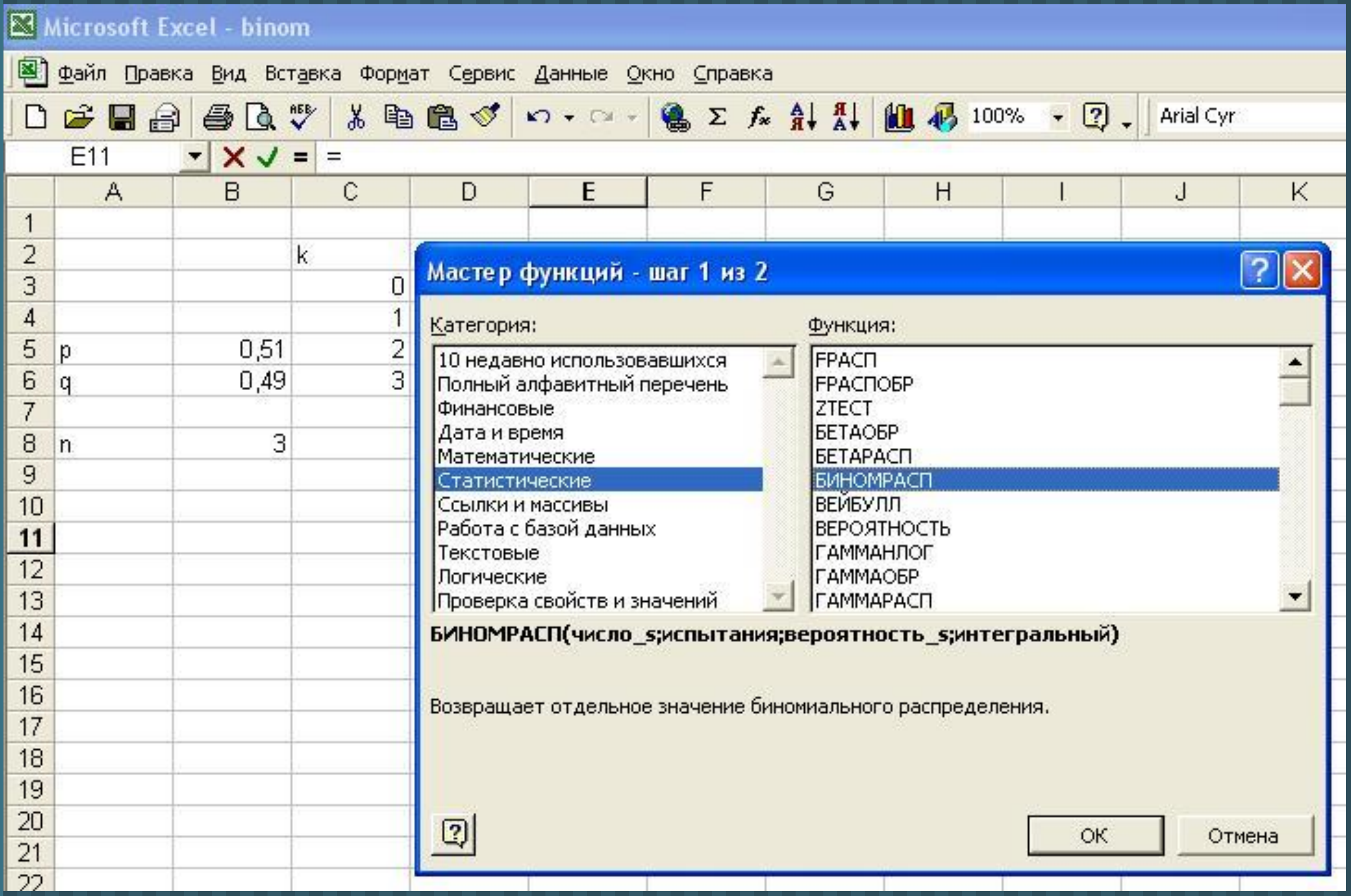
$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49^{3-2} = 3 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49 = 0,382347,$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0.51^3 \cdot 0.49^0 = 0.51^3 = 0,132651,$$

