

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Читает

Дружинин Виктор Владимирович

Лекции 36 часов

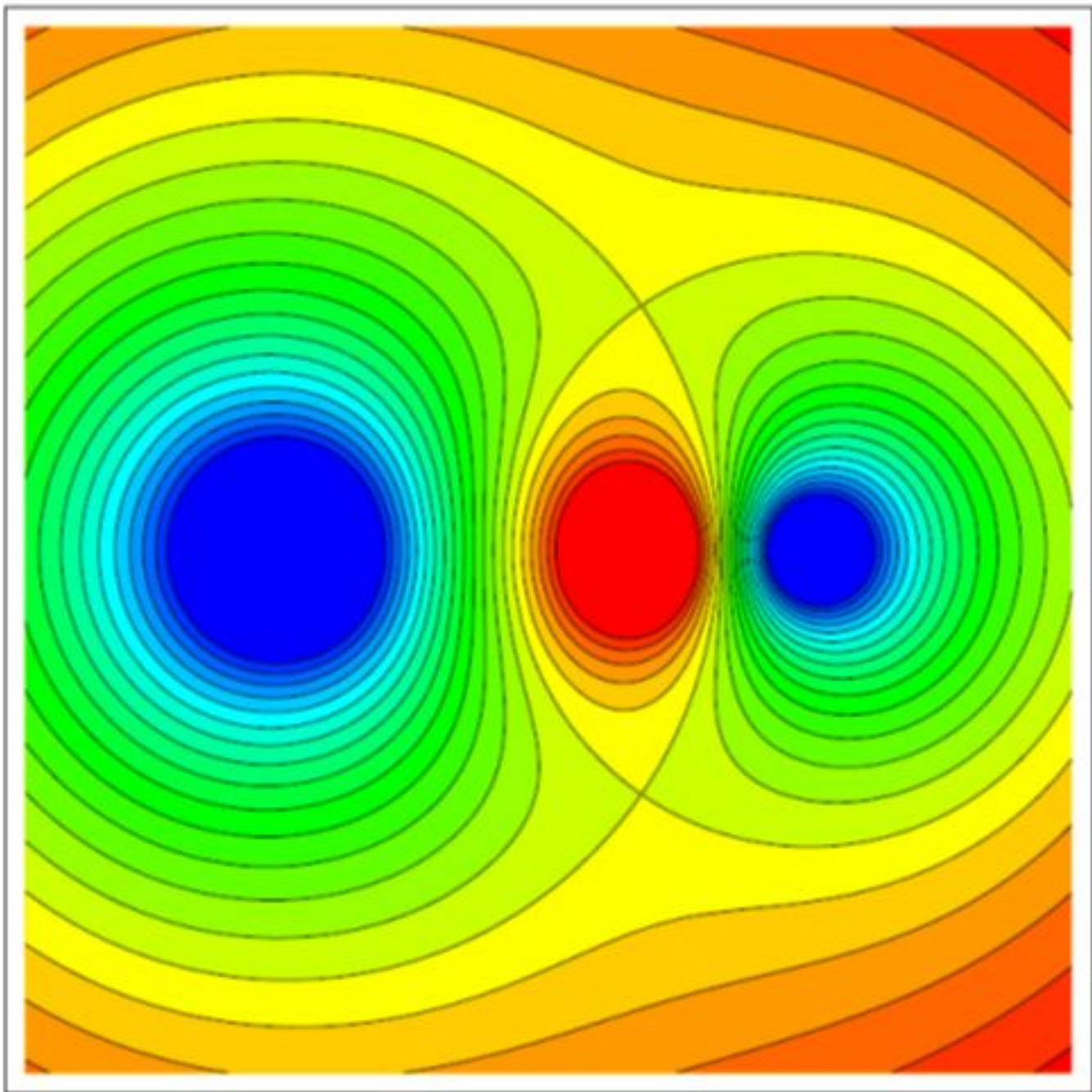
Практика 36 часов

**Контрольная работа, домашнее задание,
Экзамен.**

Литература

- 1. А. Н. Тихонов и А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1972 г. Наука, ГРФМЛ.**
 - 2. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике., М. 1972, Наука, ГРФМЛ.**
- И. Г. Араманович, В.И. Левин. Уравнения математической физики, М., Наука, 1964 г.**

|



Предметом математической физики является разработка методов решения задач, возникающих при изучении явлений внешнего мира. Реальные процессы характеризуются величинами, зависящими, в общем случае, от **координат и времени**. Соотношения между этими величинам, записанные в математических терминах, составляют математическую модель данного процесса. Указанные соотношения являются следствием законов природы и представляют собой **дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные уравнения, а также набор дополнительных условий (граничных, начальных)**, учитывающих специфические свойства системы. Математическая модель лишь приближенно отражает эволюцию системы, так как невозможно учесть все факторы, определяющие ее поведение.

Мы будем решать дифференциальные уравнения в частных производных. В предыдущем третьем семестре мы решали обыкновенные дифференциальные уравнения, когда неизвестная функция зависела только от одной переменной. Например,

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

В этом случае мы составляли характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 = 0$$

Находили его корни $k_1 = k_2 = -1$ и составляли общее решение ДУ

$$y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-x}.$$

Решение есть функция $y(x)$ от одной переменной x .

Если надо найти функцию, зависящую от двух или более переменных $u(x, y, z, t)$, что чаще всего и требу-

ется в повседневной практике, то надо брать уже частные производные и соответствующие уравнения называются **уравнениями в частных производных** или **уравнениями математической физики**. Оба термина эквивалентны.

Приведем несколько УМФ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Найдем его решения. $u(x, y) = 0$. Тривиальное решение.

$u(x, y) = e^{x-y}$. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$u(x, y) = x = y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$u(x, y) = \sin(x - y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Любая функция $u(x, y) = f(x - y)$ является решением этого уравнения.

$$\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Его решение может иметь вид $u(x, y) = e^{xy}$. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$. Уравнение переходит в тождество. Любая функция $u(x, y) = f(xy)$ является решением этого уравнения.

Характерной особенностью УМФ является то, решение может быть много, причем это разные функции. В

обыкновенных ДУ частное решение определялось одной функцией, а размножение шло за счет произвольной константы

В большинстве стандартных курсов по уравнениям математической физики обычно ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В данном курсе помимо линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков мы рассмотрим также нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Гамильтона-Якоби, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега де Вриза (КДВ) и др.

Общим решением называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых общее решение зависит от произвольных постоян-

ных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения m , а количество переменных каждой функции равно $n-1$. Фиксация произвольных функций (возможно и неполная) происходит за счет граничных условий. Уравнение вместе с граничными условиями называется задачей.

Если одна из координат, скажем x_1 , имеет смысл времени t , то уравнение (1.1) называют эволюционным. Для того чтобы найти решение эволюционных уравнений, требуется помимо граничных условий задавать также начальные условия (такую задачу называют задачей Коши).

Приведем несколько примеров уравнений в частных производных.

Пример 1.1 . Простейшее линейное однородное уравнение первого порядка в плоскости (x, y) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ имеет общее решение $u(x, y) = f(y)$, где f произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие $u(0, y) = \sin y$, то функцию $f(y) = \sin y$ легко найти, и мы получим частное решение.

В математической физике важную роль играют линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование многих физических процессов приводит к **линейным уравнениям** второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

Тут $u(x)$ неизвестная функция, коэффициенты, $a_{ij}(x)$ $b_i(x)$ $c(x)$, $f(x)$ заданные дифференцируемые функции. Эти уравнения делятся на три класса: гиперболические, параболические и эллиптические. Классификация происходит следующим образом. Если есть квадратичная форма

$$q = \sum_{i=1}^r a_i \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i \mu_i^2$$

и $s = n$, $r \cdot s \neq 0$ уравнение гиперболическое, $s < n$
уравнение параболическое, $r = n, s = 0$ уравнение эллиптическое. Примеры из аналитической геометрии

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Однородные линейные дифференциальные уравнения в частных производных

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

Почему однородное? Потому что справа стоит ноль, и $u(x, y) = 0$ есть тривиальное решение ДУ.

Почему линейное? Потому что u везде входит в первой степени, коэффициенты не зависят от $u(x, y)$.

Свойства решений таких уравнений. Если $u_1(x, y); u_2(x, y); u_3(x, y); \dots u_n(x, y)$ есть частные линейно независимые решения исходного ДУ, то их линейная комбинация

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) + \dots + C_n u_n(x, y)$$

Также является решением этого уравнения. C_k произвольные константы.

В обыкновенных ДУ имелась в такой задаче только два линейно независимых решения, а тут из сколько хочешь.

Как определить линейную независимость n функций? Жду ответа.

Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических системах координат.

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в трехмерном пространстве виде

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

В двумерном пространстве он записывается в виде

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

В полярной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi$$

Поскольку $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, то $\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ $\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

После ряда таких же манипуляций находим оператор Лапласа в полярной двумерной системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Вывод уравнений колебания струны

Пусть имеется гитарная струна длиной l , концы которой закреплены, а сама струна туго натянута. Если отдельную точку струны оттянуть или ударить по струны, то струна выйдет из положения равновесия и начнет колебаться. При этом она будет издавать гармоничные звуки. Пусть и нас есть двумерная система координат ось Ox и ось Oy . Сама струна натянута вдоль оси Ox , а ее отклонения идут по оси Oy . Обозначим отклонение струны через $u(x, t)$. Если мы знаем эту функцию, то мы в любой точке струны x и в любой момент времени t знаем ее отклонение. Для того, чтобы найти эту функцию, мы должны воспользоваться вторым законом Ньютона, что дает уравнение движения

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

Мы умножили элемент массы dm на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и приравняли это действующей на участок струны силе F .

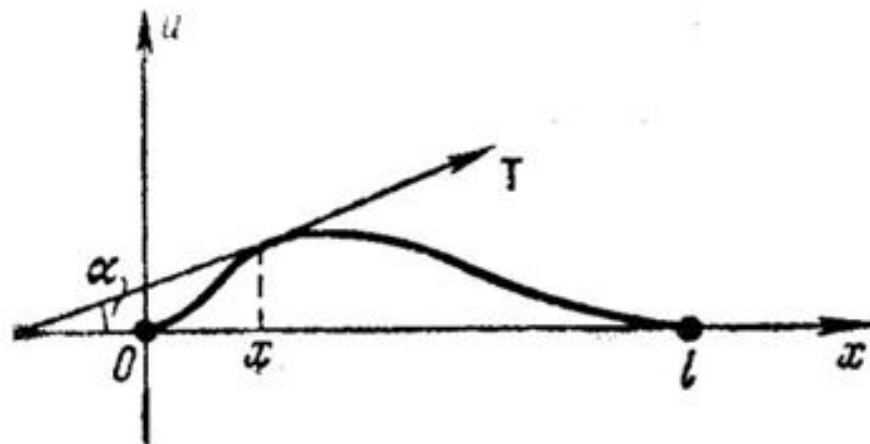


Рис. 1.

Будем изучать только малые колебания струны. Что это значит в математическом выражении, $\sin \alpha \approx \alpha$ согласно ряду Маклорена для функции синуса. Отсюда следу-

ет, что $\cos\alpha = 0, \operatorname{tg}\alpha = \alpha$. Если посмотрим на рис.1, то замечаем, что $(\partial u/\partial x)^2 = \alpha^2 = 0$. Далее попробуем рассчитать длину участка струны M_1M_2 . См рис.2

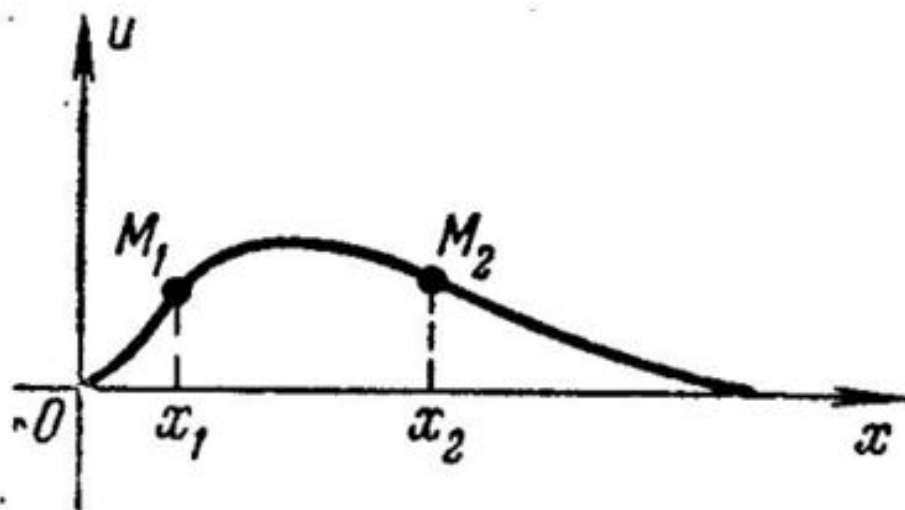


Рис. 2.

Вспомним, как рассчитывается длина кривой линии M_1M_2 . Тут надо брать криволинейный интеграл первого рода

$$l_{M_1M_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2} dx = x_2 - x_1.$$

Что означает это равенство? То, что в нашей модели струна при изгибе не растягивается. Следующим этапом нашего повествования является расчет сил действующих на участок струны M_1M_2 . Введем понятие силы натяжения T , которая действует на концы участка. См. рис.3.

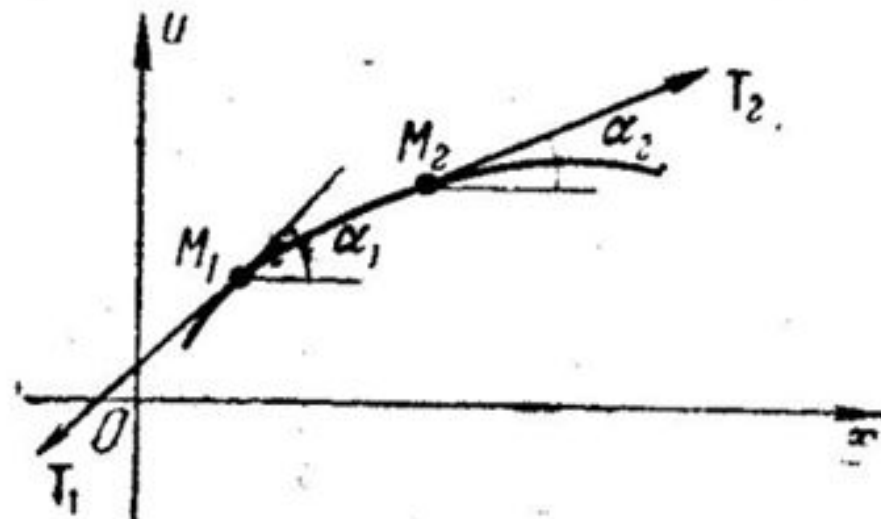


Рис. 3.

Поскольку струна не растягивается, то сумма горизонтальных сил должна быть равна нулю, т.е.

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

Откуда следует, что $T_1 = T_2 = T_0$. Далее на струне выделим малый участок (см. ри

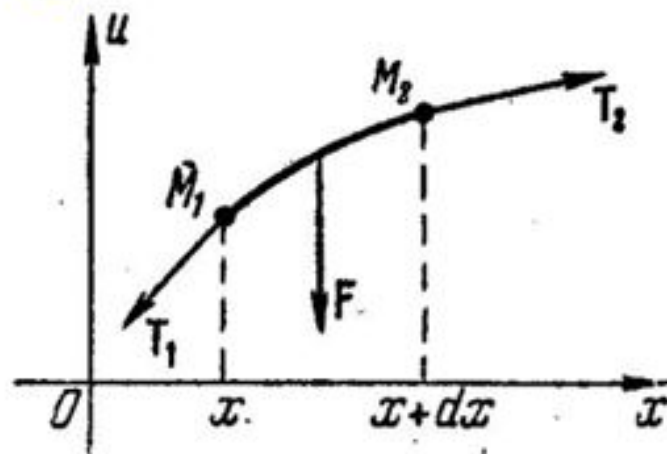


Рис. 4.

И рассчитаем вертикальную силу, т.е. силу, направленную по оси **OU**. Эта сила

$$F = -T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

Так как

$$\sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = u'_x(x + dx, t), \sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = u'_x(x, t),$$

то

$$F = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0 [u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

В результате получаем уравнение параболического типа, которое называется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Найдем размерность a .

Это $\sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{кг/м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Итак, константа a имеет размерность скорости, и это реально есть скорость звука, издаваемого струной.

Наше ухо не воспринимает скорость звука напрямую. Но косвенно воспринимает. Физика дает длина волны $\lambda = aT$, где T – период колебаний, a – скорость звука. С другой стороны, период колебаний T связан с частотой колебаний ν – размерность $(1/\text{с}) = \underline{\text{Гц}}$. Герц указывает число колебаний за одну секунду. Человеческое ухо воспринимает колебания воздуха в интервале от $\nu = 16 \text{ Гц}$ – граница инфразвука, до $\nu = 2 \cdot 10^4 \text{ Гц}$ – граница ультразвука.

Поскольку $a = \lambda/T = \lambda\nu$, то $\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Этой формулой пользуются все музыканты настраивая струну на

нужную частоту. Если берем верхнюю струну на гитаре, которая толще других, и у которой, следовательно, линейная плотность ρ больше, то она дает низкие частоты. Если мы будем натягивать струну, то ее частота возрастает.

ФИЗИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

825

Таблицы 2-47 а и б. Частота колебаний некоторых музыкальных тонов

В таблицах даны выраженные в герцах частоты всех тонов равномерно темперированной гаммы на протяжении семи октав: контроктавы (C_{-1}), большой октавы (C), малой октавы (c), первой, второй, третьей и четвертой октавы (обозначения соответственно c_1, c_2, c_3 и c_4) для двух частот нормального тона la_2 (a_1 в первой октаве c_1): 1) частота la_2 равна 435 гц (табл. 2-47а) и 2) частота la_2 равна 440 гц (табл. 2-47б).

Таблица 2-47а

Тон	Октавы 4						
	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
<i>c</i> (до)	32,33	64,66	129,33	258,65	517,30	1034,6	2069,2
<i>cls</i>	34,25	68,51	137,02	274,03	548,06	1096,1	2192,3
<i>d</i> (ре)	36,29	72,58	145,16	290,32	580,65	1161,3	2322,6
<i>dis</i>	38,45	76,90	153,80	307,59	615,18	1230,4	2460,7
<i>e</i> (ми)	40,74	81,47	162,94	325,88	651,76	1303,5	2607,1
<i>f</i> (фа)	43,16	86,31	172,63	345,26	690,52	1381,0	2762,1
<i>fts</i>	45,72	91,45	182,90	365,79	731,58	1463,2	2926,3
<i>g</i> (соль)	48,44	96,89	193,77	387,54	775,08	1550,2	3100,3
<i>gls</i>	51,32	102,65	205,29	410,58	821,16	1642,3	3284,7
<i>a</i> (ля)	54,37	108,75	217,5	435,01)	870,0	1740,0	3480,0
<i>ais</i>	57,61	115,22	230,43	460,85	921,71	1843,4	3686,9
<i>h</i> (си)	61,03	122,07	244,13	488,27	976,54	1953,1	3906,1

Итак, мы разобрались с буквой a в волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это гиперболическое уравнение широко используется при рассмотрении различных колебаний. Внешних сил нет, поэтому колебания называются свободными.

Мы с вами уже заметили, что решений этого уравнения может быть бесконечное количество, поэтому надо ввести некоторые ограничения. Эти ограничения носят названия: начальные и граничные условия.

Что такое начальные условия? Они указывают на состояние струны перед началом колебаний. Обозначим это время через $t = 0$. При этом, так как тут входит вторая производная по времени, надо учитывать и положения точек струны в этот момент

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x),$$

и начальные скорости точек струны

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x).$$

Тут $f(x)$ и $F(x)$ заданные функции.

