4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

4.1. Уравнение прямой на плоскости

Уравнением линии на плоскости XOY называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

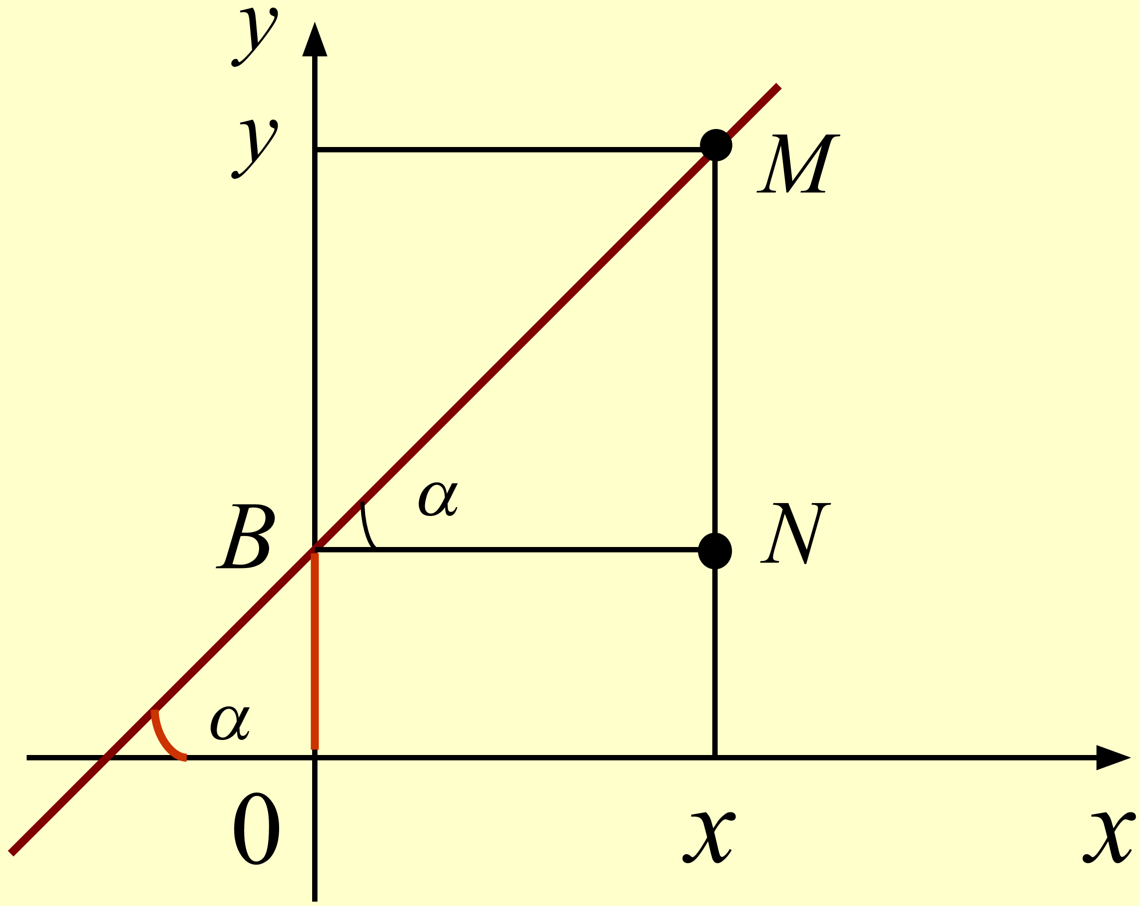
$$\boxed{F(x,y)=0}$$ **или** $$\boxed{y=f(x)}$$

Способы задания прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициенто

Пусть задана прямая, пересекающая ось *у* в точке В *(0,в)* и образующая с осью х угол α $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Выберем на прямой произвольную точку *М(х, у).*



y
y
M
B
α
N
α
0
x
x

Координаты точки N *(х,в)*. Из треугольника *BMN*:

$$tg\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x} = k$$

k **– угловой коэффициент прямой.**

$$y = kx + b$$

1

Уравнение прямой с угловым коэффициенто

Рассмотрим частные случаи:

1 $b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = kx$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

2 $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b$

- уравнение прямой, параллельной оси *x*.

3 $\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad tg\frac{\pi}{2}$ - **не существует**

т.е. у вертикальной прямой нет углового коэффициента.

