

Функція розподілу випадкової величини та її головні характеристики.

Нормальний розподіл

1. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини: (приклад: біноміальний розподіл, розподіл Пуассона)
3. Математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини, їх властивості.
4. Властивості розподілів неперервної випадкової величини.
5. Нормальний розподіл. Вплив параметрів нормального розподілу на форму нормальної кривої.
6. Обчислення ймовірності заданого відхилення. Правило трьох сигм.

1. Дискретні та неперервні випадкові величини

випадкова величина (ВВ) – величина, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, що наперед невідоме і залежить від випадкових причин, які завчасно (перед випробуванням) не можуть бути враховані



- **дискретна ВВ** – ВВ, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями

Кількість можливих значень – скінчена або нескінченна

- **Неперервна ВВ** – ВВ, яка приймає всі можливі значення з певного скінченого або нескінченного проміжку

Кількість можливих значень - нескінченна

2. Закон розподілу ймовірностей ДВВ

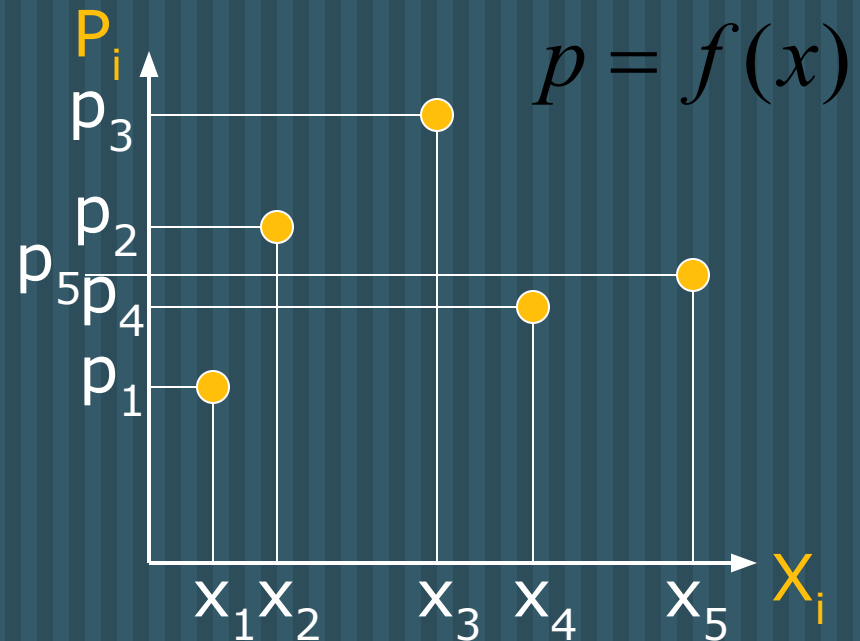
- **Закон розподілу ДВВ**
– відповідність між можливими значеннями ВВ і їх ймовірностями.

Задається: графічно,
аналітично,
таблично:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

X_i	x_1	x_2	\dots	x_n
P_i	p_1	p_2	\dots	p_n

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5



Приклад:

Умова:

- У клітці 20 щурів: 1 – білий, 10 – сірих і 9 чорних. Навмання витягли 1 щура. Знайти закон розподілу для випадкової величини X – кольору щура

Розв'язок:

- Можливий колір позначимо 1 – білий, 2 – сірий, 3 – чорний, тобто:

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 2,$$

$$x_3 = 3.$$

Для цих значень ймовірності є:

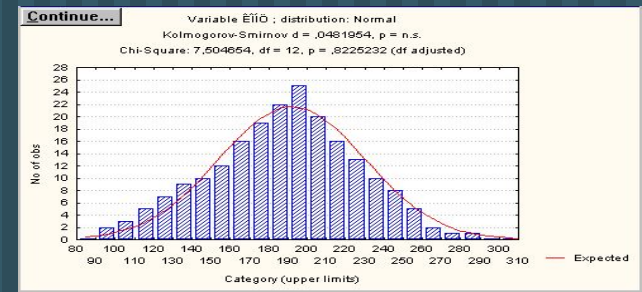
$$p_1 = 1/20,$$

$$p_2 = 1/2,$$

$$p_3 = 9/20$$

X	1	2	3
P	1/20	1/2	9/20

Біноміальний розподіл



- Нехай проводять n незалежних випробувань; ймовірність появи події **A** у кожному з них p (не появи – $q=1-p$).
- Ймовірність появи події A рівно k разів у n випробуваннях:

- **Біноміальний розподіл** – це розподіл ймовірностей, який визначається формулою Бернуллі:

x	n	n-1	...	k	...	0
p	p^n	$n \cdot p^{n-1} \cdot q$...	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$...	q^n

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Формула Бернуллі

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Найімовірніше число появи події А у випадку біноміального розподілу:

$$np - q \leq k_0 \leq np + q$$

Приклад:

X	0	1	2	3
P	0,118	0,367	0,382	0,133

Умова:

- У сім'ї народилась трійня. Знайти закон розподілу кількості хлопчиків, коли ймовірність народження хлопчика = 0,51

- Розв'язок:

- $q = 1 - 0.51 = 0.49$

Можливо, що в трійні буде 0, 1, 2 і 3 хлопчиків, тоді ймовірності цих подій:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0.51^0 \cdot 0.49^3 = 0.49^3 = 0,117649,$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0.51^1 \cdot 0.49^{3-1} = 3 \cdot 0.51 \cdot 0.49^2 = 0,367353,$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49^{3-2} = 3 \cdot 0.51^2 \cdot 0.49 = 0,382347,$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0.51^3 \cdot 0.49^0 = 0.51^3 = 0,132651,$$

перевірка :

$$0,117649 + 0,367353 + 0,382347 + 0,132651 = 1$$

Функція БИНОМРАСП:

The image shows a screenshot of the Microsoft Excel application window titled "Microsoft Excel - binom". The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			k								
3			0								
4			1								
5	p	0,51	2								
6	q	0,49	3								
7											
8	n	3									
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											

The "Master Functions" dialog box is open, showing the "BINOMDIST" function selected. The dialog box title is "Мастер функций - шаг 1 из 2". The "Категория:" (Category) list on the left includes "Статистические" (Statistical), which is highlighted. The "Функция:" (Function) list on the right includes "БИНОМРАСП" (BINOMDIST), which is selected. Below the lists, the function name is displayed as "БИНОМРАСП(число_s;испытания;вероятность_s;интегральный)". The description below reads: "Возвращает отдельное значение биномиального распределения." (Returns the individual value of the binomial distribution.) The dialog box has "ОК" (OK) and "Отмена" (Cancel) buttons at the bottom right.

Той же приклад, але на Excel:

The screenshot shows a Microsoft Excel window titled "Microsoft Excel - binom". The menu bar includes "Файл", "Правка", "Вид", "Вставка", "Формат", "Сервис", "Данные", "Окно", and "Справка". The toolbar contains various icons for file operations and editing. The formula bar shows the active cell formula: `=БИНОМРАСП(C3;B8;B5;0)`. The spreadsheet grid shows the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2			k										
3			0	<code>=\$B\$5;0)</code>									
4			1	0,367353									
5	p	0,51	2	0,382347									
6	q	0,49	3	0,132651									
7				1									
8	n	3											
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

The "БИНОМРАСП" dialog box is open, showing the following settings:

- Число_s: C3 = 0
- Испытания: \$B\$8 = 3
- Вероятность_s: \$B\$5 = 0,51
- Интегральный: 0 = ЛОЖЬ