Но это не все. Надо еще знать граничные условия. Они показывают, что происходит на концах струны во все время колебаний. Вначале рассмотрим самый простейший случай: струна с закрепленными концами. Математически эти условия запишутся так

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &\equiv u(0, t) = 0, \\ u|_{x=l} &\equiv u(l, t) = 0. \end{aligned}$$

На самом деле могут быть и другие граничные условия.

Переходим к решению этого уравнения в частных производных. Тут применяется метод Фурье - метод разделения переменных. Будем искать неизвестную функцию $u(x, t)$ в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

каждая из которых зависит только от x и от t . Если мы сейчас возьмем вторые производные от этой функции, то получим следующий результат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.$$

Если мы сейчас подставим эту функцию в исходное уравнение, то получим следующий результат

$$X \cdot T'' = a^2 X'' \cdot T$$

Деля обе части равенства на $X(x)T(t)$ получаем такое уравнение

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Поскольку левая часть этого уравнения зависит только от t , а правая часть зависит только от x , то это возмож-

но, если обе части этого равенства равны некоторой константе, т.е.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = c.$$

Эту константу мы пока не знаем, но будем определять. Итак имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X''(x) - cX(x) = 0; \quad T'' - ca^2T(t) = 0$$

К какому классу относятся эти уравнения? Это ДУ второго порядка, линейные, однородные, с постоянными коэффициентами. Они решаются через характеристическое уравнение.

$$k^2 - c = 0.$$

Пусть c действительная величина и она равна $c = \beta^2$. Тогда $k = \pm\beta$ и общее решение первого уравнения записывается в виде

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}.$$

Для того, чтобы найти константы C_1 и C_2 , используем граничные условия

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Они дают такую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\beta l} + C_2 e^{-\beta l} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\beta l} & e^{-\beta l} \end{vmatrix} = e^{-\beta l} - e^{\beta l} \neq 0,$$

Поэтому решение этой такое $C_1 = C_2 = 0$. Это означает, что никаких колебаний нет. Но на практике они есть.

Если взять $c = 0$, то $X(x) = C_1 + xC_2$. Тогда граничные условия дают

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 l = 0 \end{cases}$$

Опять получаем $C_1 = C_2 = 0$. Этот вариант снова не подходит. Остается последний случай $c = -\beta^2$. Характеристическое уравнение приобретает вид

$$k^2 + \beta^2 = 0$$

И корни являются комплексными числами

$$k_1 = i\beta; k_2 = -i\beta.$$

$$X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x).$$

Снова подставляем граничные условия. Левое дает

$$X(0) = C_1 \cos(\beta 0) + C_2 \sin(\beta 0) = 0.$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$ и

$$X(x) = C_2 \sin(\beta x).$$

Правое граничное условие дает

$$X(l) = C_2 \sin(\beta l) = 0.$$

Когда это может быть? Когда $\beta l = k\pi, k = \pm 1; \pm 2; \dots \pm 3; \dots$

Нулем k не может быть, так как это требует $\alpha = 0$, а этот вариант мы уже отвергли. Итак, $\beta = \frac{k\pi}{l}$ и

$$X_k(x) = C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Мы получили бесчисленное множество решений координатной части функции $u_k(x, t) = X_k(x)T(t)$.

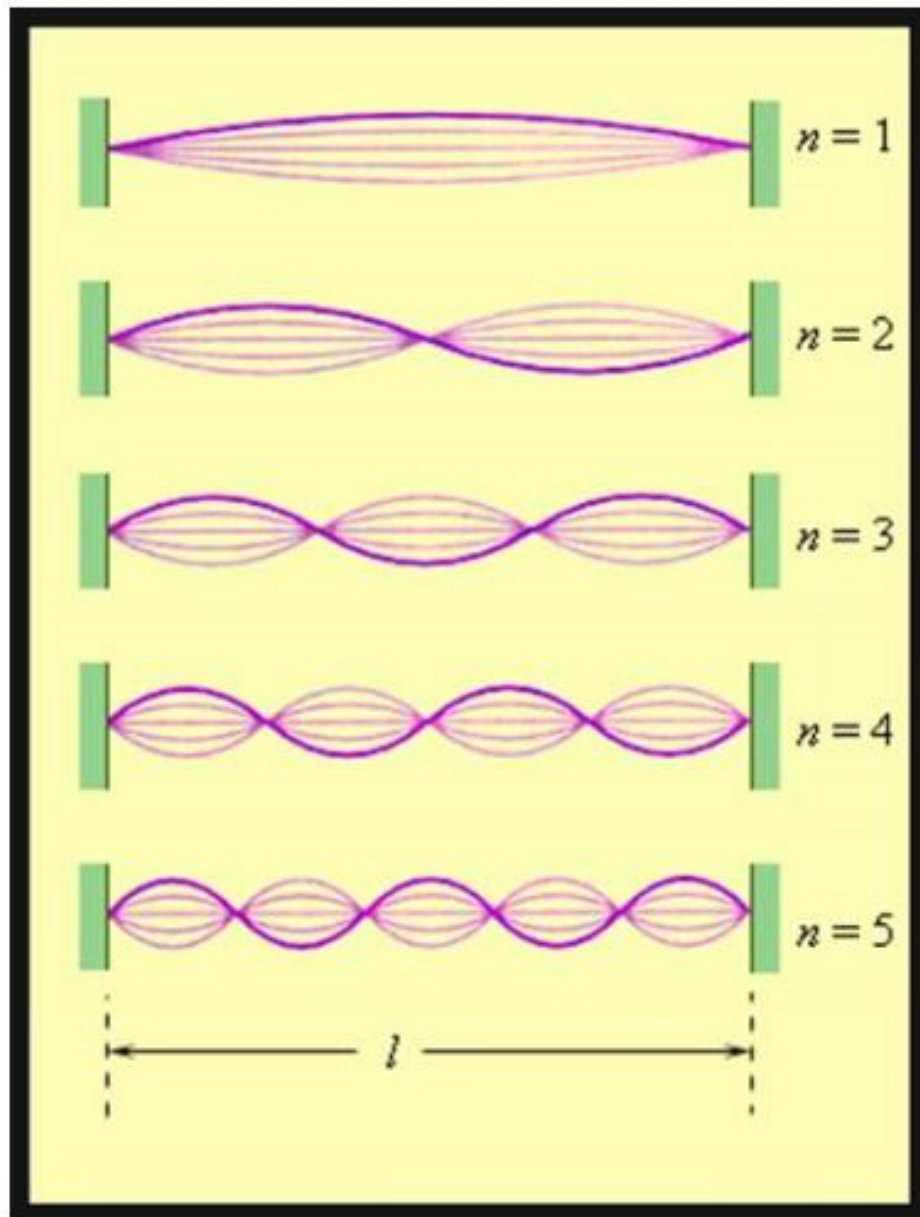
При $k = 1$ получаем $X_1(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

При $k = 2$ получаем $X_1(x) = C_1 \sin\left(2 \frac{\pi x}{l}\right)$

При $k = 3$ получаем $X_1(x) = C_1 \sin\left(3 \frac{\pi x}{l}\right)$

При $k = 4$ получаем $X_1(x) = C_1 \sin\left(4 \frac{\pi x}{l}\right)$

Струна может изгибаться только так



После этого результата обратимся ко второму обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = -\beta^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$
$$T'' + a^2 \cdot \beta^2 \cdot T = 0.$$

$$T_k(t) = B_k \cos\left(k \frac{\pi a t}{l}\right) + D_k \sin\left(k \frac{\pi a t}{l}\right).$$

Тут B_k и D_k произвольные постоянные.

После этого мы можем записать частное решение волнового уравнения колебаний закрепленной струны

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t)$$
$$= \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(a_k \cos\left(k \frac{\pi a t}{l}\right) + b_k \sin\left(k \frac{\pi a t}{l}\right) \right)$$

Это есть собственные колебания струны. Обозначим $k \frac{\pi a}{l} = \omega_k$. Найдем размерность $\omega_k \rightarrow \frac{M}{CM} = \frac{1}{C}$. Размерность круговой частоты. Есть просто частота колебаний

$\nu = \frac{1}{T}$ и есть круговая частота $\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$.

$$u_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)).$$

Общее решение колебаний струны с закрепленными концами есть сумма этих частных решений

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)). \end{aligned}$$

Мы получили бесконечную сумму функций, т.е. функциональный ряд. Надо найти, входящие в него коэффициенты a_k и b_k . Для этого нам понадобятся начальные условия, т.е. начальный изгиб струны и начальные скорости точек струны. Ранее мы их задали. Начнем с изгиба струны.

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x),$$
$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k \cos(\omega_k 0) + b_k \sin(\omega_k 0)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k) = f(x).$$

Для синусов существует такой интеграл ортогональности

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx =$$
$$= \frac{l}{2n\pi} \int_0^l \left[1 - \cos^2\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right] d\frac{n\pi x}{l} = \frac{ln\pi}{2n\pi} = \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0, m \neq n$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \delta_{m,n} \frac{l}{2}$$

Вот этим последним соотношением мы и будем пользоваться, для нахождения коэффициентов a_k и b_k . Рассмотрим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k) = f(x).$$

Умножим его на $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ и проинтегрируем по всей струне

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k) \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \\ = \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) f(x) dx. \end{aligned}$$

Что мы видим в левой части этого равенства? Буква m фиксирована, а буква k пробегает все возможные значения. В силу ортогональности не равно нулю только одно слагаемое в этой сумме, а именно, когда $m = k$. Отсюда находим конкретное выражение для

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) f(x) dx$$

Далее будем считать, что скорости точек струны перед началом колебаний покоятся, по другому, мы не ударяем по струне.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x) = 0.$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)).$$

$$u'_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (-a_k \omega_k \sin(\omega_k t) + b_k \omega_k \cos(\omega_k t)).$$

Подставим в эту формулу $t = 0$ и получим

$$u'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (b_k \omega_k) = 0.$$

Поскольку ряд бесконечный, единственное решение

$$b_k = 0.$$

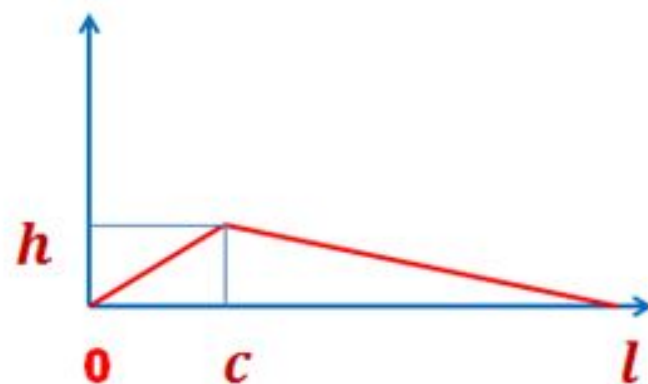
Итак, если мы немного исказили положение струны, но не ударяли по ней, и отпустили, струна начинает колебаться по закону

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) a_k \cos(\omega_k t),$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) f(x) dx ,$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \leq x \leq l, \end{cases}$$



После этих приготовлений начинаем рассчитывать колебания струны

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^c \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \left(\frac{hx}{c}\right) dx + \\ + \frac{2}{l} \int_c^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \left(\frac{h(l-x)}{l-c}\right) dx.$$

Такие интегралы берутся по частям. Не будем приводить громоздкие промежуточные расчеты, сразу дадим конечную формулу

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Что дает эта формула? Она дает амплитуды колебательных мод струны, т.е. состав и интенсивности обертонов. Оказывается тембр струны, т.е. красота звучания струны зависит от точки c .

Рассмотри два варианта: $c = l/2$ и $c = l/3$. Если мы отгибаем струну посередине, то

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l} = \frac{8h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

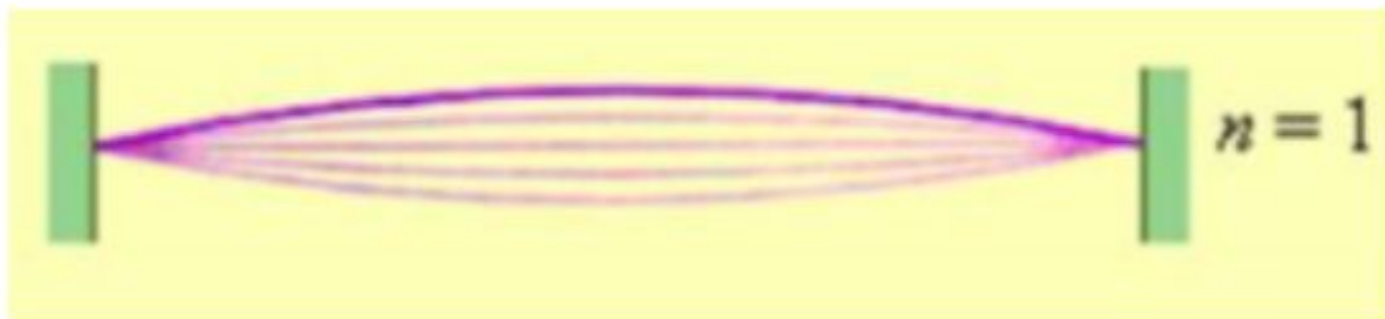


Какие же моды не равны нулю? При $k = 1$ имеем

$$a_1 = \frac{8h}{\pi^2} \quad k \frac{\pi a}{l} = \omega_k \quad \frac{\pi a}{l} = \omega_1$$

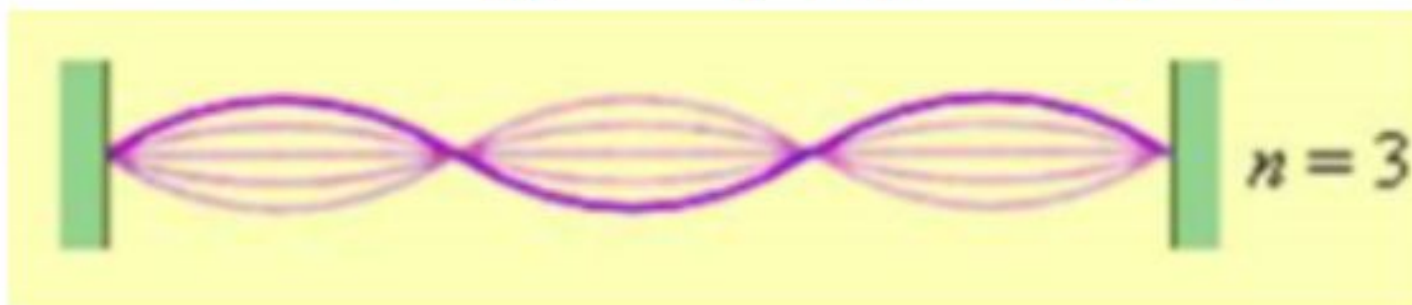
$$u_1(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi a}{l} t \right)$$

Это основной тон струны



При $k = 2$ имеем отсутствие колебаний. При $k = 3$ имеем

$$u_3(x, t) = \frac{8h}{9\pi^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{3\pi a}{l} t\right)$$

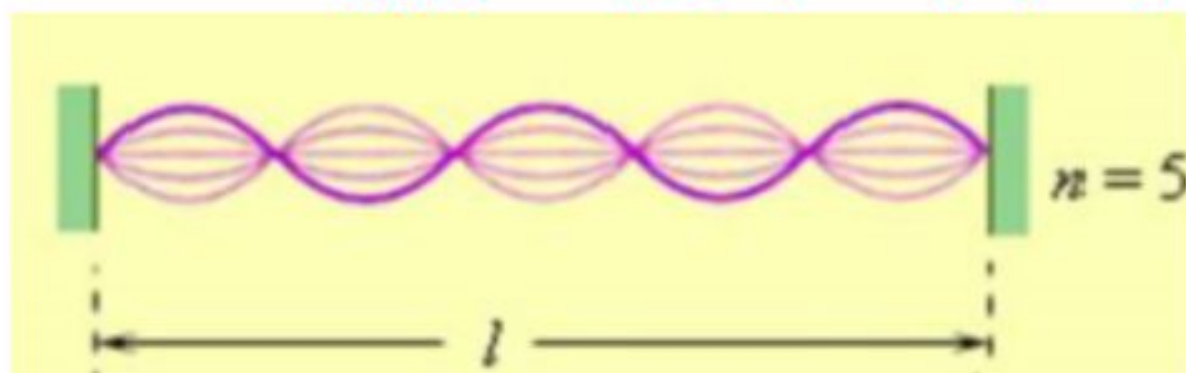


Это первый обертона колеблющейся струны. Амплитуда в девять раз меньше основного тона. А, так как энергия

колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, звук от этой моды будет в «81» раз слабее основного тона, и частота колебаний будет в три раза больше, т.е. это более высокий звук.

При $k = 4$ имеем отсутствие колебаний. При $k = 5$ имеем

$$u_3(x, t) = \frac{8h}{25\pi^2} \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{5\pi a}{l} t\right)$$



Это второй обертон колеблющейся струны. Амплитуда в 25 раз меньше основного тона. А, так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, звук от этой моды будет в «625» раз слабее основного тона, и частота колебаний будет в три раза больше, т.е. это более высокий звук.

Таким образом, при центральном отклонении струны, окраска мелодии слаба, работает фактически один обертон, с утроенной частотой и звуком в сто раз слабее.

Следующий пример связан с отклонение струны при
 $c = l/3$.

Какие же моды не равны нулю? При $k = 1$ имеем

$$a_1 = \frac{9h}{\pi^2} \quad k \frac{\pi a}{l} = \omega_k \quad \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \omega_1$$

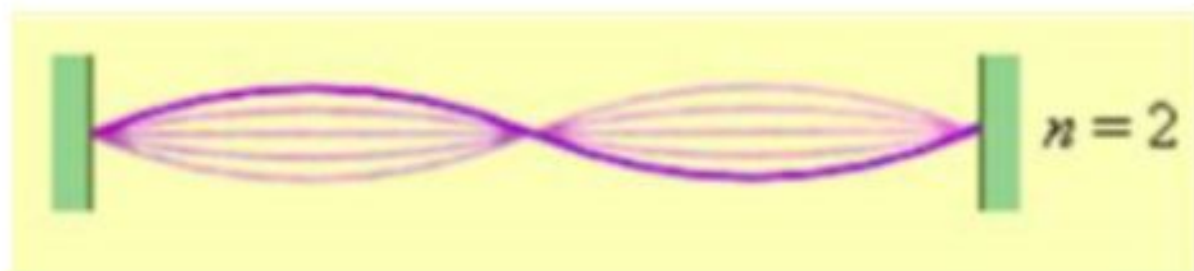
$$u_1(x, t) = \frac{9h}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{l} t\right)$$

Это основной тон струны. Частота та же, изгиб струны тот же, одна полуволна.

При $k = 2$ есть колебания.

$$u_2(x, t) = \frac{9h}{4\pi^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi a}{l} t\right).$$

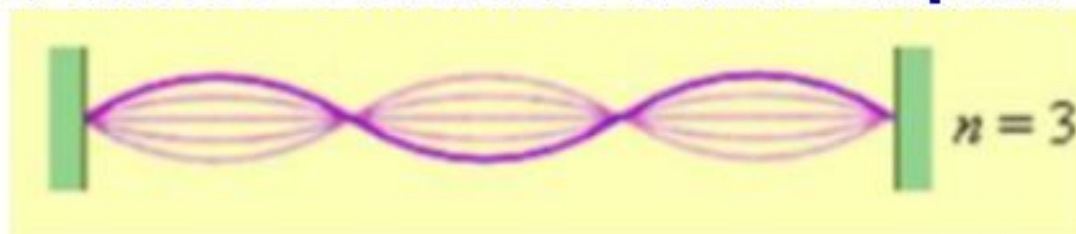
Это первый обертон. Тут две полуволны, частота звука больше в два раза основного звука, По интенсивности этот обертон слабее основного тона в 16 раз.



При $k = 3$ есть колебания.