Уравнение прямой, параллельной оси *y*, в этом случае имеет вид

$$x = a$$

где *a* – отрезок, отсекаемый прямой на оси *x*.

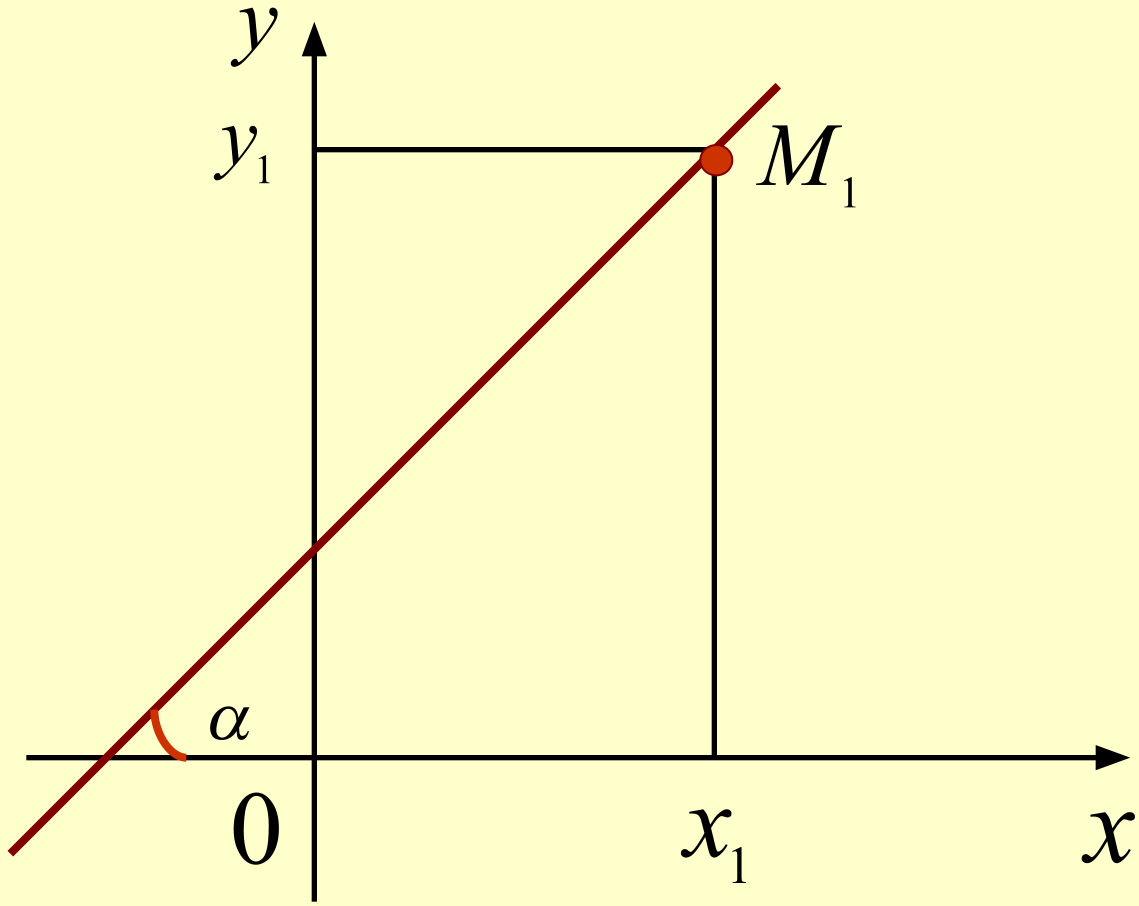
2. Уравнение прямой, проходящ через заданную точку в заданном направлении

Пусть задана прямая, проходящая через заданную точку

$$M_1(x_1, y_1)$$

и образующая с осью *x* угол α

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



y
y1
M1
α
0
x1
x

Т.к. точка M_1 лежит на прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению (1):