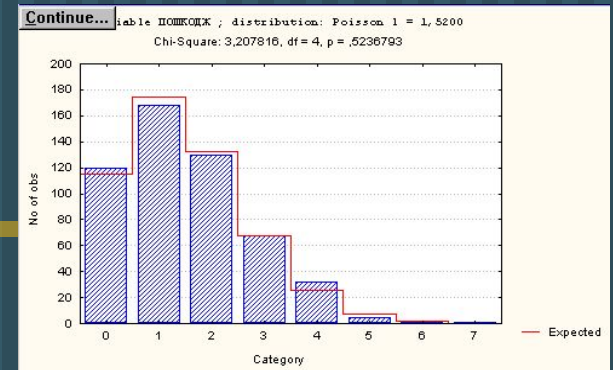
The result of the calculation is 0,117649. Below the input fields, the text reads: "Возвращает отдельное значение биномиального распределения." and "Число_s количество успешных испытаний." The dialog box also shows a help icon, the value "Значение: 0,117649", and "OK" and "Отмена" buttons.

Розподіл Пуассона

- Він є - випадок з біноміального розподілу (коли p – дуже мале значення, а n – велике),
- ймовірність появи рівно k разів події A у n випробуваннях:

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!e^a}, \text{ де } a \approx np$$

- a – найімовірніше число появи події A



Приклад:

Умова:

- Підручник зі статистики видано тиражем 5 000 примірників. Ймовірність неправильного брошурування = 0,0006.
- а) Яка ймовірність, що 4 книги буде неправильно зброшуровано?
- б) Яка найімовірніша кількість книг буде бракованою? Яка її ймовірність?

Розв'язок:

- Маємо: $n=5000$, $p=0.0006$, $k=4$, тоді:
- а)