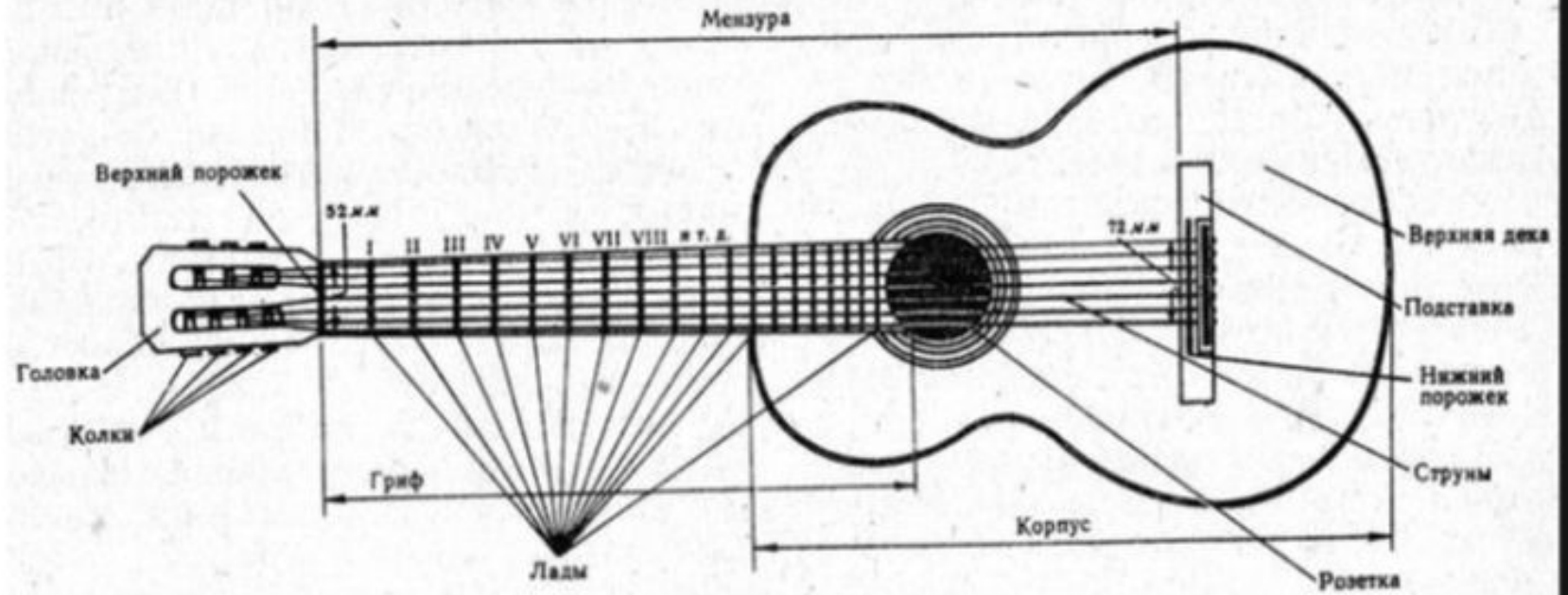
$$u_2(x, t) = \frac{9h}{9\pi^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{3\pi a}{l} t\right).$$

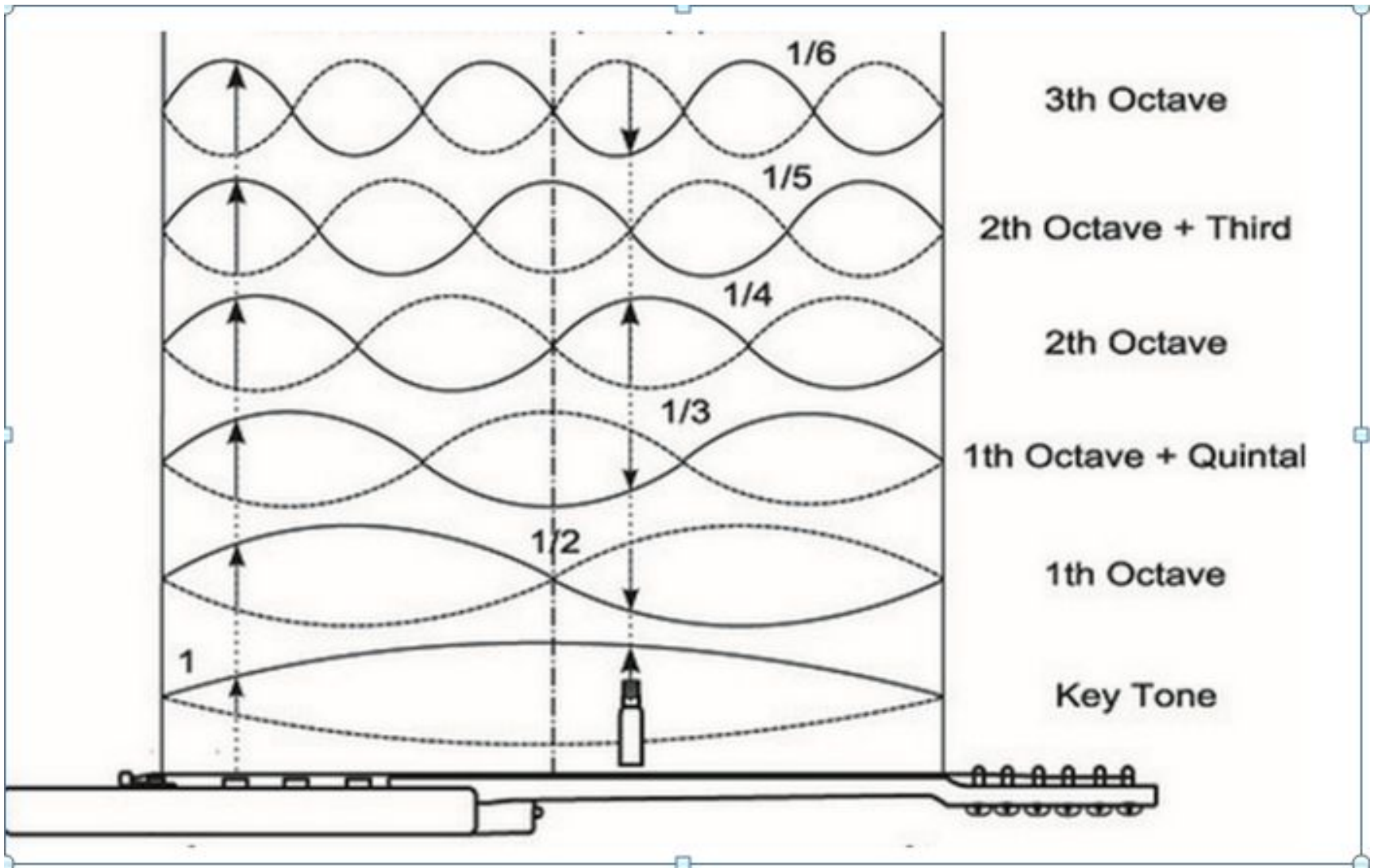
Это второй обертон. Тут три полуволны, частота звука больше в три раза основного звука, По интенсивности этот обертон слабее основного тона в 81 раз.



Итак, мы рассчитали, что звук струны значительно красивее, если ее отгибать на расстоянии $c = l/3$ от закрепленного конца струны. Это заложено в устройстве гитары. Мы видим, на этом расстоянии расположено круговой отверстие в резонатор.

Большая гитара (мензура 650 мм)





Но и это еще не всё, — неосновные частоты струн гитары накладываются друг на друга и получаются и другие частоты. Подробная спектрограмма колебаний гитарной струны на самом деле очень сложная, и имеет множество небольших всплесков частот, не кратных основной.

Гармоники постепенно затухают по амплитуде по мере продвижения вверх по частоте. Но характер затухания этих частот у разных типов струн разный. Это и лежит в основе различимой на слух тембральной окраски различных комплектов струн.

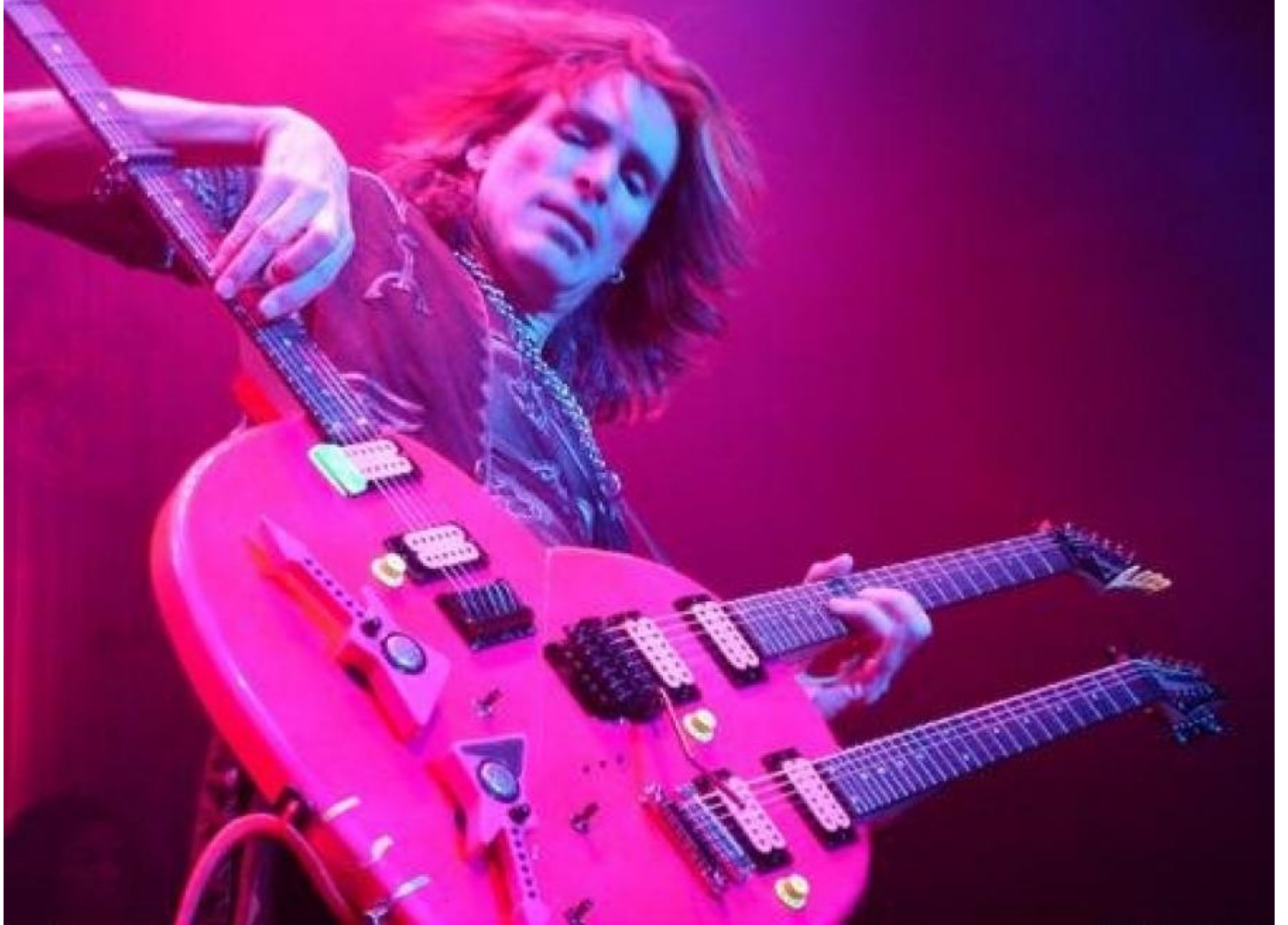
При желании всё можно самостоятельно увидеть на экране обычного ноутбука, используя практически любой аудио-редактор.











Далее рассмотрим другой способ игры на закрепленной струне, а именно, возбуждении колебаний ударом. В пианино и фортепиано это делается на участке струны (α, β) ударом плоским жестким молоточком. Сама струна при этом не искажена, т.е. $f(x) = 0$. А вот другая функция из начальных условий выглядит так

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \alpha \\ v_0, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \beta < x \leq l \end{cases}$$



$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)).$$

Снова рассмотри эту функцию с точки зрения начального условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(-a_k \omega_k \sin(\omega_k t) + b_k \omega_k \cos(\omega_k t)\right).$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) (b_k \omega_k).$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \frac{2v_0}{k\pi a} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \frac{2lv_0}{k^2\pi^2 a} \left(\cos\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) - \cos\left(\frac{k\pi\beta}{l}\right) \right). \end{aligned}$$

Тут также возникает основной тон, когда имеется только одна полуволна, и обертоны - две, три и более стоячих полуволн. Мы их рассчитывать не будем, так как вычисления громоздкие, а качественно все результаты те же.

Реально колебания струны также состоят из наложения бесконечного количества стоячих волн с разными частотами и амплитудами

$$u(x, t) = \frac{2lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\cos\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) - \cos\left(\frac{k\pi\beta}{l}\right) \right)}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(\sin(\omega_k t)\right).$$

На практических занятиях мы рассматривали колебание такой струны, ели молоточек ударял по первой половине струны от $x = 0$ до $x = l/2$. Сейчас рассмотрим случай, когда молоточек имеет длину струны, т.е. вся струна от $x = 0$ до $x = l$ приобретает скорость v_0 , но при этом не изгибается. Посмотрим, какие обертоны тут возникают. Так как $\cos\left(\frac{k\pi 0}{l}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{k\pi l}{l}\right) = (-1)^k$, то нам надо брать $k = 2n + 1$ нечетное, чтобы в числителе получился не ноль. В результате формула колебаний имеет вид

$$u(x, t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right) \left(\sin(\omega_{(2n+1)} t)\right).$$

Начнем с $n = 0$.

$$u_0(x, t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \left(\sin(\omega_1 t)\right).$$

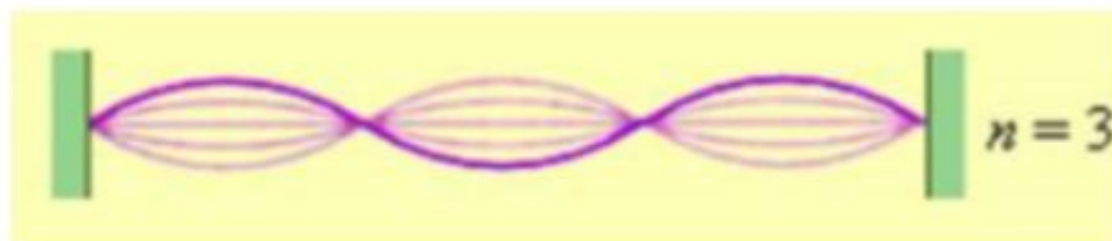
Это основное колебание струны.



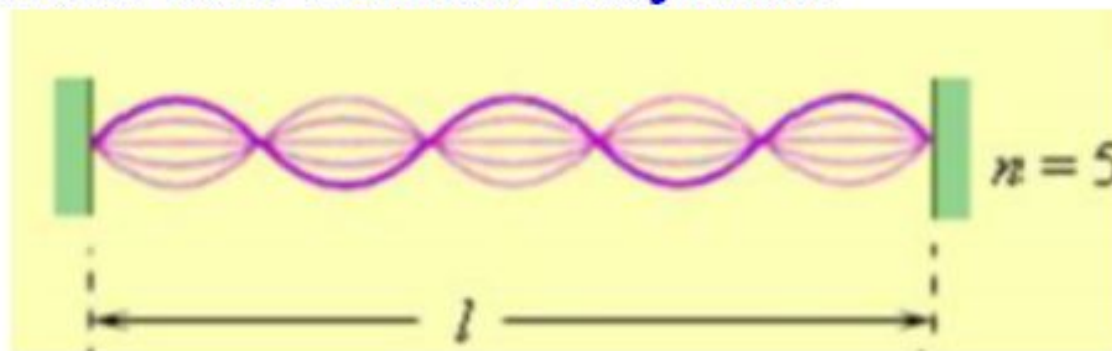
Далее возьмем $n = 1$. Эта мода имеет частоту ω_3 , т.е. в три раза большую, чем основной тон и

$$u_1(x, t) = \frac{4lv_0}{9\pi^2 a} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \left(\sin(\omega_1 t)\right)$$

Мы видим, что интенсивность этой моды почти в сто раз меньше основного звука, и на струне укладываются три половолны.



Следующая по счету мода с $n = 2$ имеет интенсивность примерно в **625** меньше, чем основной тон, и на струне укладываются пять стоячих половолн.



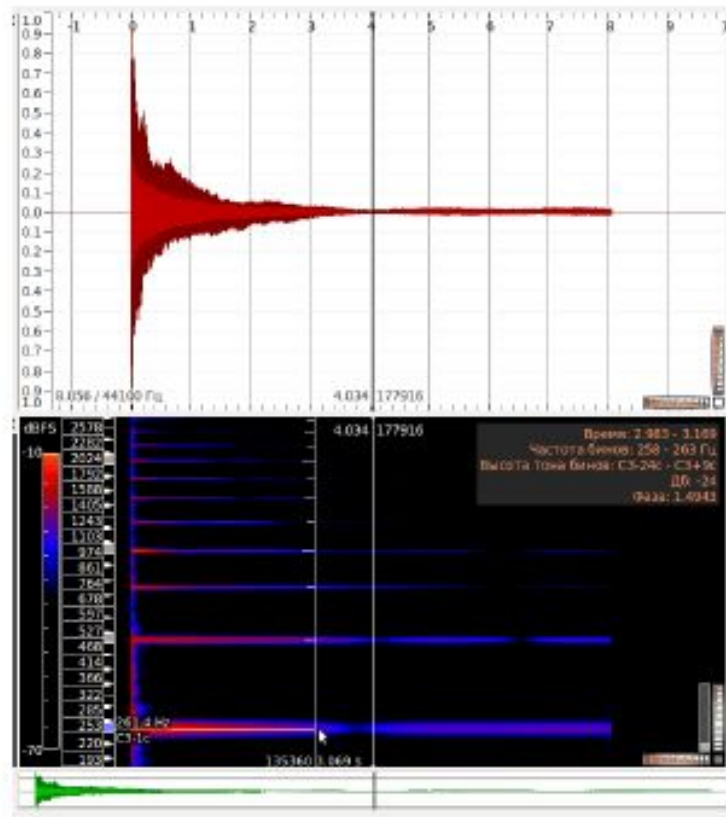


Рис. 1.9: Волновая функция и спектрограмма звука, издаваемого при нажатии клавиши До на рояле YAMAHA C7.

Nocturne No. 1 in Eb Minor
Op. 33, No. 1

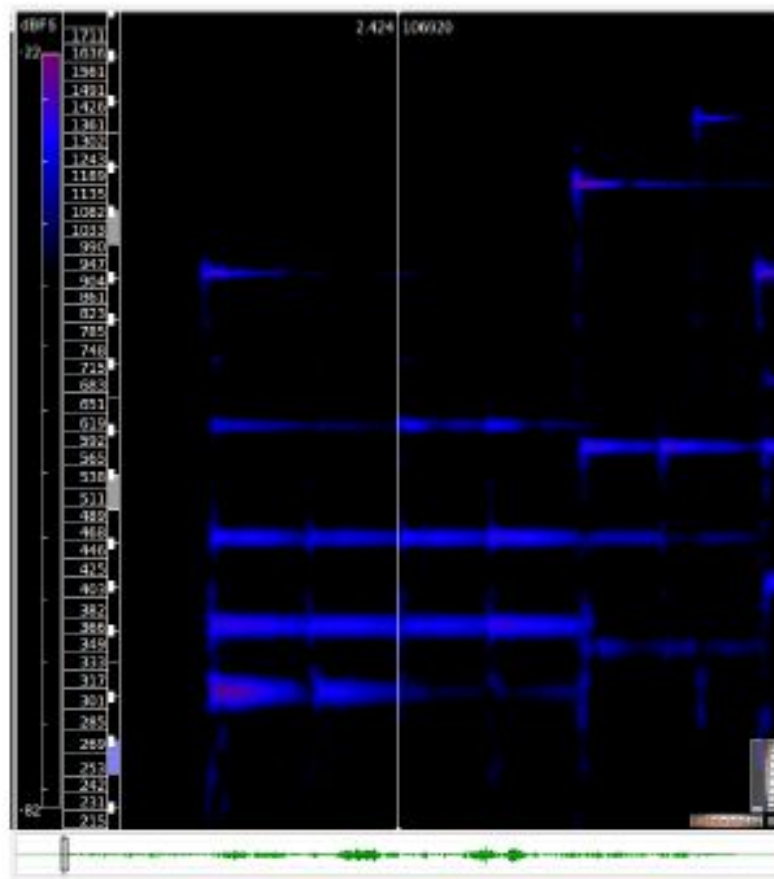


Рис. 1.10: Спектрограмма первого такта ноктюрна № 1 Г. Форе.