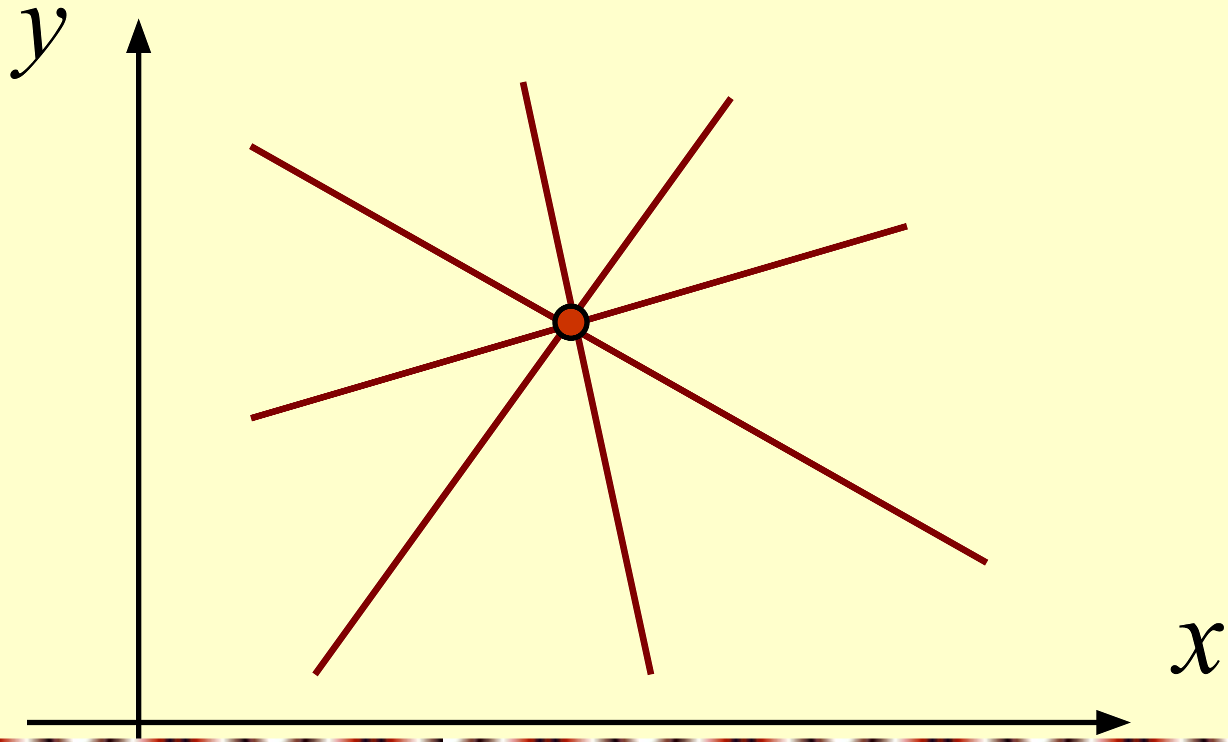
$$y_1 = kx_1 + b$$

Вычитаем это уравнение из уравнения (1):

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлен

Если в этом уравнении угловой коэффициент не определен, то оно задает пучок прямых, проходящих через данную точку, кроме прямой, параллельной оси у, не имеющей углового коэффициента.



3. Уравнение прямой, проходя
через две точки

Пусть задана прямая, проходящая через две точки:

$$M_1(x_1, y_1) \qquad M_2(x_2, y_2)$$

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Т.к. точка M_2 лежит на данной прямой, подставим ее координаты в уравнение пучка прямых:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Подставляем *k* в уравнение пучка прямых. Тем самым мы выделяем из этого пучка прямую, проходящую через две данные точки:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

или

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (3)$$

Уравнение прямой, проходящей через две т

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки А(-5,4) и В(3,-2).

РЕШЕНИЕ.

Подставляем координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x+5}{3+5}$$