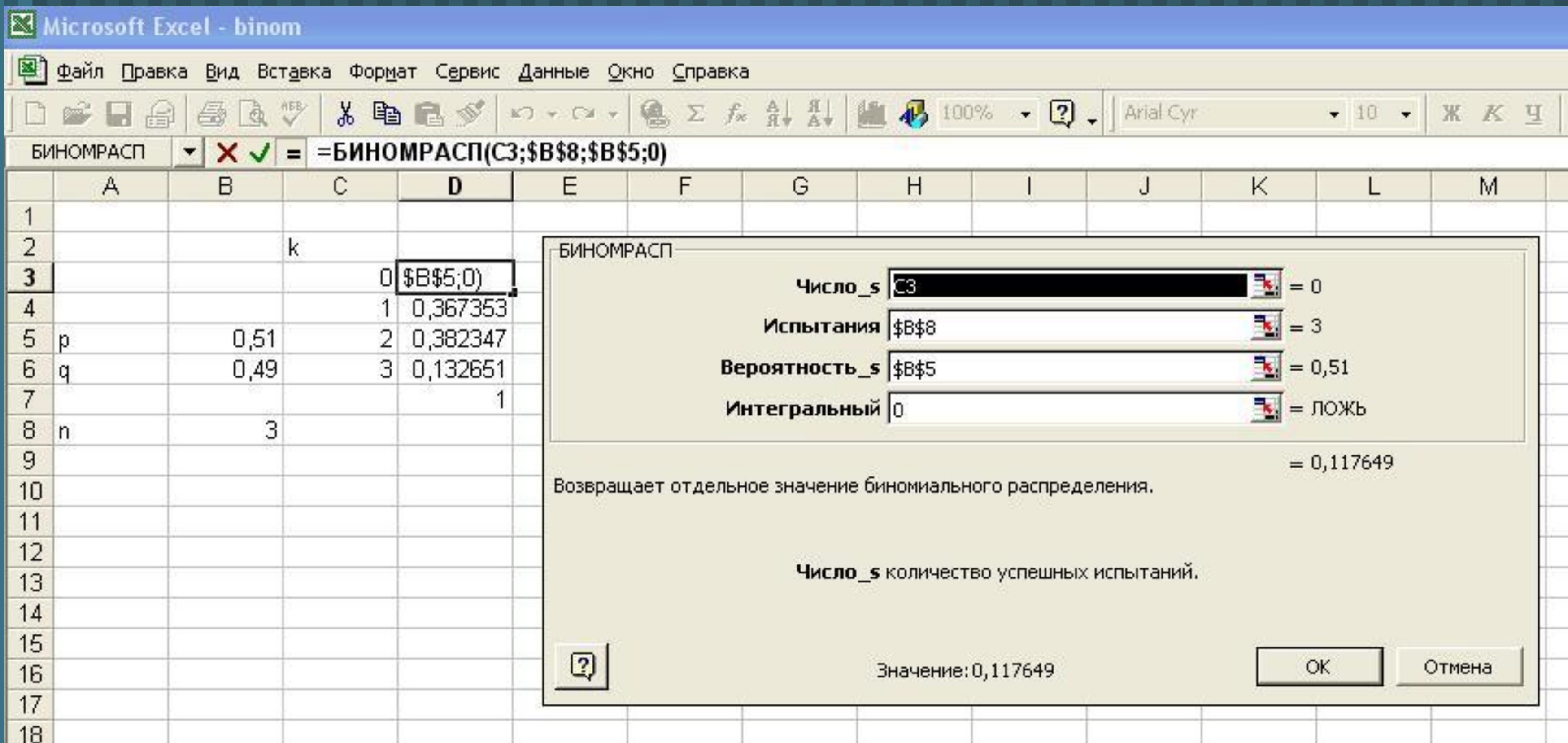
перевірка :