Колебания бесконечной струны

Эта задача не является какой-то немислимой абстракцией, но находит вполне реальные аналоги в реальной жизни. Если закрепленная с обоих концов струна очень длинная, то искажение ее состояния в середине струны будут достаточно долго распространяться до концов. Примером такого колебания является подводное землетрясение в океане.

С точки зрения математики это выразится в исчезновении граничных условий, хотя начальные условия останутся. Записываем задачу так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

С начальным изгибом струны

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x),$$

и начальными скоростями точек струны

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x).$$

Тут $f(x)$ и $F(x)$ заданные функции на всей числовой оси. Задача только с начальными условиями называется задачей Коши. Решил эту задачу впервые Даламбер. Другое название метода решения этого уравнения - метод бегущих волн.

Общее решение этого уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at = \zeta) + \omega(x + at = \zeta),$$

где $\omega(\zeta), \varphi(\zeta)$ любые дважды дифференцируемые функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta}; & \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -a \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta}; & \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial \zeta^2} \end{aligned}$$

Подстановка этих производных в исходное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дает тождество

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial \zeta^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\zeta)}{\partial \zeta^2}$$

Таким образом, главную роль в решении играет не сама функция, а ее аргумент, который зависит от x и от t .
Наша задача, исходя из начальных условий, найти эти неизвестные функции $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$. Взяв $t = 0$ равное нулю, составим систему уравнений

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \omega(x) &= f(x) \\ -a\varphi'(x) + a\omega'(x) &= F(x)\end{aligned}$$

Интегрируем последнее равенство от 0 до x . Получаем такое уравнение

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\omega(x) - \omega(0)] = \int_0^x F(x) dx.$$

Или

$$C = -\varphi(0) + \omega(0).$$

$$-[\varphi(x)] + [\omega(x)] = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx. + C,$$

Вспомним первое начальное условие

$$\varphi(x) + \omega(x) = f(x)$$

Из этих двух уравнений, складывая их вычитая, получаем вид неизвестных функций.

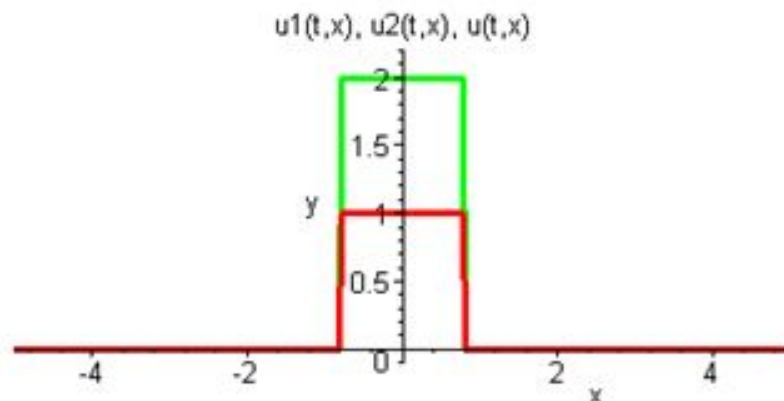
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x)dx - \frac{C}{2}.$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x)dx - \frac{C}{2}.$$

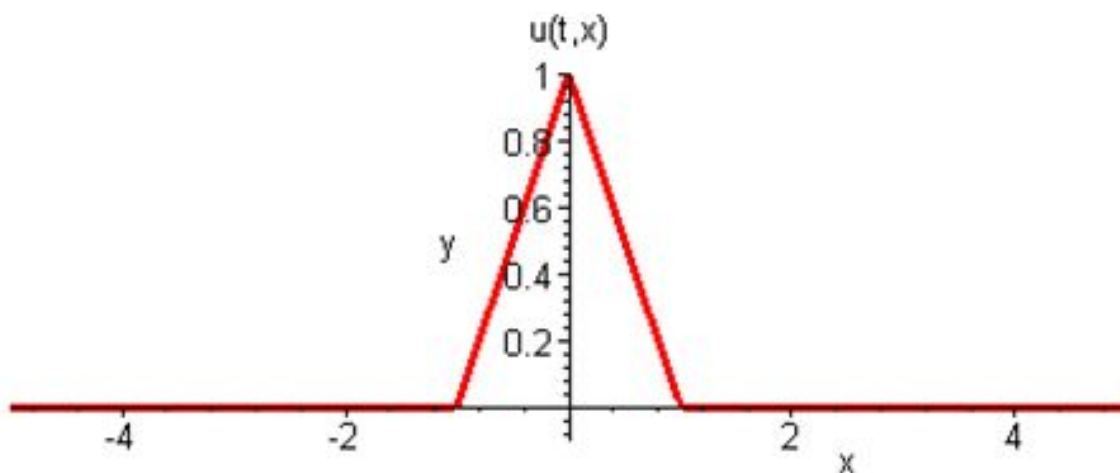
Пусть в начальных условиях $F(x) = 0$ и фактически остается только одно начальное условие

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x).$$

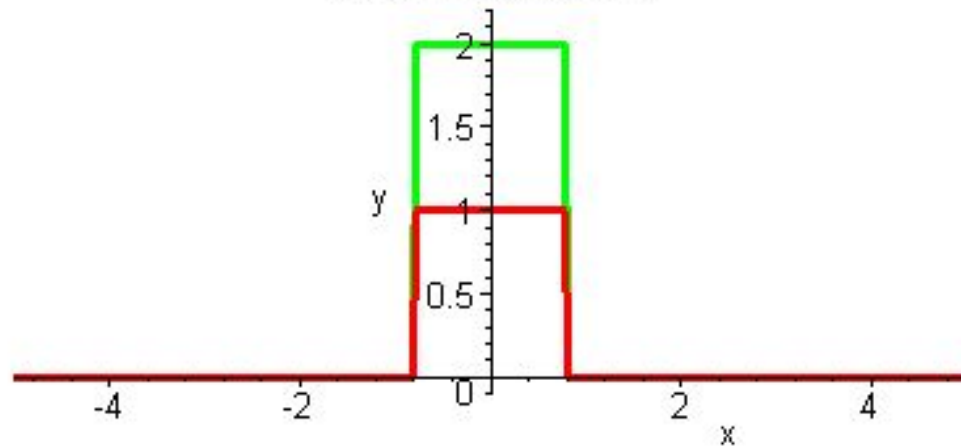
Реально это выглядит так. Мы создали в какой-то точке струны искажение ее формы и решили посмотреть, что же будет дальше?



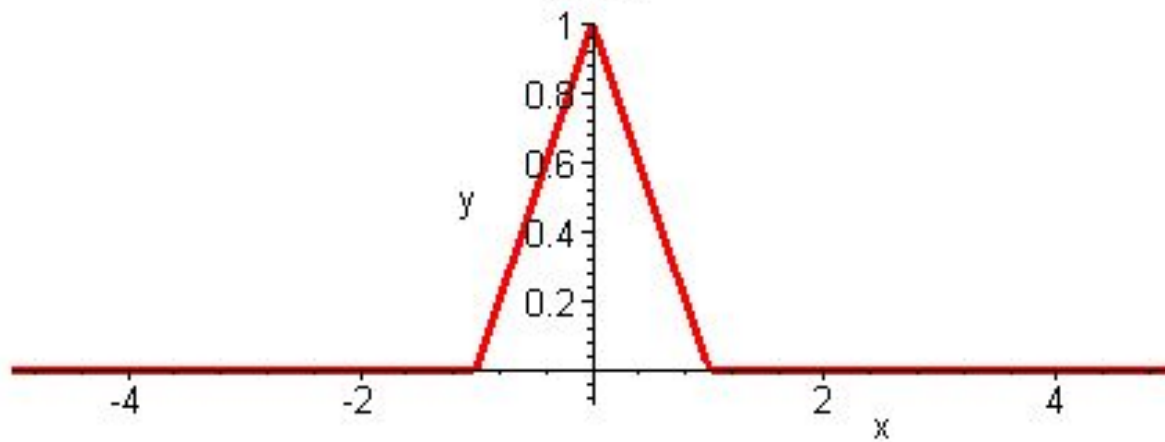
Так как $u(x, t) = \varphi(x, t) + \omega(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2}$, то мы получаем такой факт. Начальное возмущение делится пополам и обе половинки разбегаются в разные стороны со скоростью a . Откуда это получилось? Считая аргумент $x - at$ константой и дифференцируя его по t , находим скорость $v_+ = a$, а скорость $v_- = -a$.

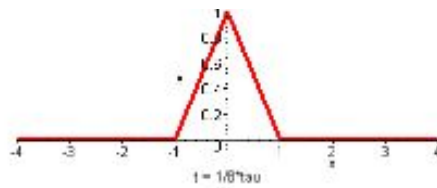


$u_1(t,x), u_2(t,x), u(t,x)$

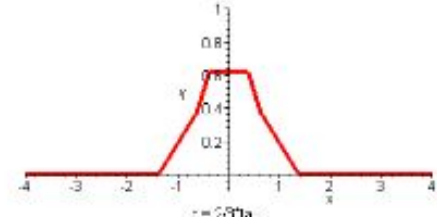


$u(t,x)$

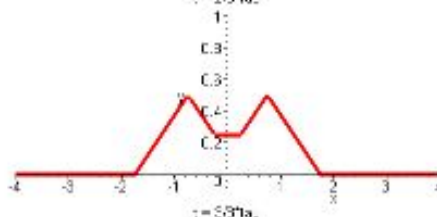




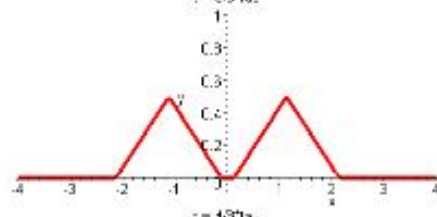
$t = 1.0\tau$



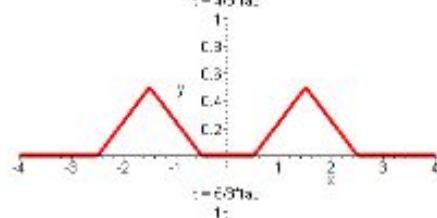
$t = 2.0\tau$



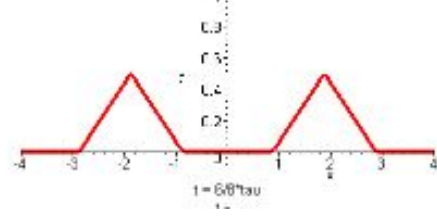
$t = 3.0\tau$



$t = 4.0\tau$



$t = 5.0\tau$



$t = 6.0\tau$

Что происходит с начальным возмущением? Оно геометрически делится пополам и разбегается в обе стороны с одной и той же скоростью.

Что называется волной? Волной называется процесс передвижения отклонения струны.

Рассмотрим следующий вариант. Струна бесконечная, нет никаких отклонений, но по ней ударили молоточком. Точки струны на интервале (α, β) получили некоторую скорость v . Ясно, что струна будет как-то отклоняться, и ее возмущение побежит вдоль волны. Такие волны называются **волнами импульса**. Математика этих волн следующая.

Начальное отклонение $f(x) = 0$. Второе начальное условие имеет вид



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha = -l \\ v_0, & -l < x < l \\ 0, & \beta = l < x \end{cases}$$

$$\varphi(x - at) = -\frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x) dx.$$

$$\omega(x + at) = +\frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x) dx.$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x) + \omega(x) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx = \Phi(x + at) - \Phi(x - at) \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad -l < x < l$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{2a}, \quad x > l$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 dx = -\frac{v_0 l}{2a}, \quad x < -l$$

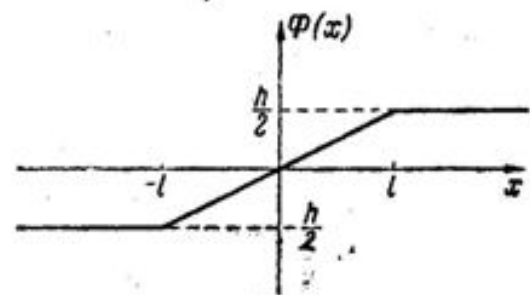


Рис. 10.

Мы видим, что функция $\Phi(x)$ непрерывная и нечетная. Поскольку у нас заменяется x на $x + at$ и $x - at$, то будут две волны разбегающиеся в разные стороны.

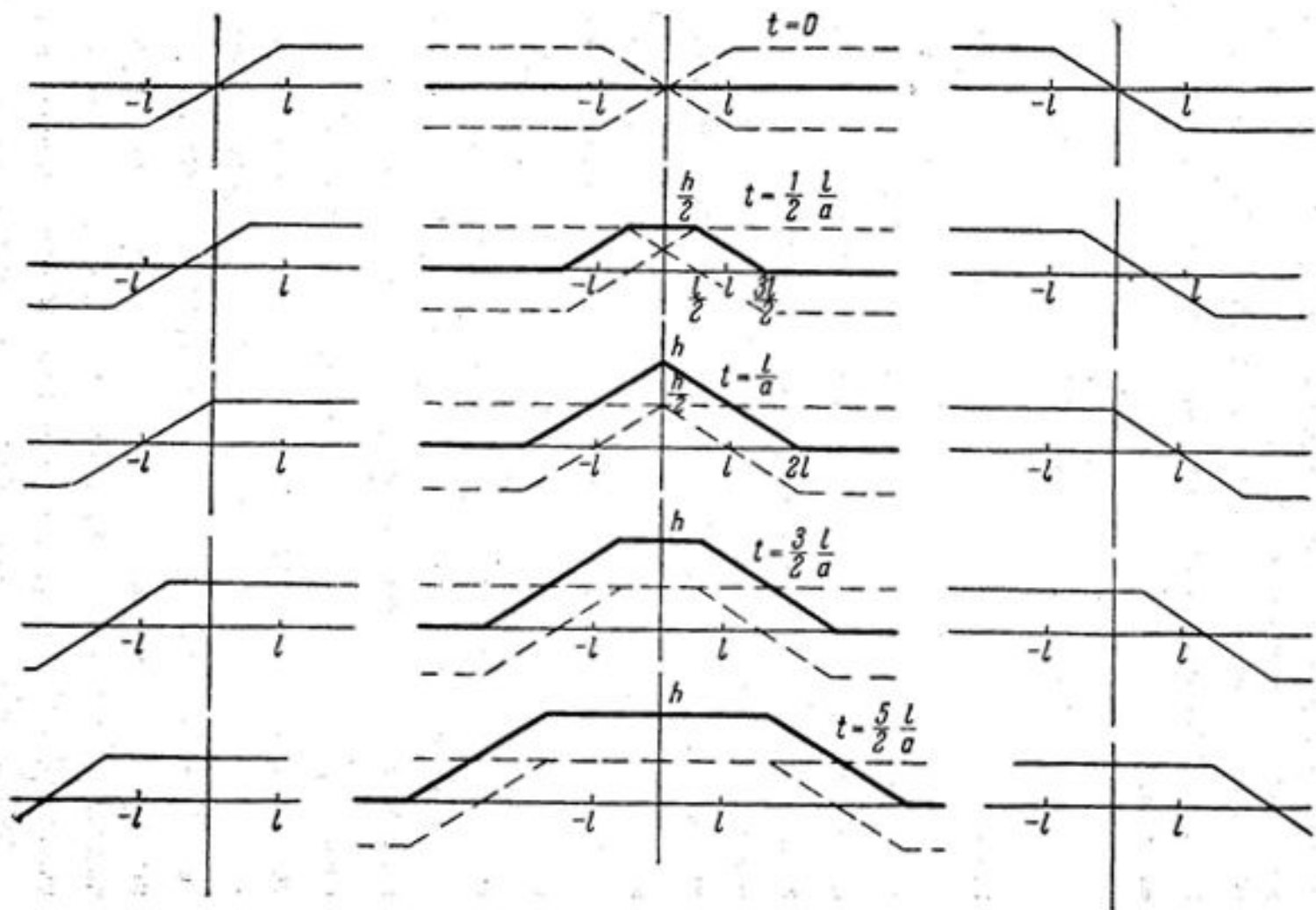


Рис. 11.

Объясним суть рисунка. В левом столбце дано движение обратной волны- справа налево, а в крайнем правом столбце дано движение прямой волны – слева направо. В среднем столбце дано их сложение, т.е. показано результирующее искажение струны и движение волны импульса. Видно, что в центре волны возникает выступ, похожий на греб, который со временем раздвигается и занимает все большие и большие участки струны.

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Рассмотрим случай полу-бесконечной струны, когда один конец закреплен, в начале координат при $x = 0$, а второй конец простирается на $+\infty$. В этом случае волновое уравнение то же самое

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

А начальные условия таковы

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x).$$

но возникает одно граничное условие

$$u|_{x=0} \equiv u(0, t) = 0,$$

Из верхней строки возникает условие $f(0) = 0$.

Если мы где-то вдали от закрепленного конца исказили форму струны, то этот изгиб делится пополам и два искажения бегут вправо и влево.



Интересно, что будет, когда левая булька добежит до места закрепления, куда она денется? Тут возникает вопрос об отражении волн. Результат может быть получен из формулы Даламбера следующим образом. Формаль-

но доопределим функции $f(x)$ и $F(x)$, которые заданы вначале на положительной полуоси и на отрицательную ось. Решение Даламбера с точки $x = 0$ имеет вид

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx$$

$$u(0, t) = \frac{f(-at) + f(+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} F(x) dx$$

Чтобы $u(0, t)$ равнялось нулю при всех значениях $t = 0$, необходимо функции $f(x)$ и $F(x)$ выбрать так, чтобы при $x < 0$ выполнялось условие $f(-x) = -f(x)$ и $F(-x) = -F(x)$, т.е. эти функции должны нечетным образом продолжены на отрицательную полуось.

При этом $f(-at) + f(+at) = 0$.

Далее реально выясним, что же происходит с волной отклонения.