$$P_{5000}(4) = \frac{(0.0006 * 5000)^4}{4!e^3} = 0,168$$

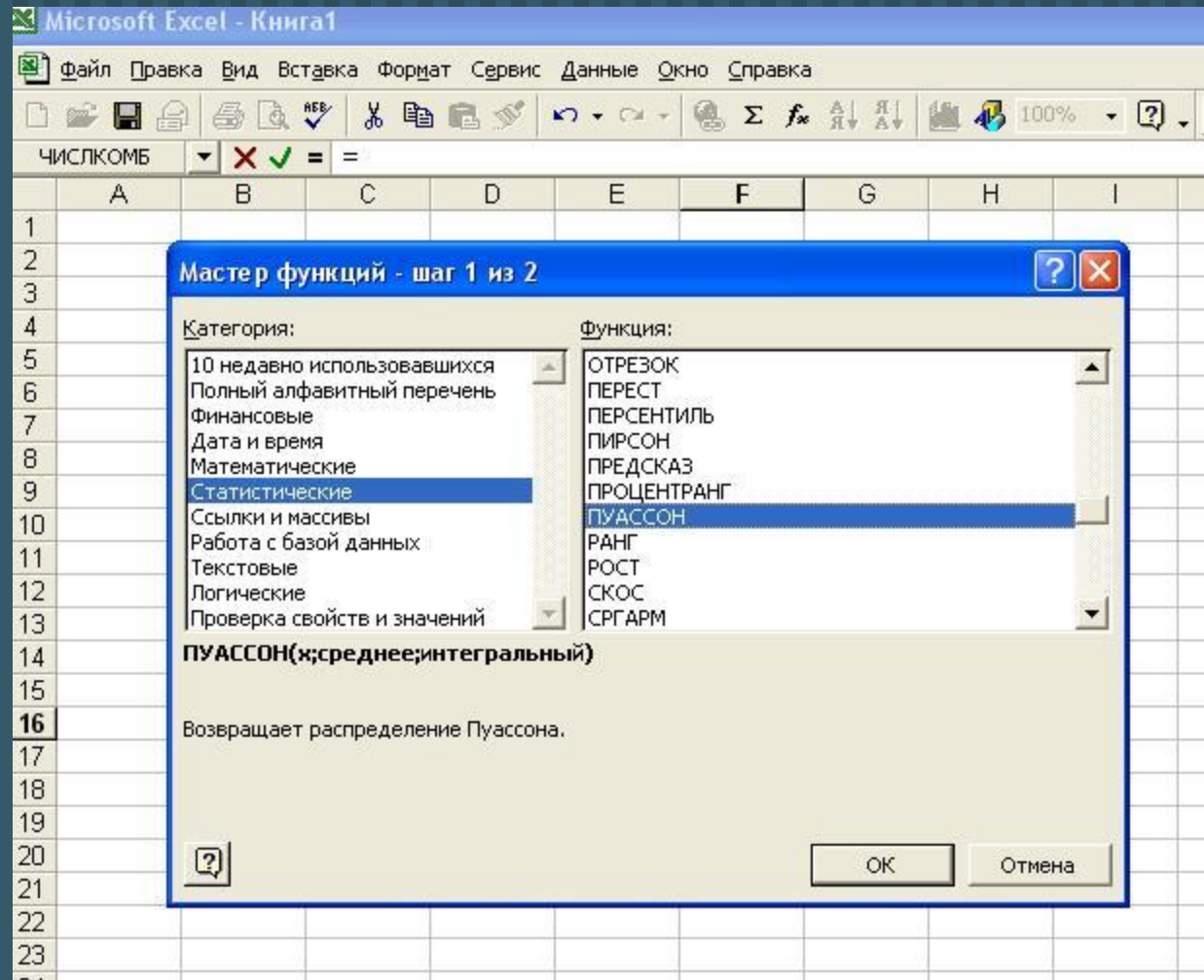
$$a = 0.0006 * 5000 = 3$$

б)


$$a = 0.0006 * 5000 = 3$$

$$P_{5000}(3) = \frac{(3)^3}{3!e^3} = 0,224$$

Той же приклад на Excel:



Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

100% Arial Cyr

ПУАССОН = =ПУАССОН(B2;B3*B4;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	k	4								
3	p	0,0006								
4	n	5000		=ПУАССОН(B2;B3*B4;0)						

ПУАССОН

x | B2 | = 4

Среднее | B3*B4 | = 3

Интегральный | 0 | = ЛОЖЬ

= 0,168031356

Возвращает распределение Пуассона.

Интегральный логическое значение, определяющее вид функции: интегральная функция распределения (ИСТИНА) или весовая функция распределения (ЛОЖЬ).

Значение: 0,168031356

OK Отмена

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

ПУАССОН = =ПУАССОН(3;0,0006*5000;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									

ПУАССОН

x 3 = 3

Среднее 0,0006*5000 = 3

Интегральный 0 = ЛОЖЬ

= 0,224041808

Возвращает распределение Пуассона.

x количество событий.

Значение: 0,224041808

OK Отмена

3. Числові характеристики ДВВ і їх властивості

- **Математичне сподівання** – це характеристика **середнього значення** ВВ;
- - це сума добутків всіх можливих значень ДВВ на їх ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Властивості:

- Математичне сподівання константи дорівнює самій константі:

$$M(C) = C$$

- Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = C * M(X)$$

- Мат.сподівання добутку взаємно незалежних ВВ дорівнює добутку їх мат.сп.:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) * M(X_2) * \dots * M(X_n)$$

- Для суми взаємно незалежних ВВ:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

- Для біноміального закону $M(X) = n * p = a$

Дисперсія:

- - характеристика розсіяння можливих значень $ВВ$ навколо $M(X)$
- - це математичне сподівання квадрату відхилень $ВВ$ від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Властивості:

- Дисперсія константи дорівнює 0:
 $D(C)=0,$
- Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, попередньо встановивши його квадрат:
 $D(CX)=C^2*D(X),$
- Дисперсія суми незалежних величин:
 $D(X_1+X_2+...+X_n) = D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)$
- Дисперсія добутку незалежних величин:
 $D(X_1*X_2*...*X_n) = D(X_1)*D(X_2)*...*D(X_n)$
- Для біноміального розподілу:
 $D(X)=n*p*q$

