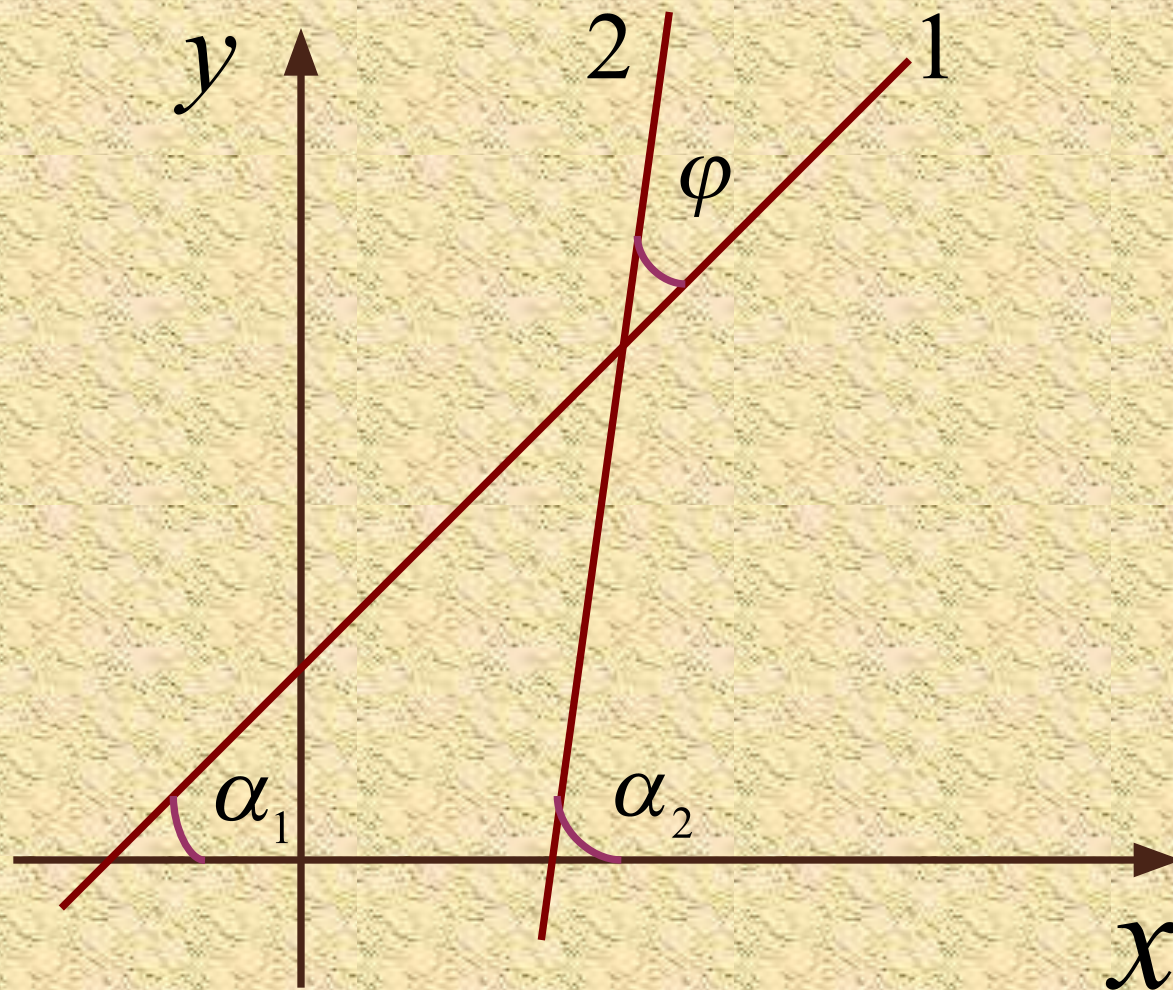


4.2. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Пусть заданы две прямые

$$y = k_1x + b_1 \quad y = k_2x + b_2$$

Выразим угол между этими прямыми через их угловые коэффициенты.



$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

угол между двумя прямыми

Стрелка указывает, что угол отсчитывается против часовой стрелки от прямой 1 к прямой 2.

Если прямые 1 и 2 параллельны, то

$$\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$$

$$k_1 = k_2$$

**необходимое и достаточное условие
параллельности прямых**

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.

Если прямые 1 и 2 перпендикулярны, то

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

**необходимое и достаточное условие
перпендикулярности прямых**

*Две прямые перпендикулярны
тогда и только тогда, когда их
угловые коэффициенты
обратны по величине и
противоположны по знаку.*

Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

условие параллельности

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

**условие
перпендикулярности**

Пусть даны две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Если они не параллельны, то можно найти точку их пересечения.

Т.к. эта точка принадлежит обеим прямым, то ее координаты должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы дает единственную точку пересечения.

ПРИМЕР.