$$y-4=-\frac{6}{8}(x+5)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$

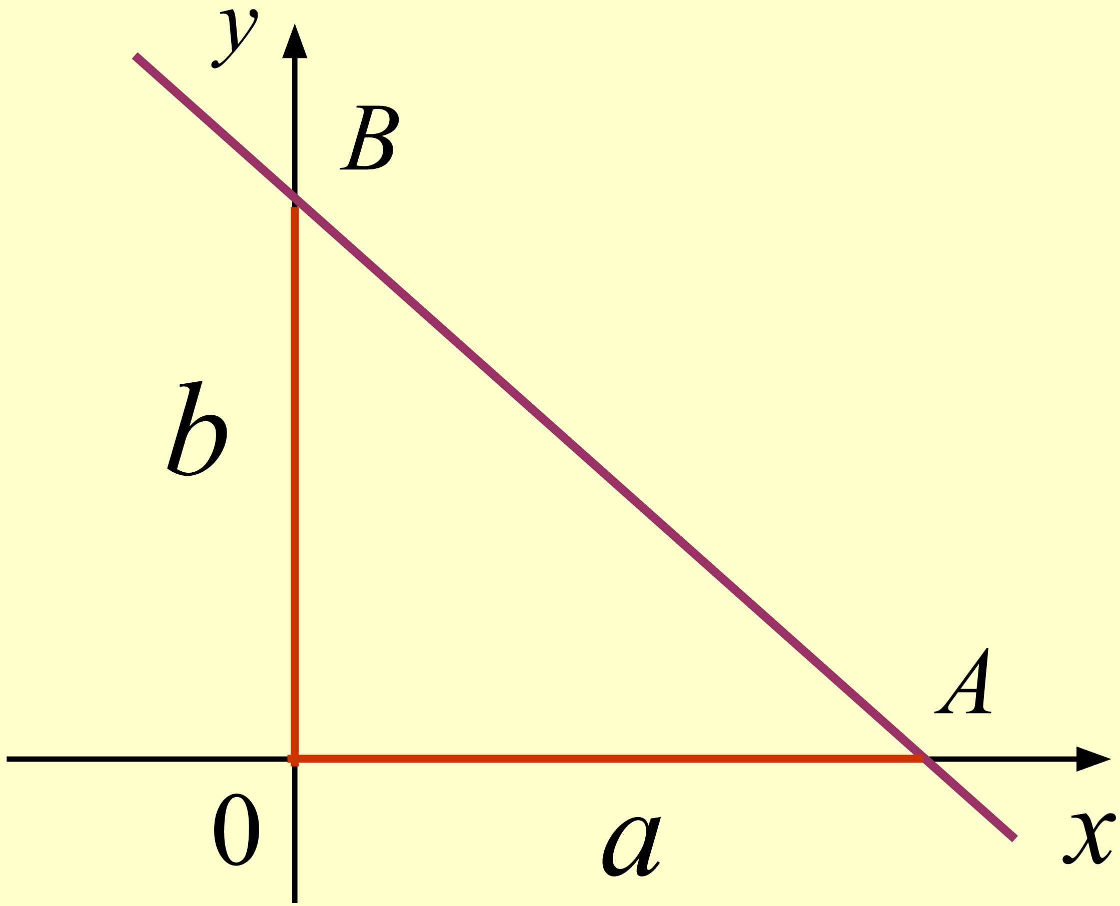
4. Уравнение прямой в отрез

Пусть задана прямая, отсекающая на осях координат отрезки, равные *а* и *в*.

Это значит, что она проходит через точки

$$A(a,0) \qquad B(0,b)$$

Найдем уравнение этой прямой.



y
B
b
A
0
a
x

Подставим координаты точек А и В в уравнение прямой, проходящей через две точки (3):

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \quad (4)$$

Уравнение прямой в отрезках

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(2,-1) если она отсекает от положительной полуоси у отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси х.

РЕШЕНИЕ.

По условию задачи, $b = 2a$

Подставляем в уравнение (4): $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$

Точка *A(2,-1)* лежит на этой прямой, следовательно ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\frac{2}{a} + \frac{-1}{2a} = 1$$

$$\frac{-1+4}{2a} = 1 \qquad a = \frac{3}{2} \qquad \frac{x}{1.5} + \frac{y}{3} = 1$$

5. Общее уравнение пря

Рассмотрим уравнение:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

Рассмотрим частные случаи этого уравнения и покажем, что при любых значениях коэффициентов *A*, *B* (не равных нулю одновременно) и *C*, это уравнение есть уравнение прямой на плоскости.

1

$$\boxed{B \neq 0}$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Обозначим: $-\dfrac{A}{B} = k$ $\qquad -\dfrac{C}{B} = b$

Тогда получаем уравнение (1):

$$y = kx + b$$

2

$$B \neq 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $y = -\frac{A}{B}x$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

3

$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение: $y = -\frac{C}{B}$

- уравнение прямой, параллельной оси *x*.

4

$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C = 0$

Тогда уравнение имеет вид: $y = 0$

- уравнение оси *x*.

5

$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C \neq 0$

Получаем уравнение: $x = -\frac{C}{A}$

- уравнение прямой, параллельной оси *y*.

6

$$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $x = 0$

- уравнение оси *y*.

Таким образом, при любых значениях коэффициентов *A*, *B* (не равных нулю одновременно) и *C*, уравнение (5) есть уравнение прямой на плоскости.

Это

Общее уравнение прям