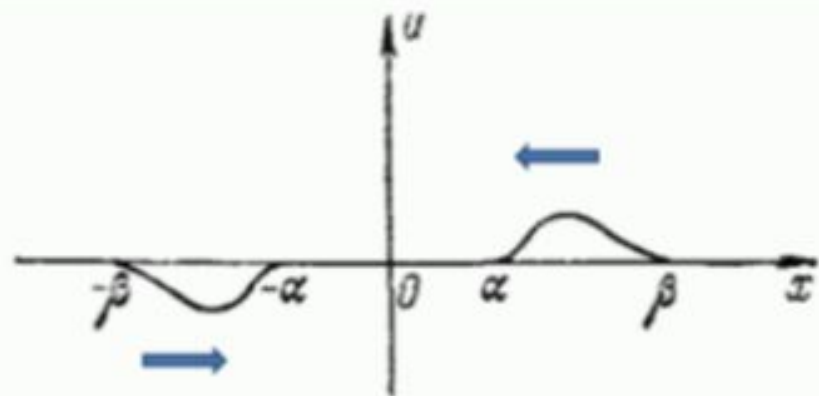
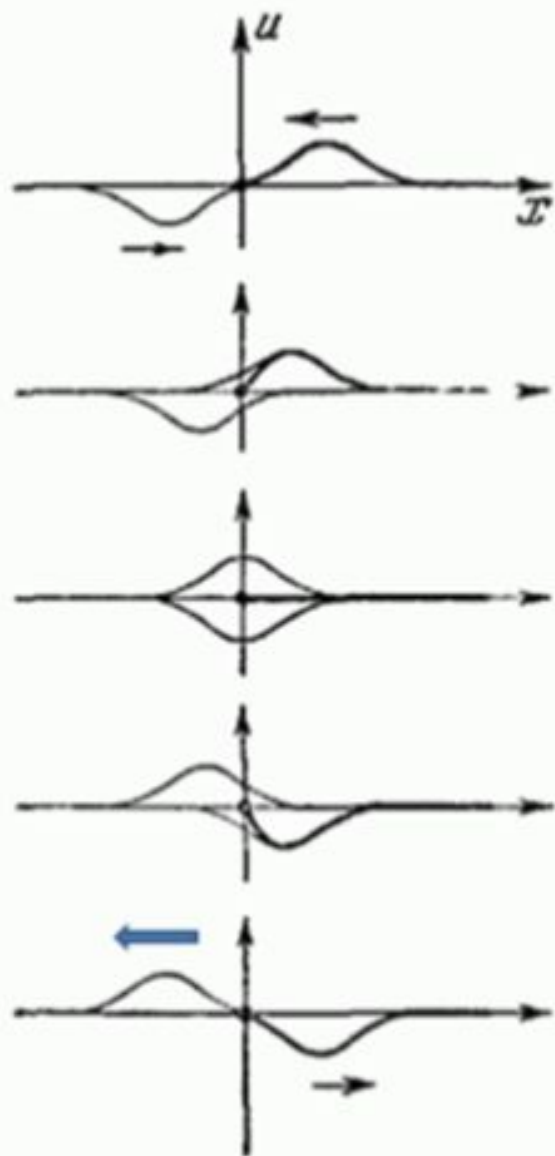


Рис. 13.

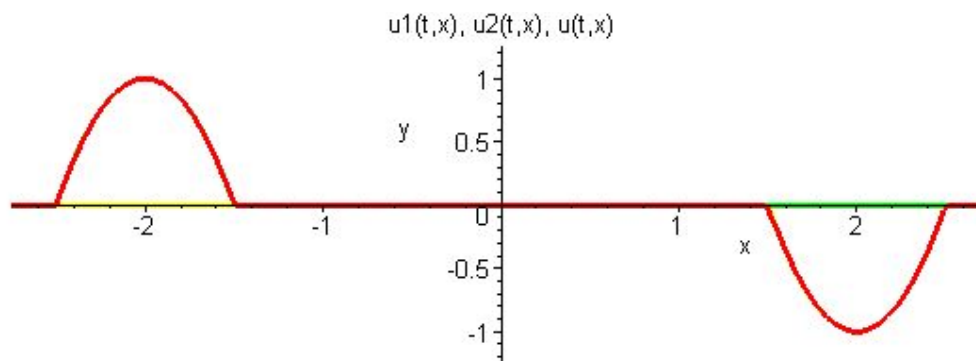
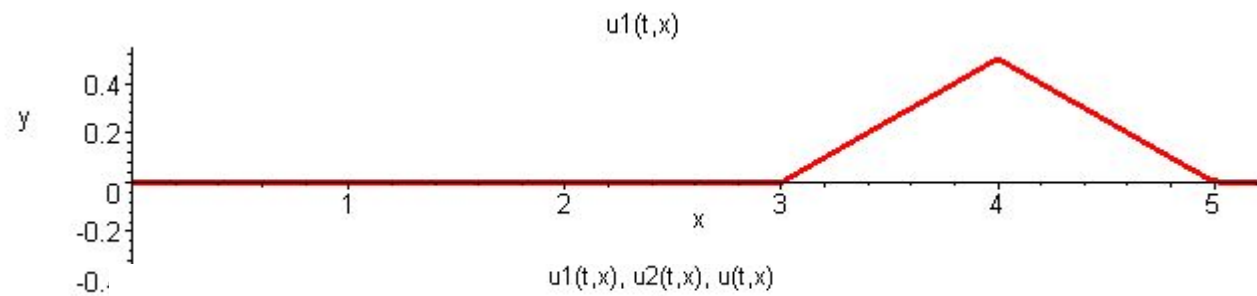
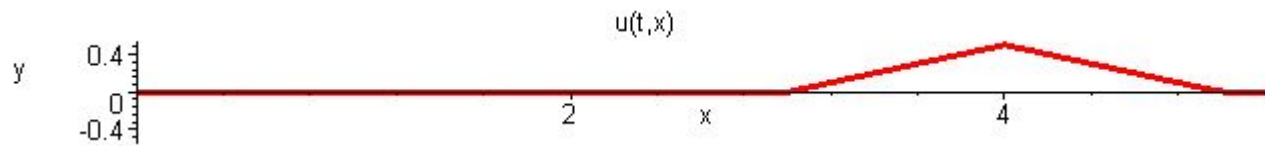
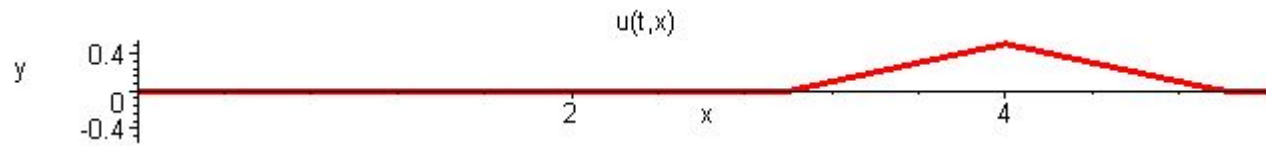


Рис. 15

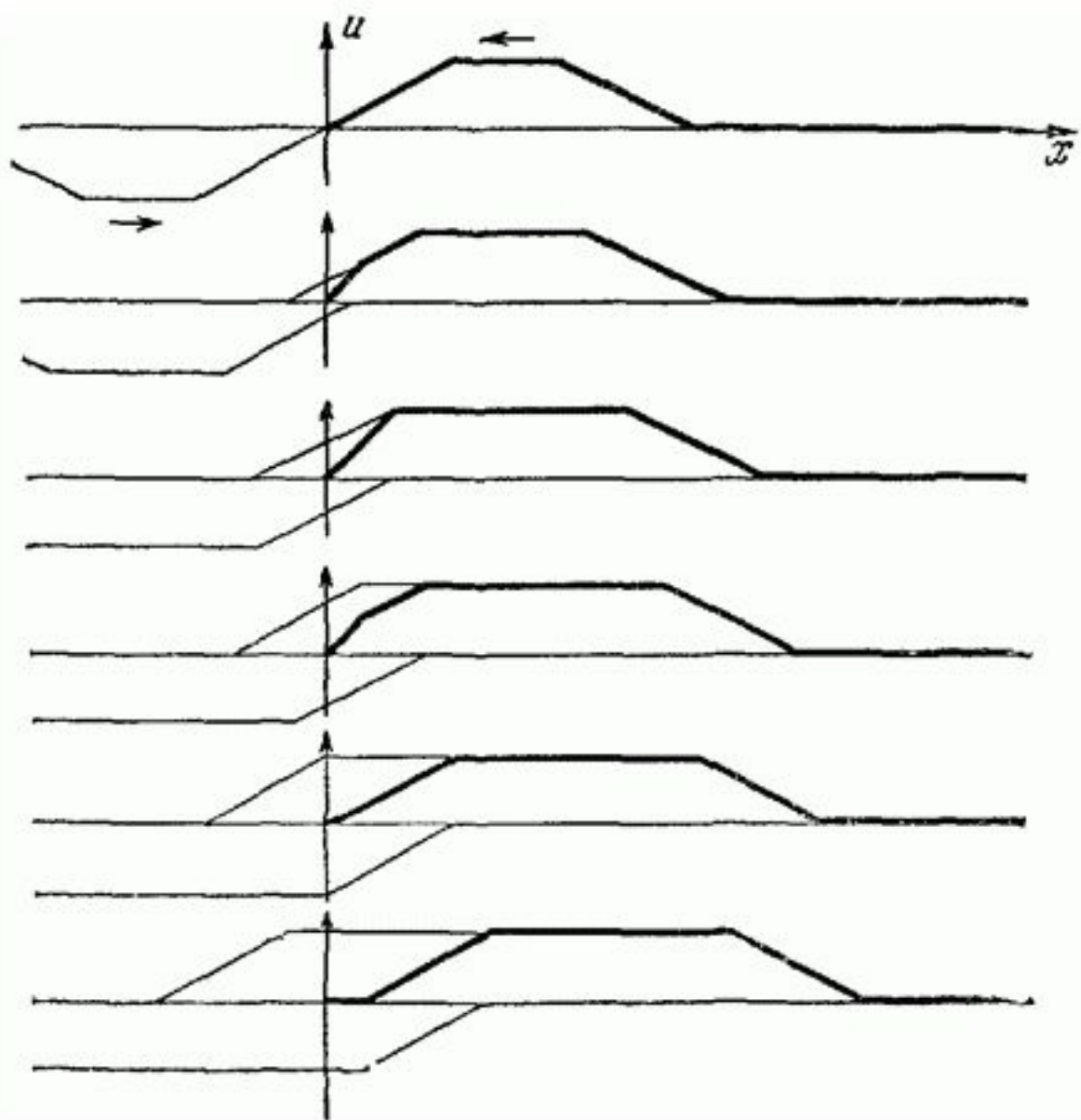
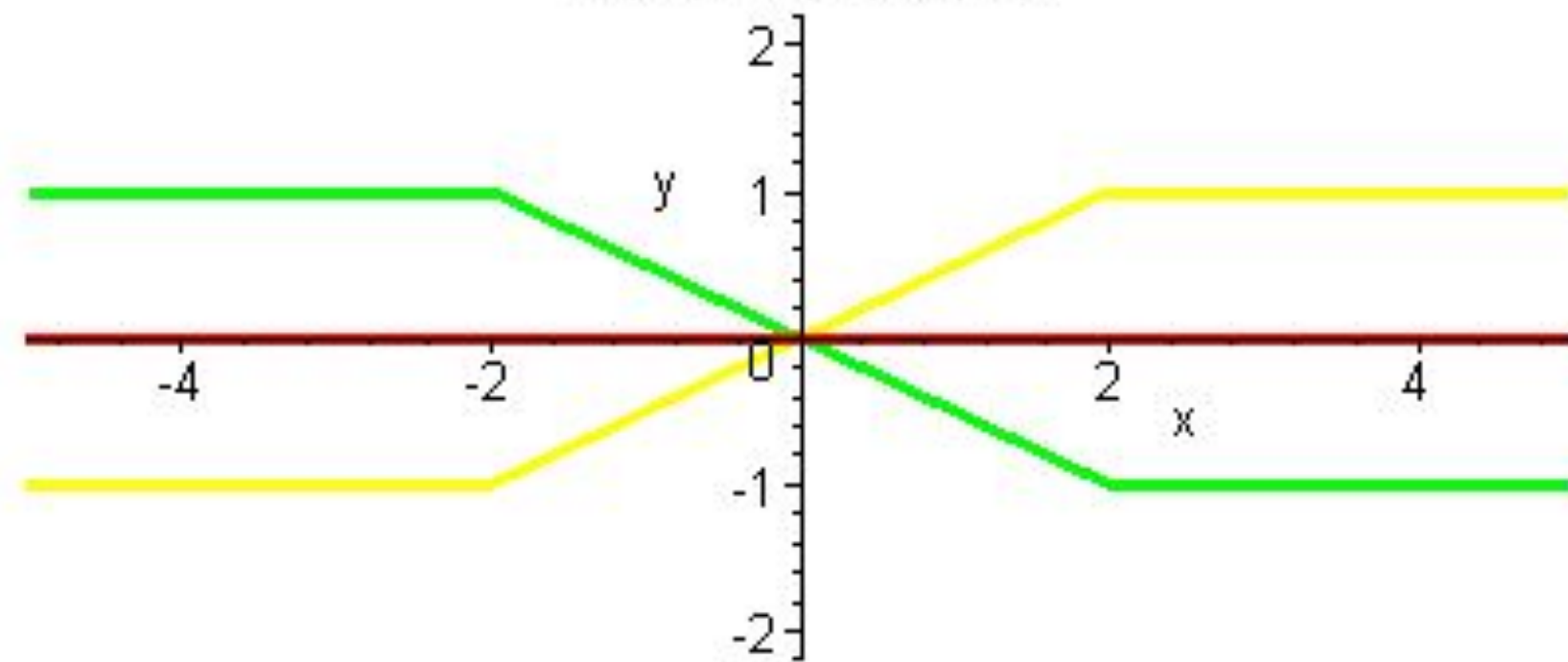
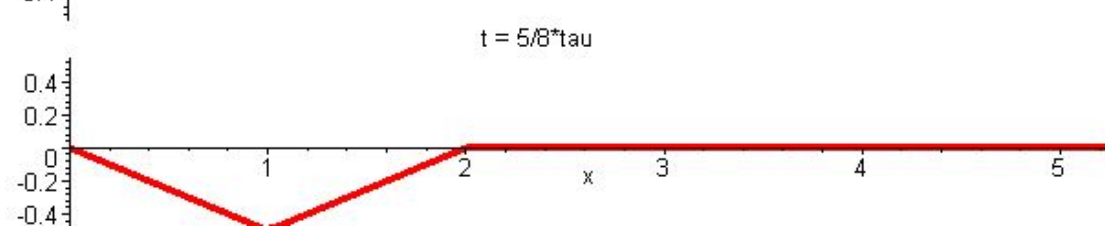
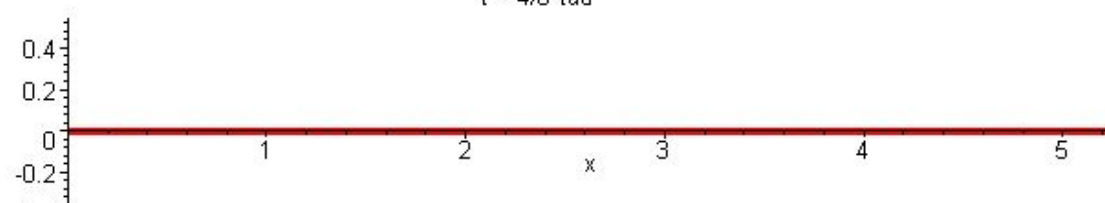
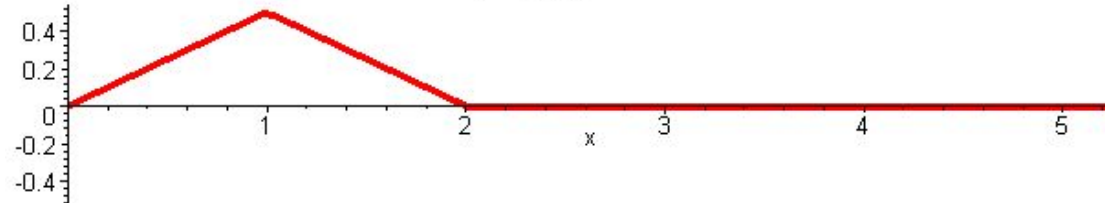
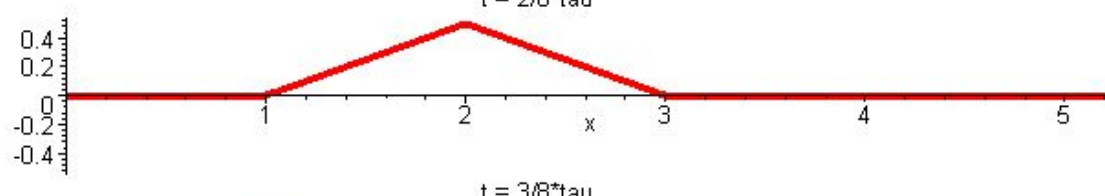
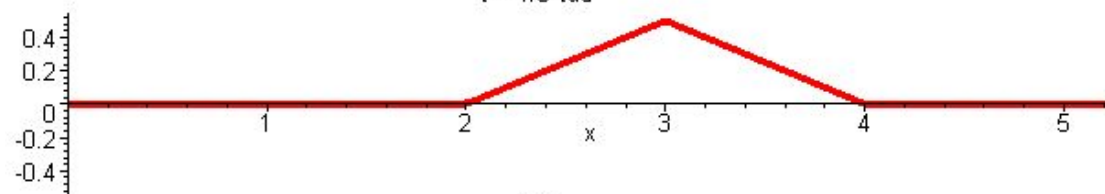
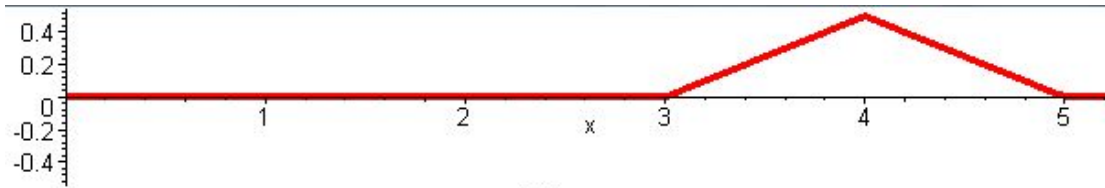
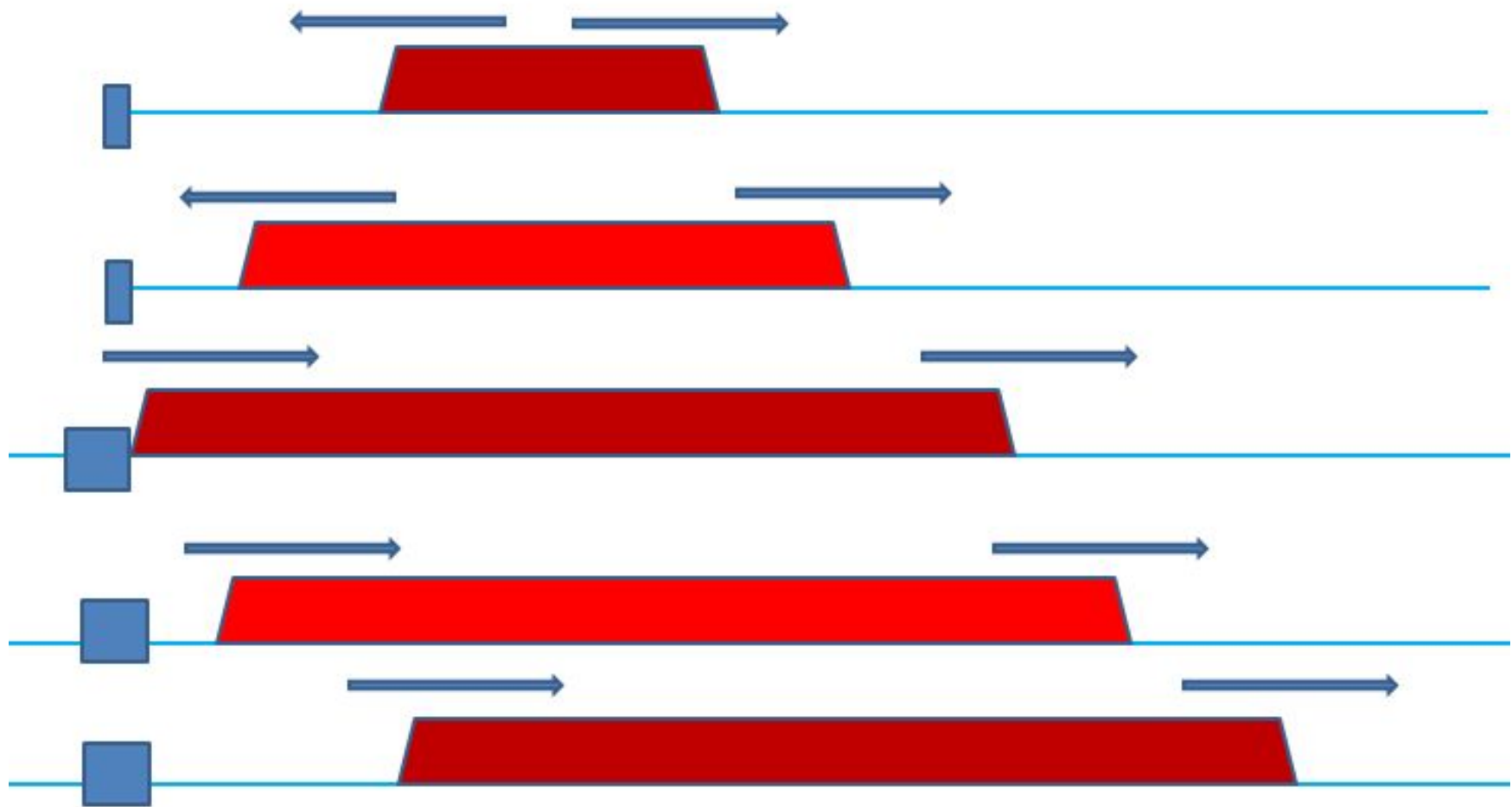