$$0,117649 + 0,367353 + 0,382347 + 0,132651 = 1$$

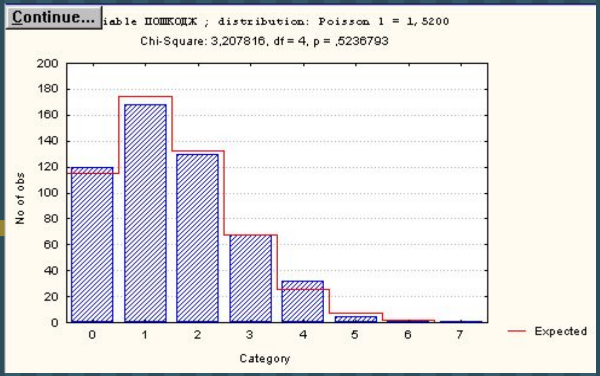
Функція БИНОМРАСП:



Той же приклад, але на Excel:



Розподіл Пуассона



- Він є - випадок з біноміального розподілу (коли p – дуже мале значення, а n – велике),
- ймовірність появи рівно k разів події A у n випробуваннях:

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!e^a}, \ \ \text{де} \ \ a \approx np$$

- a – найімовірніше число появи події A

Приклад:

Умова:

- Підручник зі статистики видано тиражем 5 000 примірників. Ймовірність неправильного брошурування = 0,0006.

а) Яка ймовірність, що 4 книги буде неправильно зброшуровано?

б) Яка найімовірніша кількість книг буде бракованою? Яка її ймовірність?

Розв’язок:

- Маємо: n=5000, p=0.0006, k=4, тоді:

а)