*Составить уравнения прямых,
проходящих через точку $A(2,1)$,
одна из которых параллельна,
а другая перпендикулярна
прямой*

$$3x - 2y + 2 = 0$$

РЕШЕНИЕ:

1. По условию параллельности прямых

$$k_1 = k_2$$

Найдем угловой коэффициент заданной прямой:

$$3x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}$$

Тогда

$$k_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + b$$

Т.к. точка А лежит на искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$1 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2$$

И уравнение искомой прямой будет:

$$y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow 2y - 3x - 4 = 0$$

2. По условию перпендикулярности прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Найдем угловой коэффициент искомой прямой:

$$k_3 = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + b$$

Снова координаты точки А удовлетворяют этому уравнению:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{7}{3}$$

И уравнение искомой прямой будет:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow 3y + 2x - 7 = 0$$

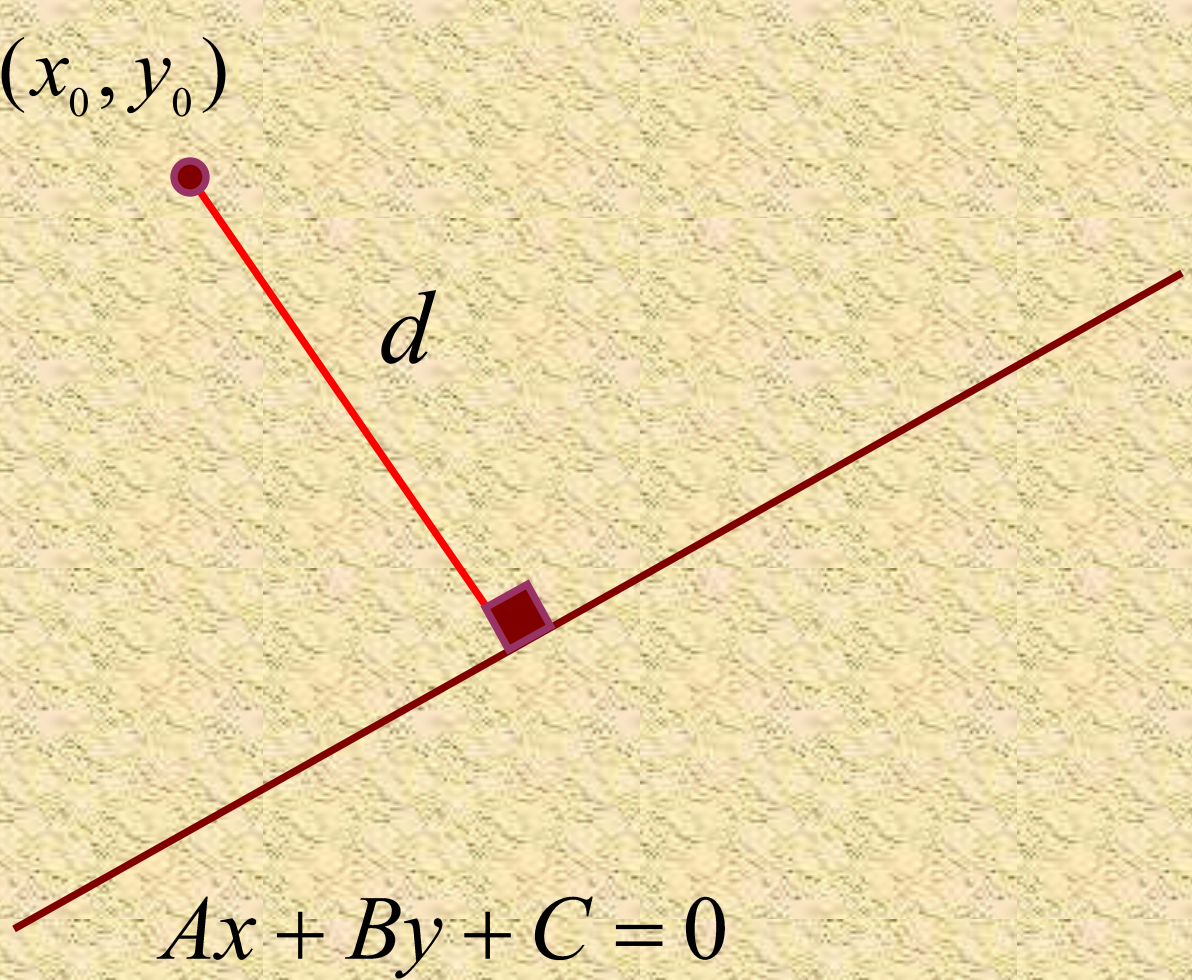
Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$ и прямая

$$Ax + By + C = 0$$

Под расстоянием от точки M до прямой понимается длина перпендикуляра d , опущенного из точки M на данную прямую.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**расстояние от
точки до прямой**



$M(x_0, y_0)$

d

$$Ax + By + C = 0$$

ПРИМЕР.

*Найти расстояние между
параллельными прямыми*

$$3x + 4y - 24 = 0$$

$$3x + 4y + 6 = 0$$

РЕШЕНИЕ:

Возьмем на одной из прямых, например, на первой, произвольную точку $A(0,6)$.

Тогда искомое расстояние это перпендикуляр от точки A до второй прямой :

$$A = 3 \quad B = 4 \quad C = 6$$

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$