Рис. 16

$u_1(t,x), u_2(t,x), u(t,x)$



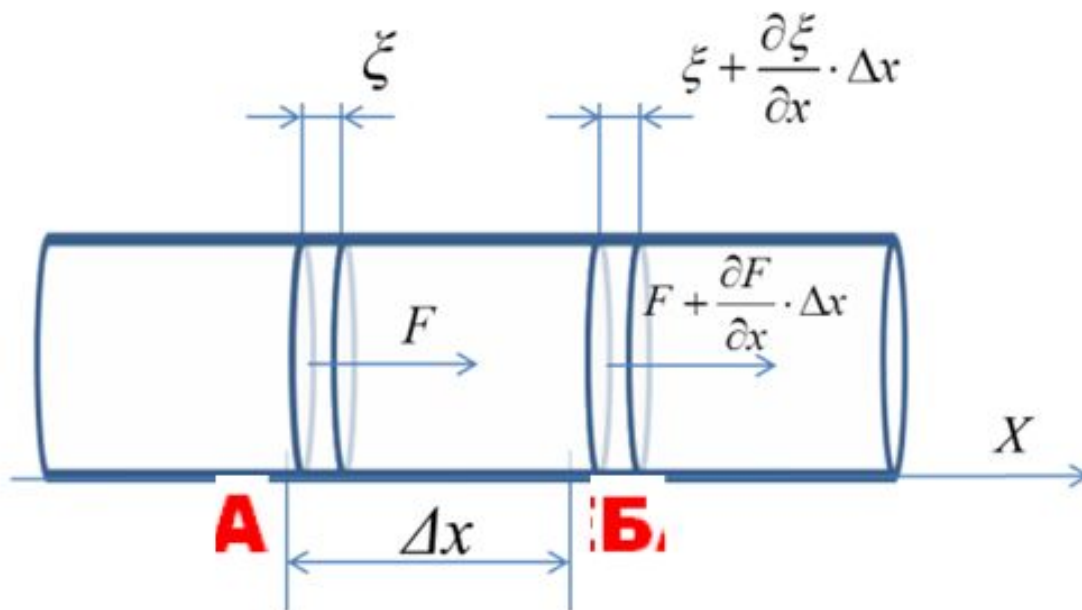




**Динамика отражения волны импульса на
полу-бесконечной струне**

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

В этом разделе наших лекций мы рассмотрим очень важный для практики и часто встречающийся случай продольных колебаний стержня. Будем считать, что стержень имеет цилиндрическую форму или вытянутый параллелепипед. Он может сжиматься или растягиваться и по плотности однороден, т.е. его плотность постоянная по всему объему. **AA** Внешняя сила приложена по оси цилиндра. Будем также



считать, поперечные размеры стержня много меньше его продольных размеров и при сжатии или растяжении поперечные размеры не меняются. Направим ось абсцисс по оси стержня, и его концы имеют координаты $x = 0$ и $x = l$. Рассмотрим сечение между точками x и $x + \Delta x$. Смещение этого сечения из положения равновесия обозначим через $u(x, t)$. Смещение имеет размерность **м** (метр). Изменение смещения сечения в точке $x + \Delta x$ записывается в виде (формула Маклорена)

$$u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Относительное удлинение стержня при этом равно

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u'_x$$

При малых деформациях величина сдвига подчиняется закону Гука $F = k\Delta x$, т.е. величина сдвига пропорци-

ональна приложенной силе. Обычно для стержня применяют такую формулу

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \rightarrow k = \frac{ES}{l}$$

Тут S площадь поперечного сечения стержня. Оценим величины этих параметров для железа.

$$E(Fe) = 21 \cdot 10^{10} \text{ Па} = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$$

Пусть радиус стержня $r = 1 \text{ мм}$, тогда площадь сечения $S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.

Приложили силу **1000 Н** (примерный вес человека). Посмотрим, насколько растянется железный прут, если его длина l 1 м.?

$$\Delta x = \frac{10^3 \cdot 1}{21 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} =$$

$$= 0,0015\text{ м} = 1,5 \text{ мм}$$

Эксперимент выглядит примерно так. Если человек с массой **100 кг** повиснет, взявшись руками, за железный прут длиной **1 м**, то этот прут растянется на **1,5 мм**.

Когда мы поняли, что такое модуль Юнга, и как им пользоваться, попробуем составить дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания стержня.

У нас закон Гука записывается так в точке **А**

$$F_A = ES \frac{\Delta u}{dx} = ES u'_x(x, t)$$

В точке **Б** этот же закон запишется в виде

$$F_B = ES \frac{\Delta u}{dx} = ES u'_x(x + \Delta x, t)$$

Разность сил в точках **А** и **Б** дает силу, заставляющую элемент стержня передвигаться

В результате

$$F = F_B - F_A = ES(u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)) = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Далее применим второй закон Ньютона. Так как масса выделенного участка АБ есть

$$dm = \rho S dx$$

а сам второй закон Ньютона имеет вид

$$dm \cdot a_{\text{ускорение}} = F \rightarrow \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Мы получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ке $x = l$ конец стержня свободен и на него до начала действия не действует внешняя сила. Отсюда вытекают два граничных условия

$$u(x, t)|_{x=0} \equiv u(0, t) = 0$$

Поскольку внешней силы на втором конце нет, то

$$F_{\text{Б}} = ES \frac{\Delta u}{dx} = ES u'_x(l, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} \equiv u'_x(l, t) = 0$$

Это второе граничное условие.

Колебания происходят от того, что в начальный момент стержень был или сжат или растянут, деформирован.

При этом мы задаем начальные сдвиги

$$u(x, t)|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x)$$

И начальные скорости

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x)$$

Зеленым цветом выделены начальные и граничные условия. Решение волнового уравнения производится методом Фурье, т.е. методом разделения переменных.

. Будем искать неизвестную функцию $u(x, t)$ в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

каждая из которых зависит только от x и от t . Если мы сейчас возьмем вторые производные от этой функции, то получим следующий результат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.$$

Если мы сейчас подставим эту функцию в исходное уравнение, то получим следующий результат

$$X \cdot T'' = a^2 X'' \cdot T$$

Деля обе части равенства на $X(x)T(t)$ получаем такое уравнение

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$$

Поскольку левая часть этого уравнения зависит только от t , а правая часть зависит только от x , то это возможно, если обе части этого равенства равны некоторой константе, т.е.

Поскольку левая часть этого уравнения зависит только от t , а правая часть зависит только от x , то это возможно, если обе части этого равенства равны некоторой константе, т.е.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = c.$$

Эту константу мы пока не знаем, но будем определять.

Они дают такую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \beta e^{\beta l} - C_2 \beta e^{-\beta l} = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta e^{\beta l} & -\beta e^{-\beta l} \end{vmatrix} = \beta e^{-\beta l} + \beta e^{\beta l} \neq 0,$$

Поэтому решение этой системы такое $C_1 = C_2 = 0$. Это означает, что никаких колебаний нет. Но на практике они есть.

Если взять $c = 0$, то $X(x) = C_1 + xC_2$. Тогда граничные условия дают $C_1 = 0, C_2 = 0$. Этот вариант также не дает колебаний. Поэтому остаётся один вариант $c = -\beta^2$ и мы получаем дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \beta^2 X(x) = 0$$

Характеристическое уравнение приобретает вид

$$k^2 + \beta^2 = 0$$

И корни являются комплексными числами

$$k_1 = i\beta; k_2 = -i\beta.$$

$$X(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x).$$

Снова подставляем граничные условия. Левое дает

$$X(0) = C_1 \cos(\beta 0) + C_2 \sin(\beta 0) = 0.$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$ и

$$X(x) = C_2 \sin(\beta x).$$

Займемся вторым граничным условием

$$X'_x(l) = \beta C_2 \cos(\beta l) = 0$$

Когда косинус обращается в ноль? Когда $\beta l = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Из этого уравнения находи величины неизвестного параметра

$$\beta_k = \frac{(2k + 1)\pi}{2l}$$

После этого реально определяем первый множитель $u(x, t) = X(x)T(t)$ функцию

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k + 1)\pi x}{2l}\right).$$

Теперь займемся вторым множителем. Тут возникает такое дифференциальное уравнение

$$T'' + a^2 \cdot \beta_k^2 \cdot T = 0.$$

$$T_k(t) = B_k \cos\left((2k + 1)\frac{\pi at}{2l}\right) + D_k \sin\left((2k + 1)\frac{\pi at}{2l}\right).$$

Тут B_k и D_k произвольные постоянные.

После этого мы можем записать частное решение волнового уравнения колебаний закрепленной струны

$$\begin{aligned}
 u_k(x, t) &= X_k(x)T_k(t) = \\
 &= \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(a_k \cos\left((2k+1) \frac{\pi a t}{2l} \right) + b_k \sin\left((2k+1) \frac{\pi a t}{2l} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Это есть собственные колебания струны. Обозначим

$$(2k+1) \frac{\pi a}{l} = \omega_k. \text{ Найдем размерность } \omega_k \rightarrow \frac{\text{м}}{\text{см}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Размерность круговой частоты. Есть просто частота колебаний.

При этом эти колебания являются продольными.

Общее колебание стержня есть сумма всех отдельных гармоник (мод)

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t)$$

Начальные условия, которыми мы пока не пользовались, позволяют найти неизвестные коэффициенты a_k и b_k . Это делается так. Первое начальное условие

$$u(x, t)|_{t=0} \equiv u(x, 0) = f(x)$$

Если мы подставим $t = 0$ в общую формулу, то это дает

$$u(x, t)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) (a_k) = f(x)$$

Мы получили классический ряд Фурье по нечетным функциям, коэффициенты этого ряда находятся по формуле

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

Второе начальное условие

$$u'_t(x, t)|_{t=0} \equiv u'_t(x, 0) = F(x)$$

Если мы подставим $t = 0$ в общую формулу после взятия производной, то это дает

$$u'_t(x, t)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) (b_k) = F(x)$$

Мы получили второй классический ряд Фурье по нечетным функциям, коэффициенты этого ряда находятся по формуле

$$b_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int_0^l F(x) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) dx$$

Итак, что же мы имеем в сухом остатке? Зная начальные условия, мы рассчитываем коэффициенты a_k и b_k составляем ряд Фурье колебаний, выделяем стоячие волны (гармоники) находим их амплитуды. Таким образом, мы получаем звуковой спектр колебаний основного тона и обертонов.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть стержень растянут силой P , которая приложена к его концу. Ясно, что мы немного растянули стержень. Применим закон Гука. В каждом сечении стержня сила постоянна и равна силе натяжения P . Вспомним формулу

$$P = ESu'_x(x, t) = ES \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается

$$f(x) = \frac{Px}{ES}$$

Как это понимать? Смещение каждого сечения пропорционально его координате x .



После того, как мы определили начальные смещения, мы убираем растягивающую силу и предоставляем стержень самому себе. Что будет происходить? Конец стержня возвратится в начальные нерастянутое положение, но по инерции продолжит движения к закрепленному концу. Возникают силы упругости, препятствующие этому движению. Конец стержня остановится. Сам стержень будет деформирован на сжатие. И процесс продолжится. Если нет сил трения, то это колебание будет продолжаться бесконечно.

Поскольку внешнего воздействия нет, то $F(x) = 0$ и все коэффициенты $b_k = 0$. Расчет коэффициентов a_k идет по формуле

$$a_k = \frac{2P}{lES} \int_0^l x \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) dx = \frac{8Pl}{\pi^2 ES} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

После этого действия записываем общую формулу колебаний

$$u(x,t) = \frac{8Pl}{\pi^2 ES} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right) \sin\left((2k+1)\frac{\pi at}{2l}\right)$$

Формула, конечно, страшноватая и малопонятная. Попробуем понять, что это такое. Возьмем $k = 0$ первую главную гармонику – основной тон

$$u_1(x,t) = \frac{8Pl}{\pi^2 ES} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi at}{2l}\right)$$

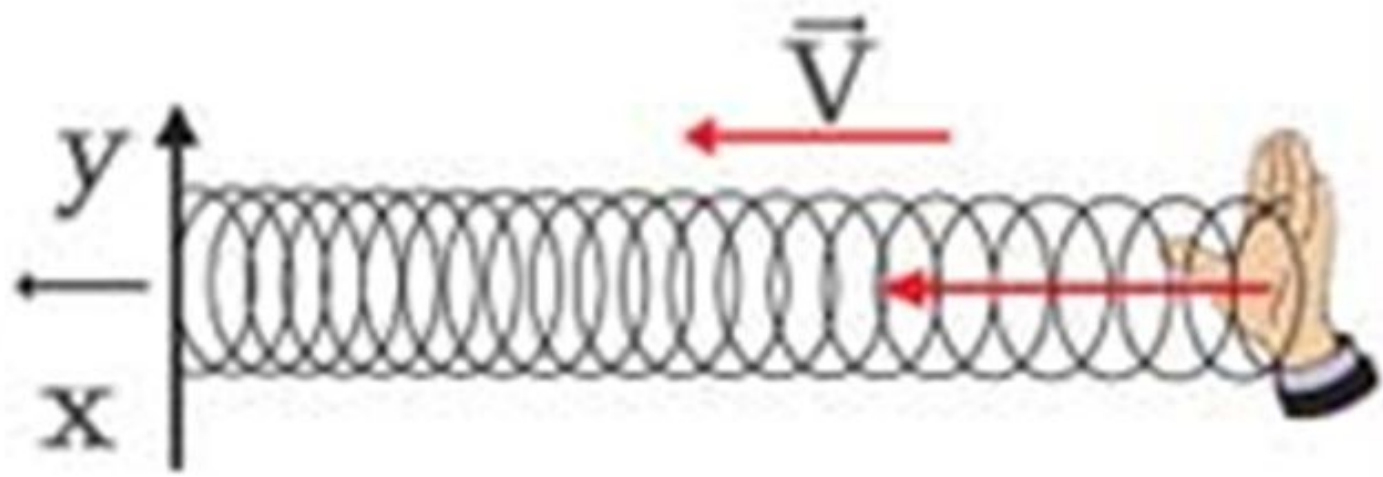
Рассмотрим подробнее это колебание

$$E(Fe) = 21 \cdot 10^{10} \text{ Па}; r = 1 \text{ мм}' = \pi r^2; S = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

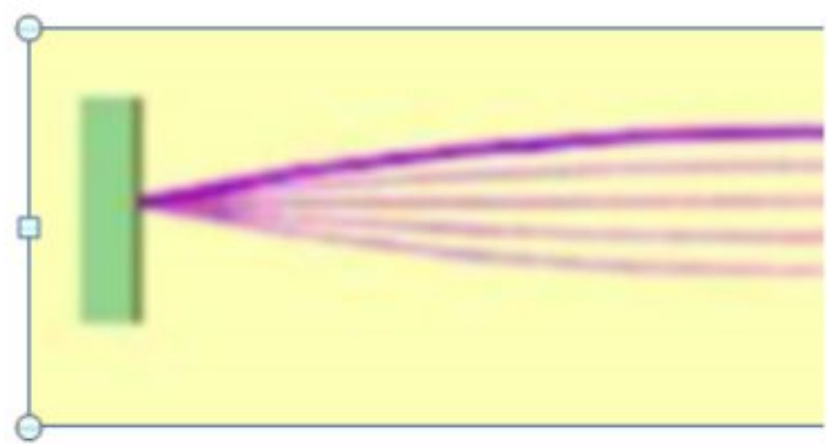
$$\frac{8Pl}{\pi^2 ES} = \frac{8 \cdot 1000 \cdot 1}{(3,14)^2 \cdot 21 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} = 1,23 \text{ мм}$$

Это максимальный сдвиг. Частота колебаний

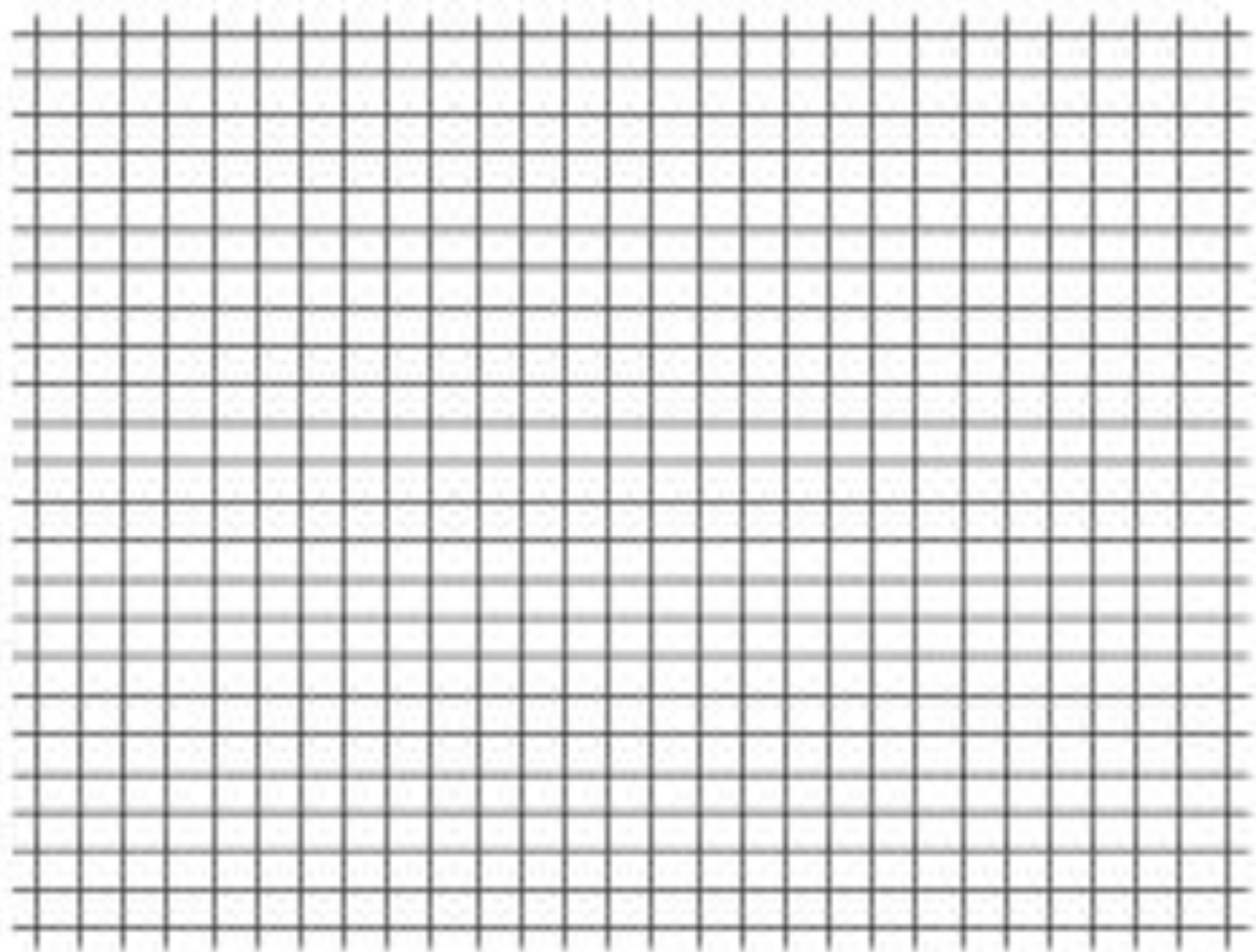
$$\omega = \frac{\pi a}{2l} = 8091 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1237 \text{ Гц}$$