$$P_{5000}(4) = \frac{(0.0006 * 5000)^4}{4! e^3} = 0,168$$

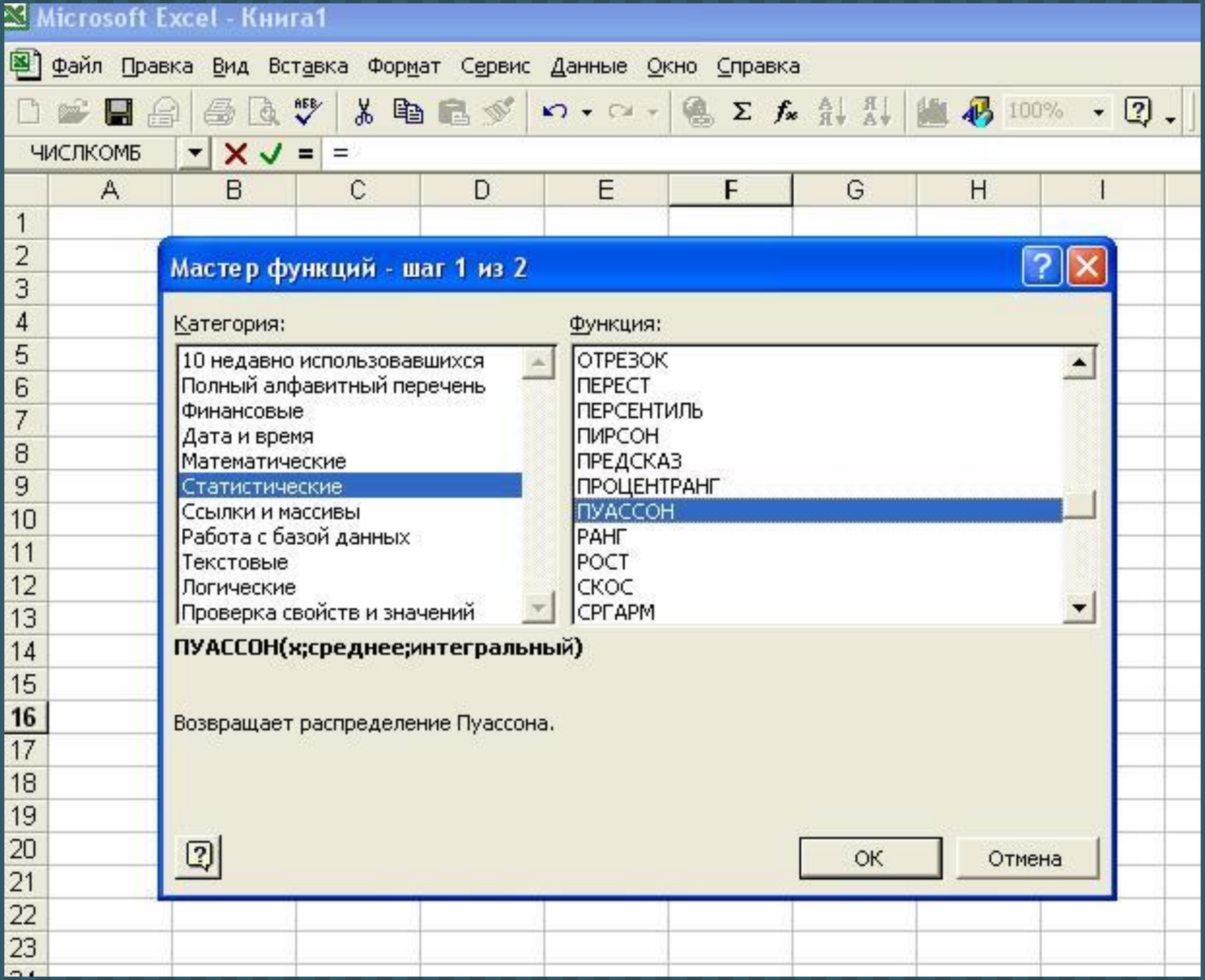