Середнє квадратичне відхилення:

- - характеристика розсіяння можливих значень $ВВ$ навколо $M(X)$
- - це квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

X	0	1	2	3
P	0,118	0,367	0,382	0,133

Приклад:

- Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даних ймовірності появи хлопчиків у трійні:

- Математичне сподівання:

$$M(X) = 0 * 0.118 + 1 * 0.367 + 2 * 0.382 + 3 * 0.133 = 1.53$$

- Дисперсія:

P	0,118	0,367	0,382	0,133
X ²	0	1	4	9
P*X ²	0	0,367	3,059	3,582

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 7.01 - 1.53^2 = 7.01 - 2.34 = 4.67$$

- Середньоквадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2.16$

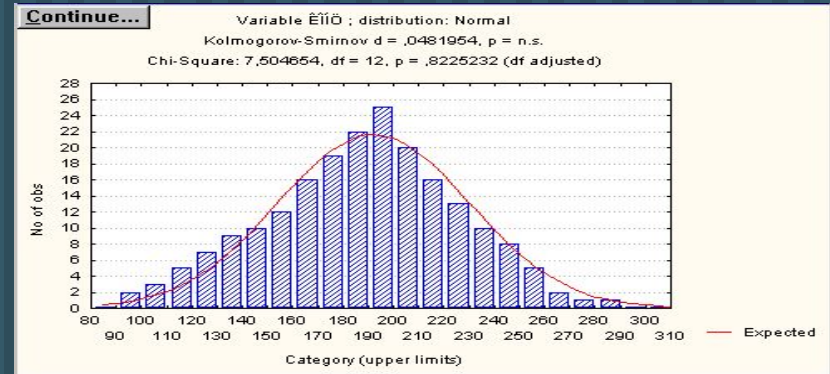
3. Неперервні ВВ. Нормальний розподіл.

- Випадкова величина X є *нормально розподіленою*, коли її функція густини (значення ймовірності p_i будь-якого x_i знаходиться в інтервалі $(x_i + dx)$) має вигляд:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$
- a – математичне сподівання,
- σ – середньоквадратичне відхилення
- ПРИ: $a = 0, \sigma = 1$, функція називається *Функцією Лапласа*:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i)^2}{2}}$$

Нормальний розподіл (продовження):

- Ймовірність влучення в будь-який інтервал (a; b) нормально розподіленої випадкової величини розраховується:

$$P(a < x < b) = F\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$



Нормальний розподіл (продовження):

- Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення менше додатного числа y

$$P(|x - a| < y) = 2F\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

- *Правило 2 та 3 σ (2 і 3 сигм) : 95,45% і 99,73%* всіх незалежних спостережень з нормальної сукупності лежить, відповідно, в зоні 2 і 3 стандартних відхилень від середнього значення.

Приклад:

- Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює 3, середньоквадратичне відхилення = 2. Написати густину ймовірності X .

- Використаємо формулу:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-3)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-3)^2}{8}}$$

Приклад:

- Математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X , відповідно, дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке буде міститись в інтервалі (12, 14).

- Маємо формулу:

$$P(a < x < b) = F\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} P(12 < x < 14) &= F\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - F\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \\ &= F(2) - F(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

Приклад:

- Зважують речовину без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування підкорюються нормальному закону з середньоквадратичним відхиленням 20 мг. Знайти ймовірність того, що зважування буде здійснене з похибкою, яка не перевищить за абсолютною величиною 10 мг.

- Маємо:

$$P(|x - a| < y) = 2F\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

$$P(|x| < 10) = 2F\left(\frac{10}{20}\right) = 2F(0.5) = 2 \cdot 0.1915 = 0.383$$