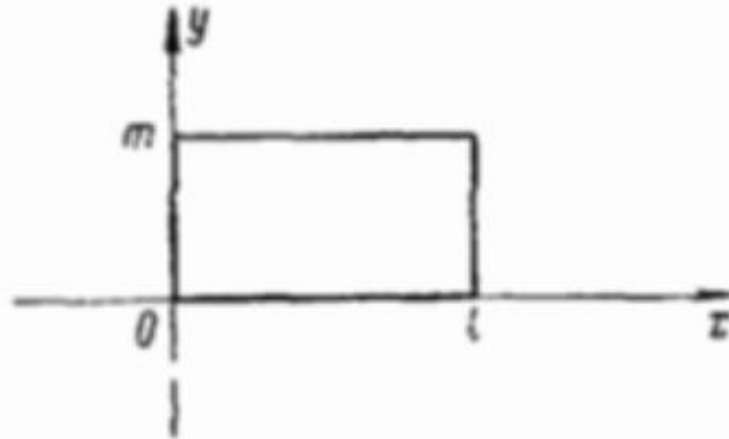
Продольные волны



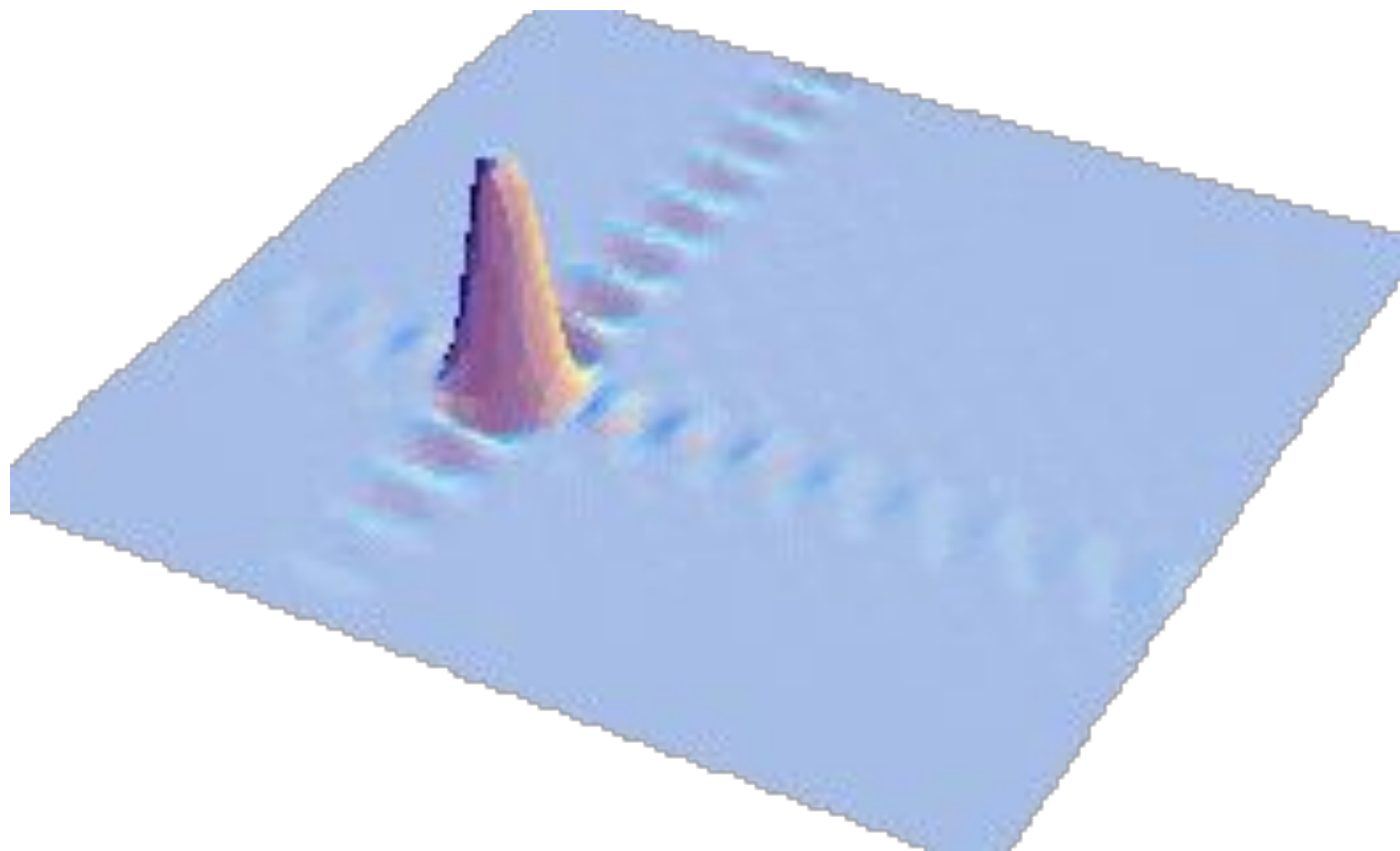


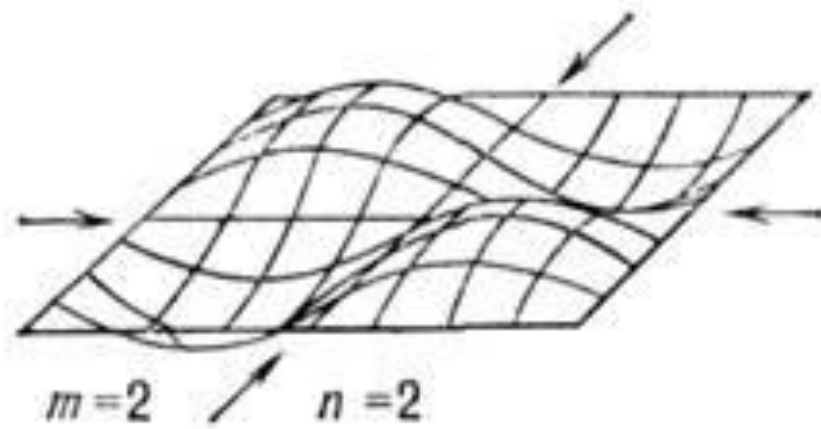
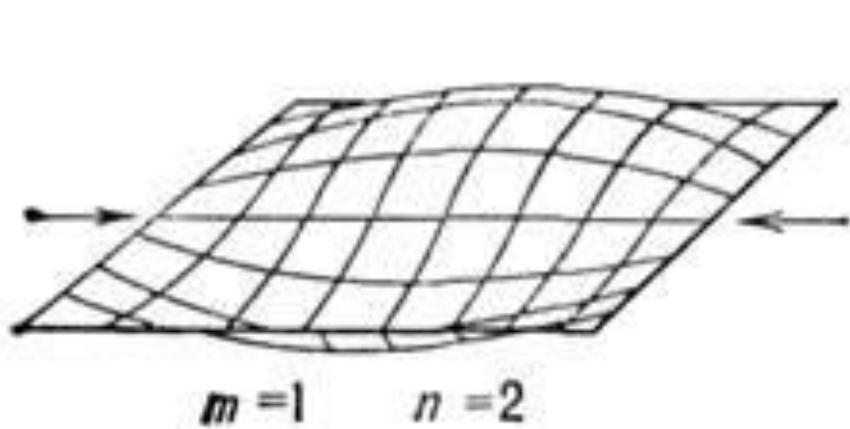
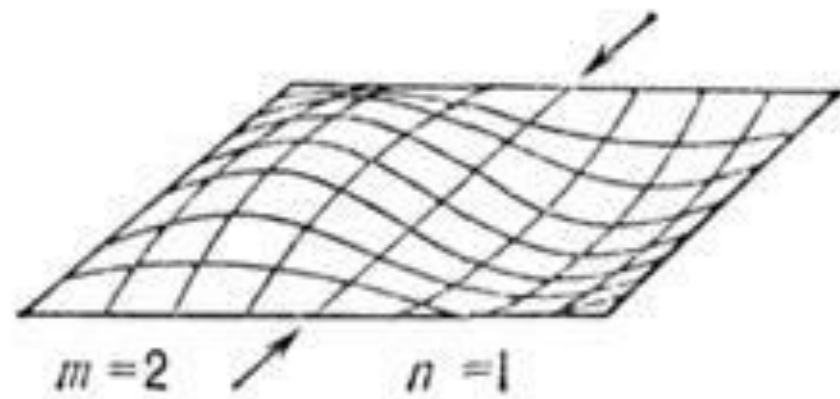
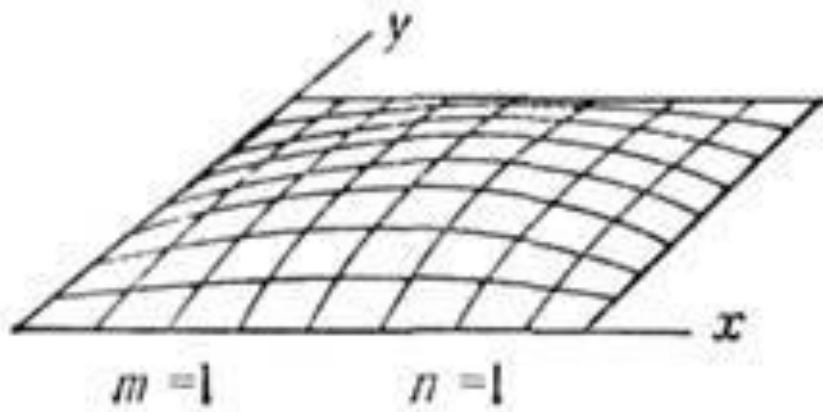


Колебания прямоугольной мембраны



Рассмотрим колебания прямоугольной упругой плоской мембраны, расположенной в плоскости XOY . По оси OX мембрана имеет длину l , по оси OY имеет высоту m . Мы не будем тут выводить уравнение колебаний такой мембраны, а просто из соображений симметрии запишем это уравнение





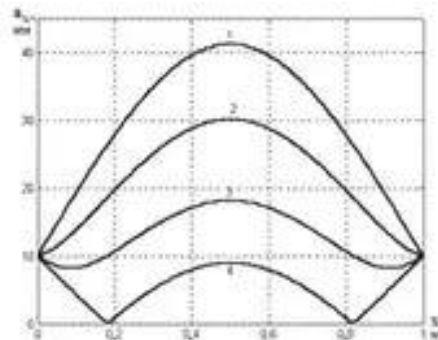
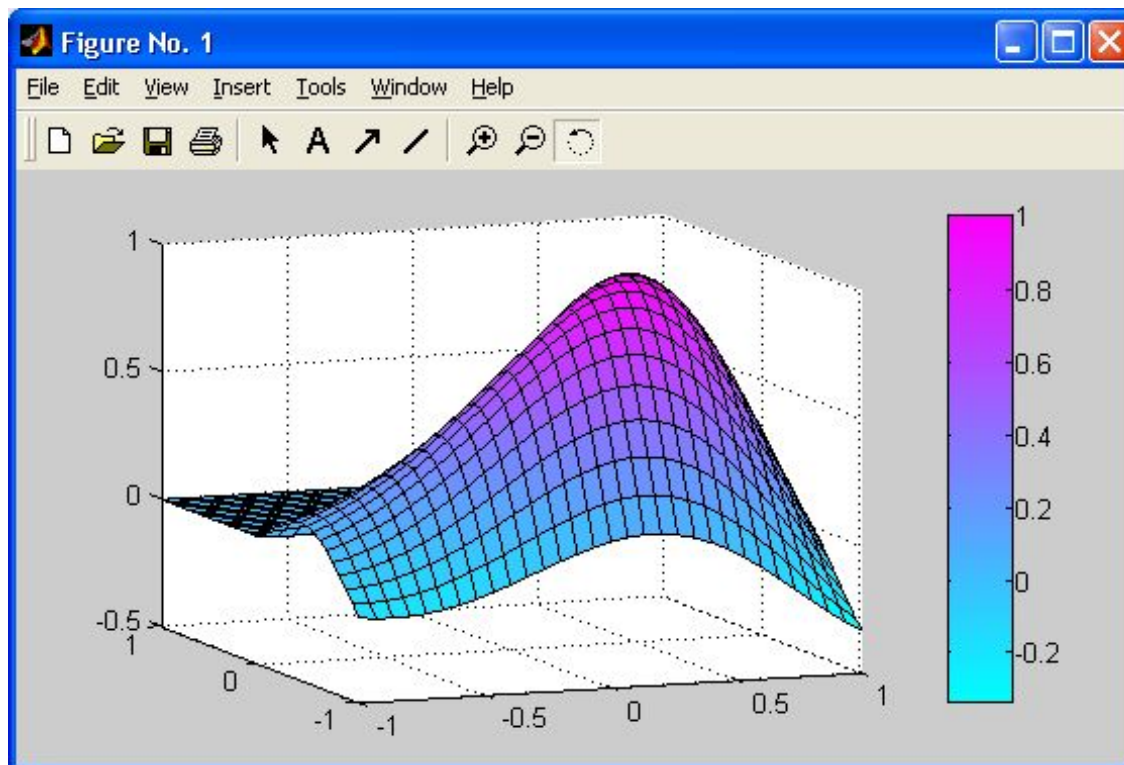
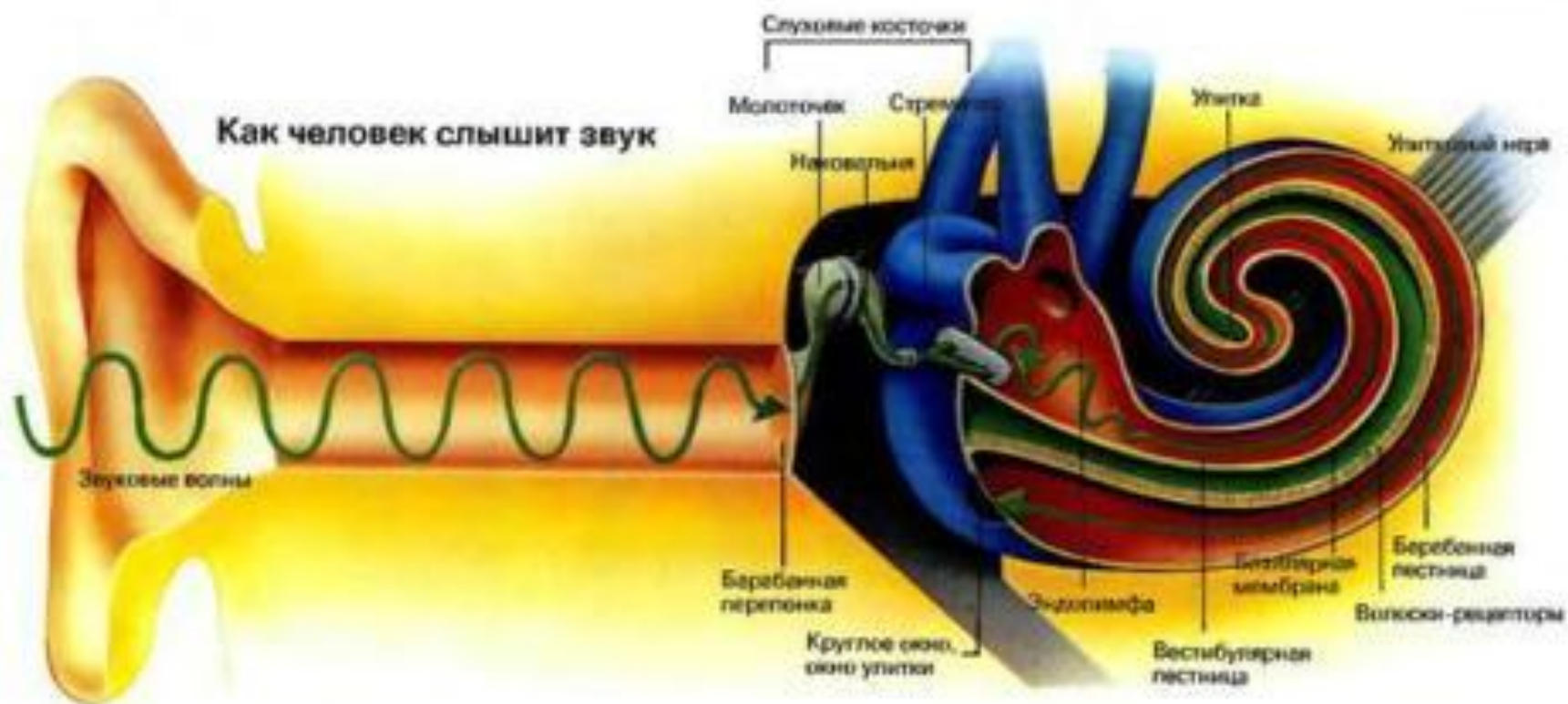
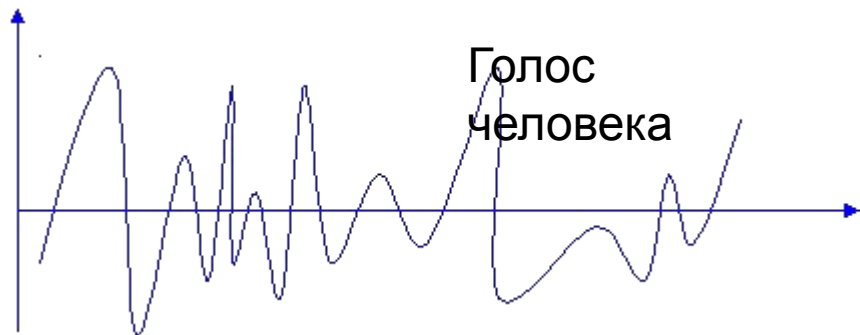
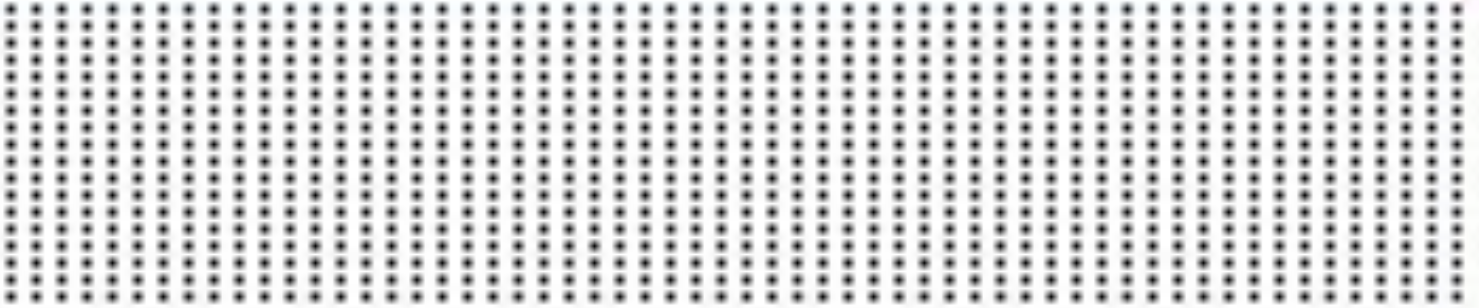
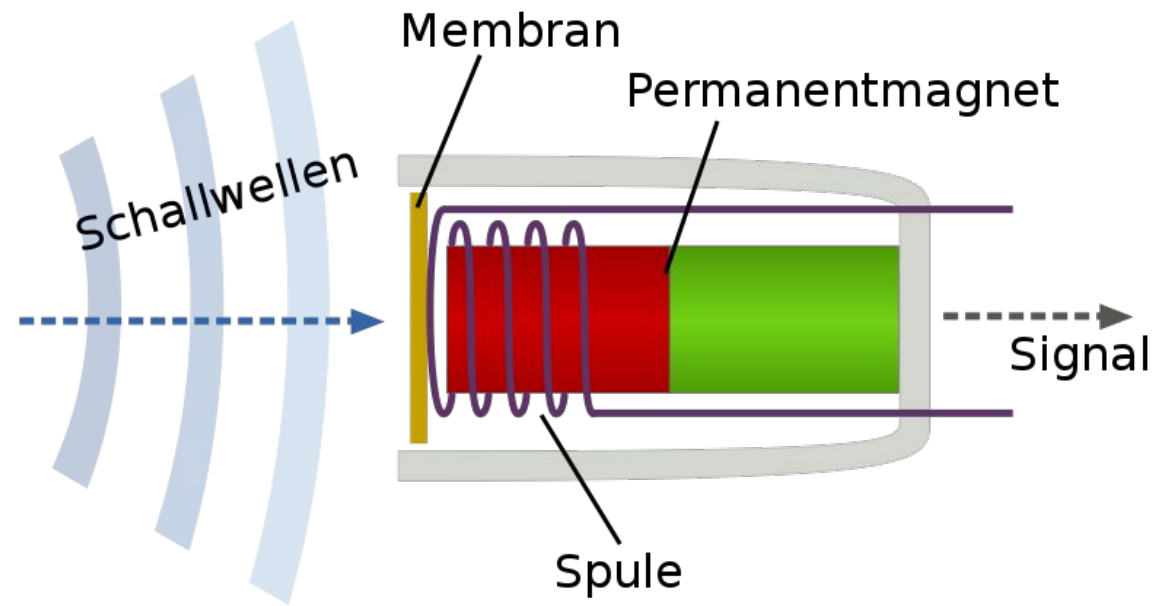
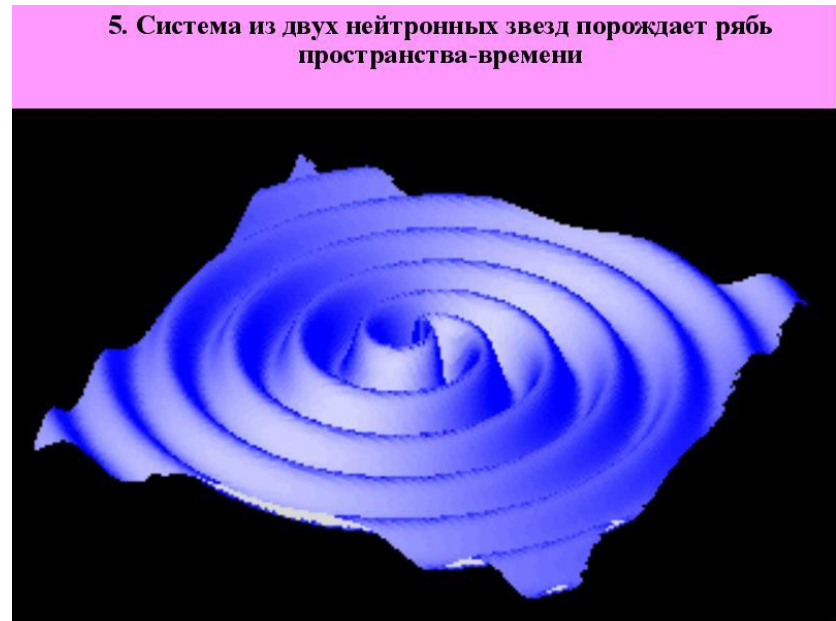
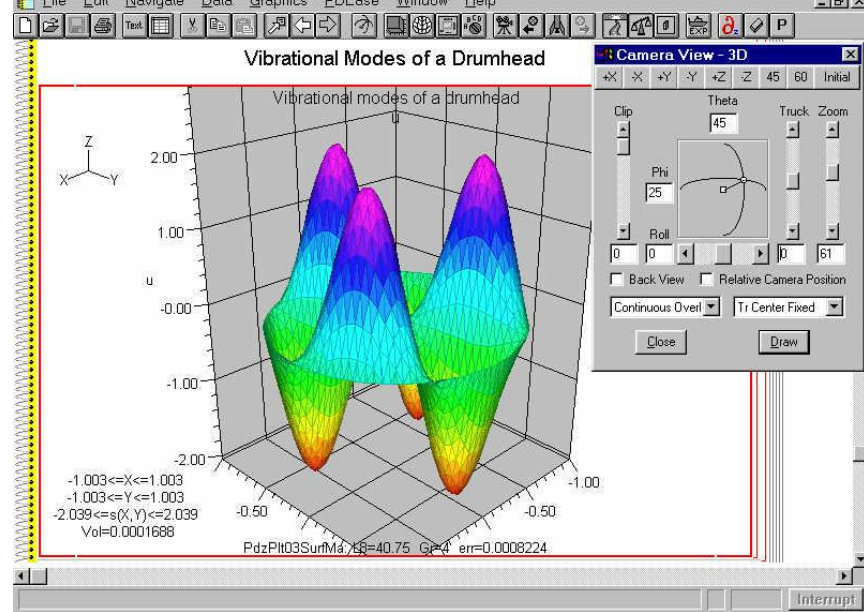