$$a = 0.0006 * 5000 = 3$$

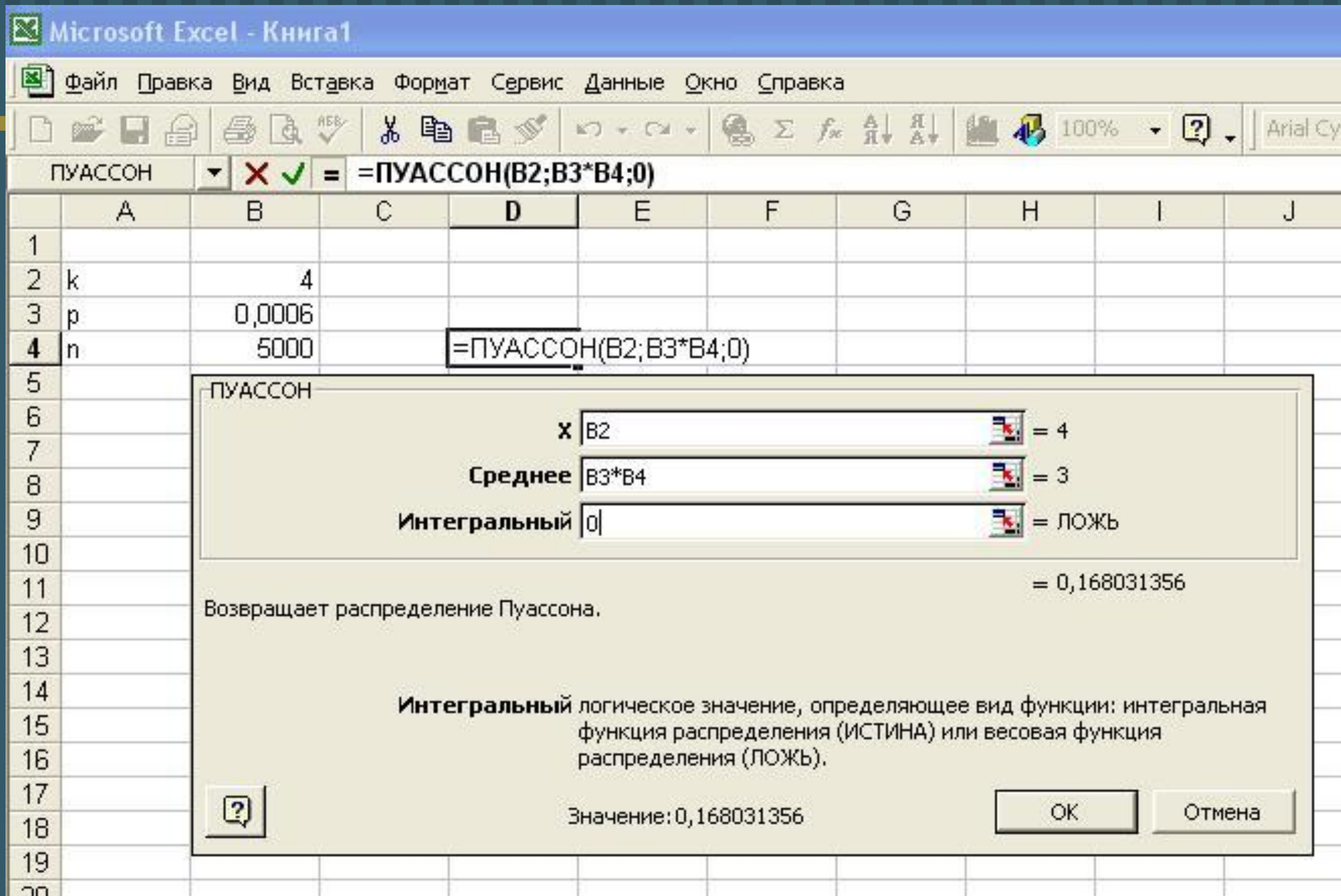
б)

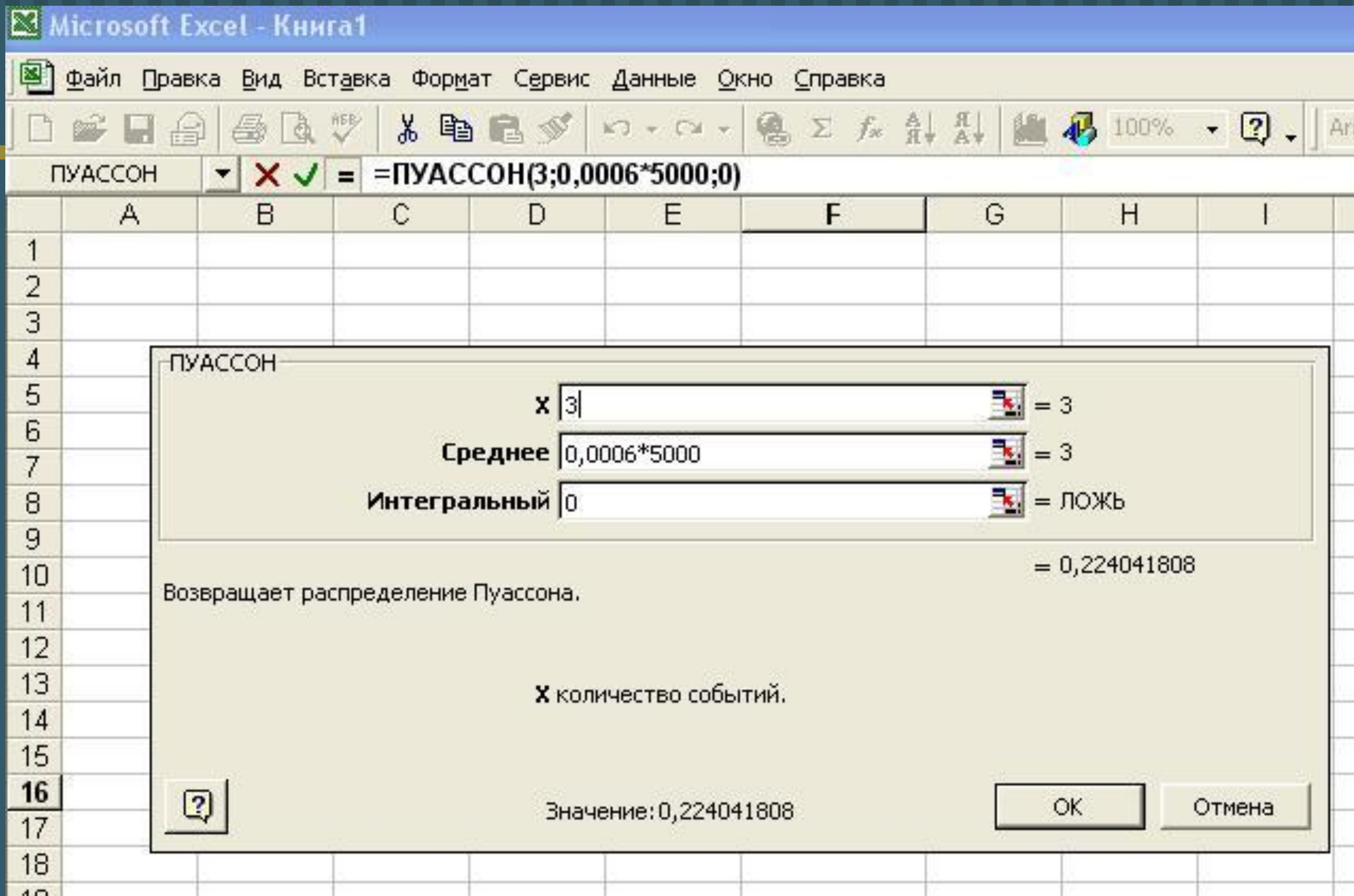
$$a = 0.0006 * 5000 = 3$$

$$P_{5000}(3) = \frac{(3)^3}{3! e^3} = 0,224$$

Той же приклад на Excel:




Microsoft Excel - Книга1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
100%
Arial Cyr
ПУАССОН
=ПУАССОН(B2;B3*B4;0)
A B C D E F G H I J
k 4
p 0,0006
n 5000
=ПУАССОН(B2;B3*B4;0)
ПУАССОН
X B2 = 4
Среднее B3*B4 = 3
Интегральный 0 = ЛОЖЬ
= 0,168031356
Возвращает распределение Пуассона.
Интегральный логическое значение, определяющее вид функции: интегральная функция распределения (ИСТИНА) или весовая функция распределения (ЛОЖЬ).
Значение: 0,168031356
OK
Отмена


Microsoft Excel - Книга1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
100%
ПУАССОН
=ПУАССОН(3;0,0006*5000;0)
ПУАССОН
X 3 = 3
Среднее 0,0006*5000 = 3
Интегральный 0 = ЛОЖЬ
= 0,224041808
Возвращает распределение Пуассона.
X количество событий.
Значение: 0,224041808
OK
Отмена

3. Числові характеристики ДВВ і їх властивості

- **Математичне сподівання** – це характеристика середнього значення ВВ;
- - це сума добутків всіх можливих значень ДВВ на їх ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Властивості:

- Математичне сподівання константи дорівнює самій константі:

  $M(C)=C$
- Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

  $M(CX)=C*M(X)$
- Мат.сподівання добутку взаємно незалежних ВВ дорівнює добутку їх мат.сп.:

  $M(X_1X_2\ldots X_n)=M(X_1)*M(X_2)*\ldots*M(X_n)$
- Для суми взаємно незалежних ВВ:

  $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1)+M(X_2) + \ldots + M(X_n)$
- Для біноміального закону $M(X)=n*p=a$

Дисперсія:

- \- характеристика розсіяння можливих значень ВВ навколо M(X)
- \- це математичне сподівання квадрату відхилень ВВ від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Властивості:

- Дисперсія константи дорівнює 0:

  D(C)=0,
- Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, попередньо встановивши його квадрат:

  $D(CX)=C^2*D(X)$,
- Дисперсія суми незалежних величин:

  $D(X_1+X_2+…+X_n) = D(X_1)+D(X_2)+…+D(X_n)$
- Дисперсія добутку незалежних величин:

  $D(X_1*X_2*…*X_n) = D(X_1)*D(X_2)*…*D(X_n)$
- Для біноміального розподілу: D(X)=n*p*q

Середнє квадратичне відхилення:

- \- характеристика розсіяння можливих значень ВВ навколо M(X)
- \- це квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

X	0	1	2	3
P	0,118	0,367	0,382	0,133

Приклад:

- Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даних ймовірності появи хлопчиків у трійні:

- Математичне сподівання:

$$M(X) = 0*0.118 + 1*0.367 +$$
$$+ 2*0.382 + 3*0.133 = 1.53$$

- Дисперсія:

P	0,118	0,367	0,382	0,133
X^2	0	1	4	9
$P*X^2$	0	0,367	3,059	3,582

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 =$$
$$= 7.01 - 1.53^2 = 7.01 - 2.34 = 4.67$$

- Середньоквадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2.16$

3. Неперервні ВВ. Нормальний розподіл.

- Випадкова величина X є *нормально розподіленою*, коли її функція густини (значення ймовірності p_i будь-якого x_i знаходиться в інтервалі (x + dx)) має вигляд:

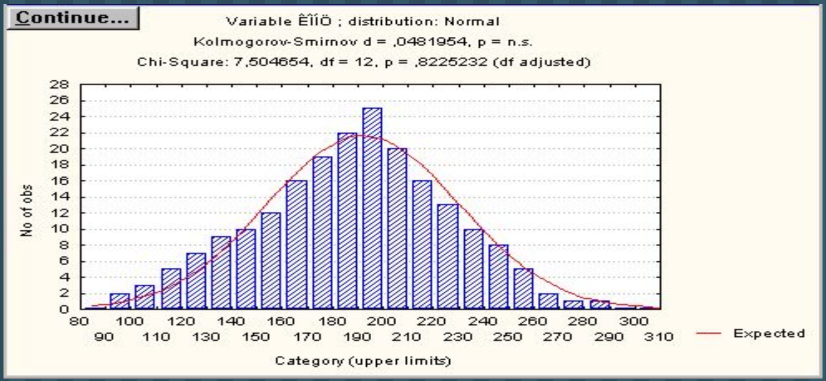
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}$$

- a – математичне сподівання,
- σ - середньоквадратичне відхилення
- ПРИ: a = 0, σ = 1, функція називається *Функцією Лапласа*:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i)^2}{2}}$$

Нормальний розподіл (продовження):

- Ймовірність влучення в будь-який інтервал (a; b) нормально розподіленої випадкової величини розраховується:



$$P(a < x < b) = F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Нормальний розподіл (продовження):

- Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення менше додатного числа у

$$P(|x-a|<y)=2F(\frac{y}{\sigma})$$

- *Правило 2 та 3 σ(2 і 3 сигм)* : 95,45% і 99,73% всіх незалежних спостережень з нормальної сукупності лежить, відповідно, в зоні 2 і 3 стандартних відхилень від середнього значення.

Приклад:

- Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини Х дорівнює 3, середньоквадратичне відхилення = 2. Написати густину ймовірності Х.

- Використаємо формулу:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - 3)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - 3)^2}{8}}$$

Приклад:

- Математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке буде міститись в інтервалі (12, 14).

- Маємо формулу:

$$P(a < x < b) = F(\frac{b-m}{\sigma}) - F(\frac{a-m}{\sigma})$$

$$P(12 < x < 14) = F(\frac{14-10}{2}) - F(\frac{12-10}{2}) =$$
$$= F(2) - F(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

Приклад:

- Зважують речовину без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування підкорюються нормальному закону з середньоквадратичним відхиленням 20 мг. Знайти ймовірність того, що зважування буде здійснене з похибкою, яка не перевищить за абсолютною величиною 10 мг.

- Маємо:

$$P(|x-a|<y)=2F(\frac{y}{\sigma})$$

$$P(|x|<10)=2F(\frac{10}{20})=2F(0.5)=2\cdot 0.1915=0.383$$