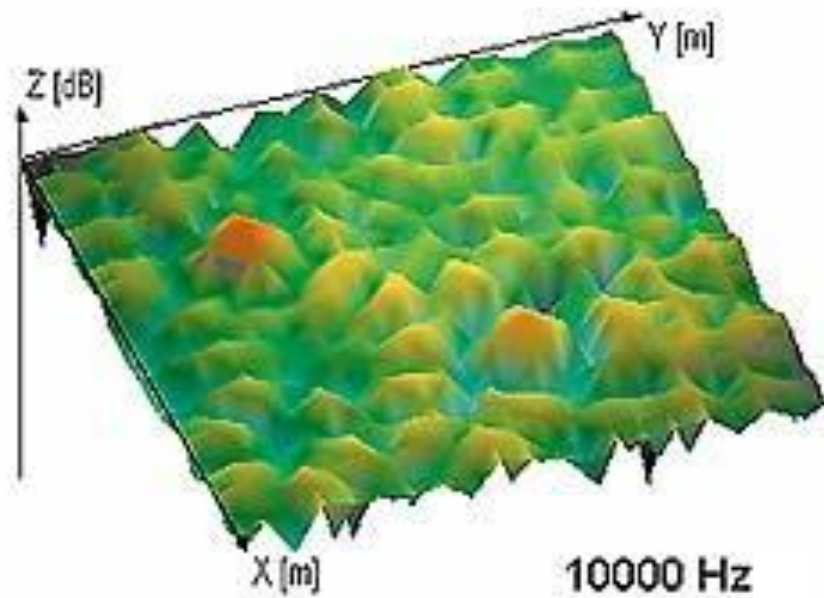
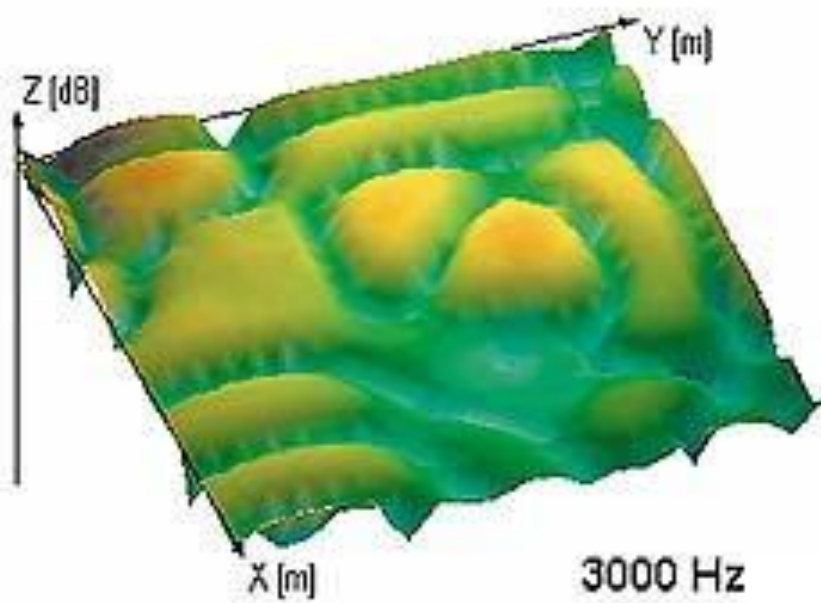
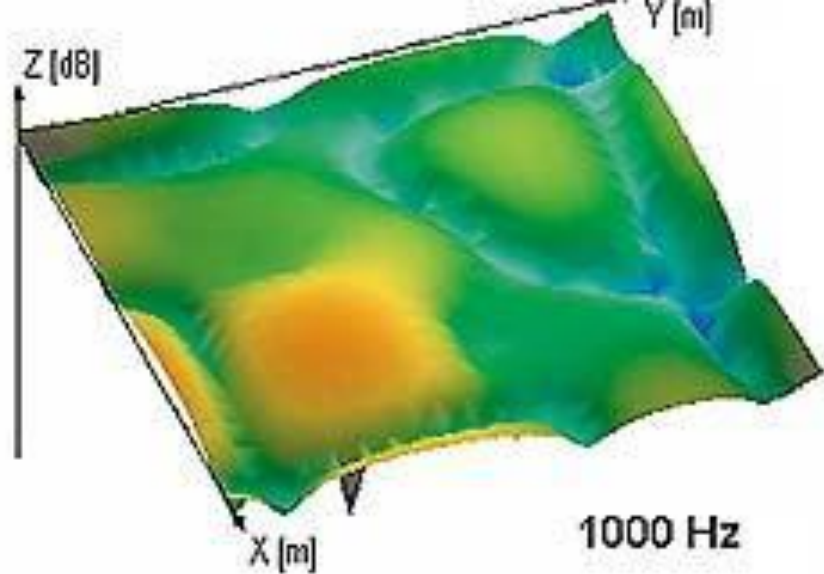
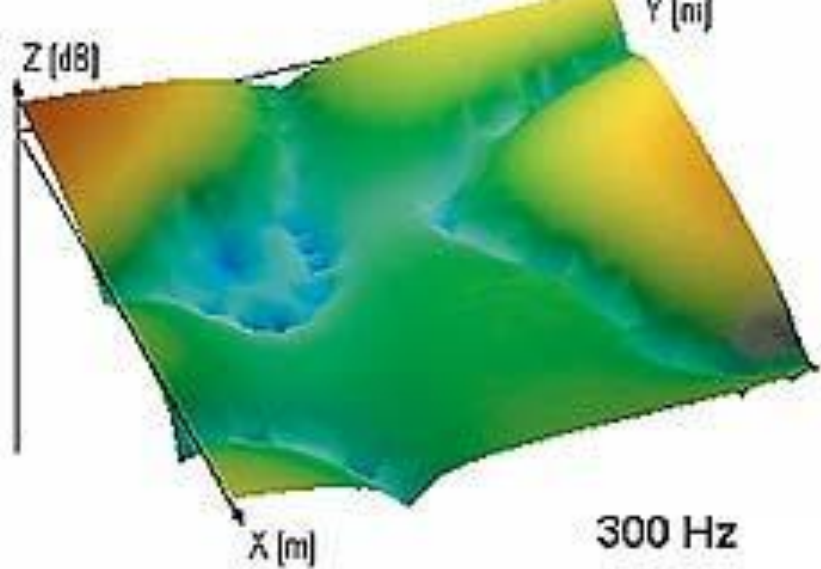
Рисунок 1 – Амплитуды колебаний мембраны при векторных гармонических возмущениях



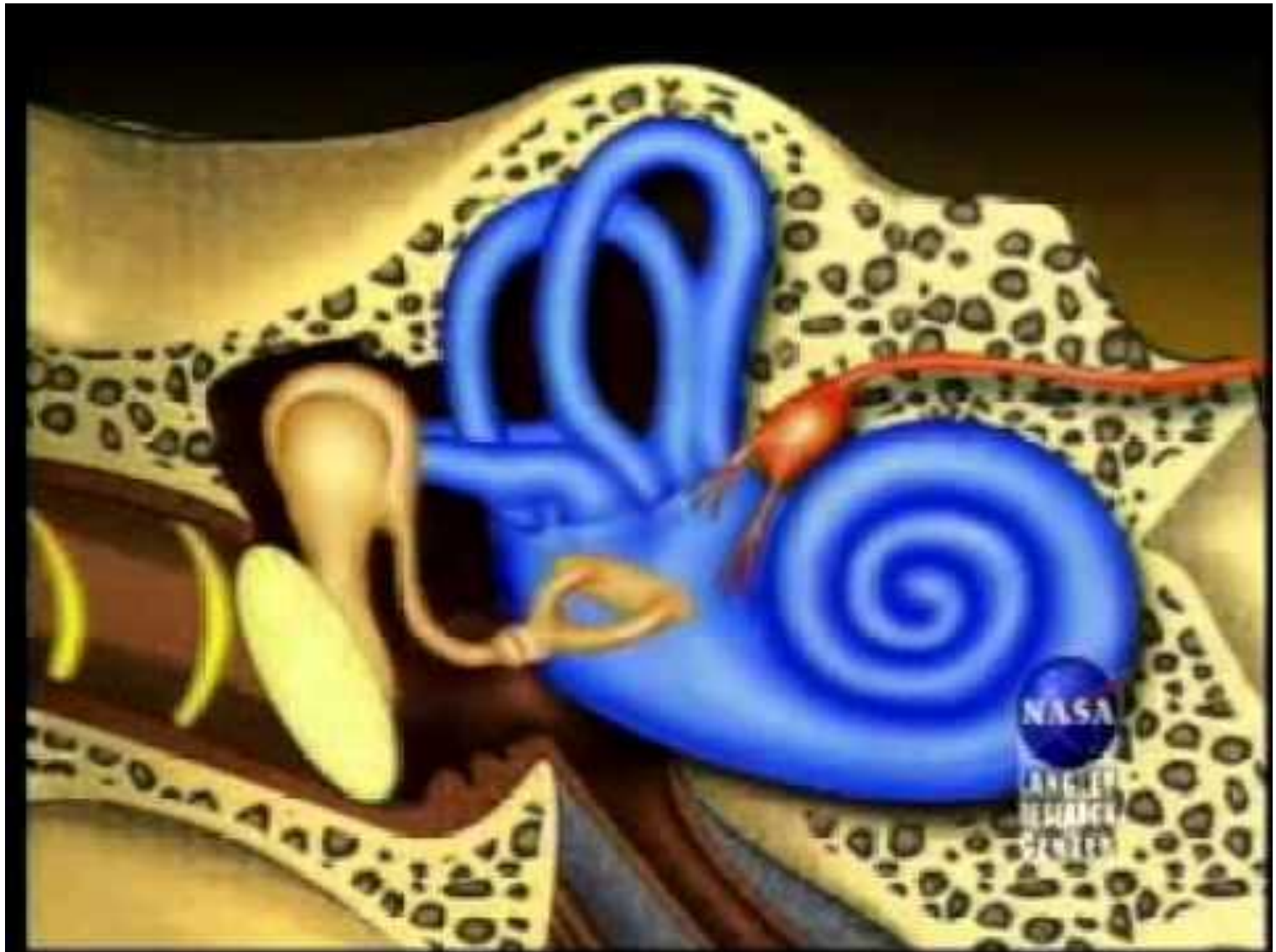








Колебания мембраны уха



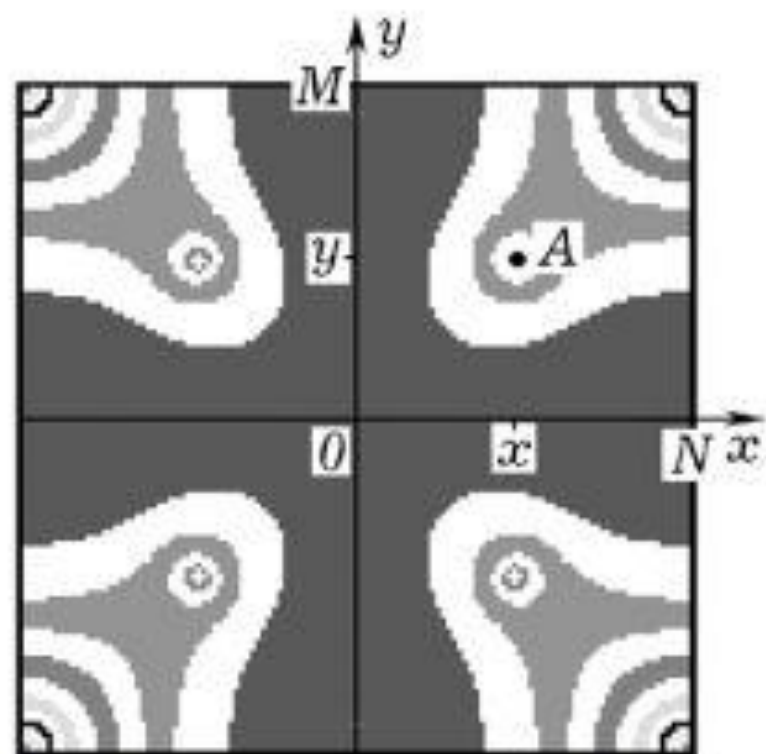


Рис. 5. Вынужденные колебания пластины квадратной формы.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Что такое $u(x, y, t)$? Это отклонение точки мембраны с координатами x, y вверх или вниз по оси OZ в момент времени t . Важнейшим компонентом этого уравнения является набор граничных и начальных условий. Запишем вначале начальные условия. Их два. Первое

$$u|_{t=0} \equiv u(x, y, 0) = f(x, y)$$

указывает на начальное отклонение струны от плоскости XOY в сторону оси OZ . Второе начальное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u'_t(x, y, 0) = F(x, y)$$

указывает на начальные скорости точек мембраны. Действительно, мы можем возбудить колебания или некоторой начальной деформацией плоскости, или уда-

ром молоточком по части мембраны, или сразу обоими этими способами.

Граничные условия запишутся так. Пусть края мембраны закреплены намертво и не двигаются. Границу мембраны обозначим через G . Тогда граничные условия нашей задачи запишутся в виде

$$u|_G \equiv u((x, y) \in G, t) = 0$$

или более конкретно в виде четырех уравнений.

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(l, y, t) = u(x, m, t) = 0$$

Решать полученное дифференциальное уравнение в частных производных будем методом Фурье, т.е. методом разделения переменных. Представим общее отклонение точек мембраны в виде

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Граничные условия при этом преобразуются к виду

$$X(0) = X(l) = Y(0) = Y(m) = 0$$

Возьмем вторые частные производные от неизвестной функции $u(x, y, t)$ и получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''YT; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Y''XT; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y''YX.$$

Разделяя дальше переменные, мы придем к такому соотношению. Оно равно какой-то константе, поскольку все три неизвестные функции зависят от своих переменных.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \mathit{const}.$$

Далее точно также поступим с координатными функциями и запишем два уравнения с двумя новыми константами

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2; \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta^2.$$

$$X'' + \alpha^2 X = 0; Y'' + \beta^2 Y = 0; T'' + a^2(\alpha^2 + \beta^2)T = 0.$$

В результате получили три обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка, линейных, однородных с постоянными коэффициентами. Решения их имеют такой вид

$$X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = D_1 \cos(\beta y) + D_2 \sin(\beta y)$$

Подставляем эти функции в граничные условия

$$X(0) = C_1 \cos(\alpha 0) + C_2 \sin(\alpha 0) = 0$$

Отсюда находим, что $C_1 = 0$.

$$Y(0) = D_1 \cos(\beta 0) + D_2 \sin(\beta 0) = 0$$

Отсюда находим, что $D_1 = 0$.

$$X(l) = C_2 \sin(\alpha l) = 0$$

Отсюда находим, что $\alpha l = k\pi$. k целое число.

$$Y(m) = D_2 \sin(\beta m) = 0$$

Отсюда находим, что $\beta t = n\pi$. n целое число. Мы видим, что неизвестные константы имеют дискретный вид и определяются равенствами

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}; \beta_n = \frac{n\pi}{t}.$$