

6. ПРЕДЕЛЫ

И

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

6.1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число a_n , то говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2 \dots a_n$$

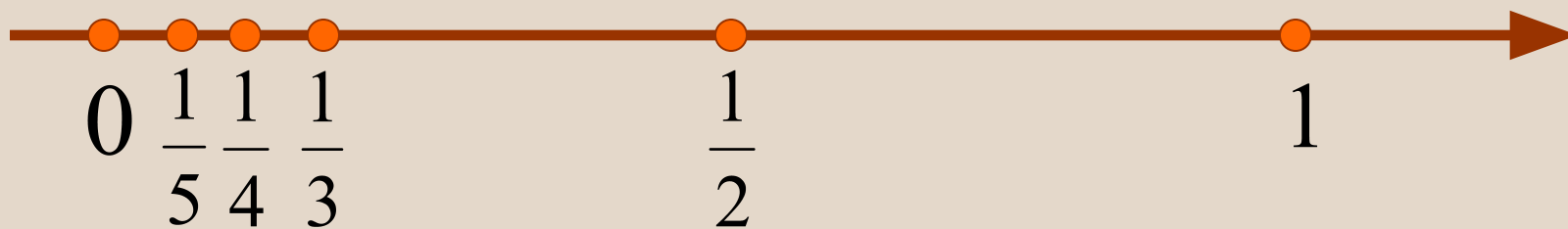
Числа $a_1, a_2 \dots a_n$ называются членами последовательности, а число a_n называется общим членом или n -ым членом данной последовательности.

Например:

1 $2, 4, 6, 8 \dots 2n \dots$

2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$

Изобразим члены последовательности (2) точками на числовой оси.



Можно заметить, что члены последовательности с ростом n сколь угодно близко приближаются к нулю.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$a_n \leq M$$

$$a_n \geq m$$

*Последовательность $\{a_n\}$ называется
ограниченной, если она ограничена
сверху и снизу:*

$$m \leq a_n \leq M$$

Последовательность (1) ограничена снизу, но не сверху.

Последовательность (2) ограничена, т.к. все ее элементы находятся внутри промежутка $[0,1]$.

Если выполняется условие

$$a_n \leq a_{n+1}$$

то последовательность называется возрастающей.

Если выполняется условие

$$a_n \geq a_{n+1}$$

то последовательность называется убывающей.

Последовательность (1) возрастающая.

Последовательность (2) убывающая.

Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , что при всех $n > N$, выполняется неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

В противном случае последовательность расходящаяся.

Смысл определения предела числовой последовательности:

Для достаточно больших номеров n члены последовательности очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

ПРИМЕР.

Дана последовательность

3

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \dots$$

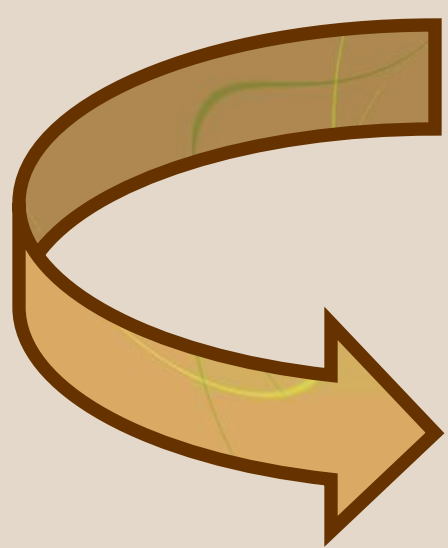
Показать, что предел этой последовательности равен 1.

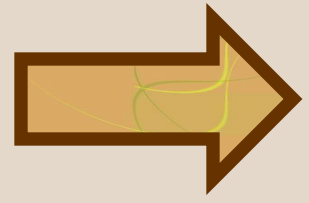
РЕШЕНИЕ:

Пусть $\varepsilon=0.1$

Тогда неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$

примет вид:


$$\left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| < 0.1$$


$$\frac{1}{n} < 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > 10$$

Если $\varepsilon=0.01$, то неравенство выполняется при

$$n > 100$$

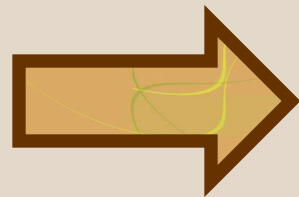
Для любого $\varepsilon > 0$, неравенство выполняется при

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n = \frac{1}{\varepsilon}$

Что для всех $n > N$, выполняется неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon$$

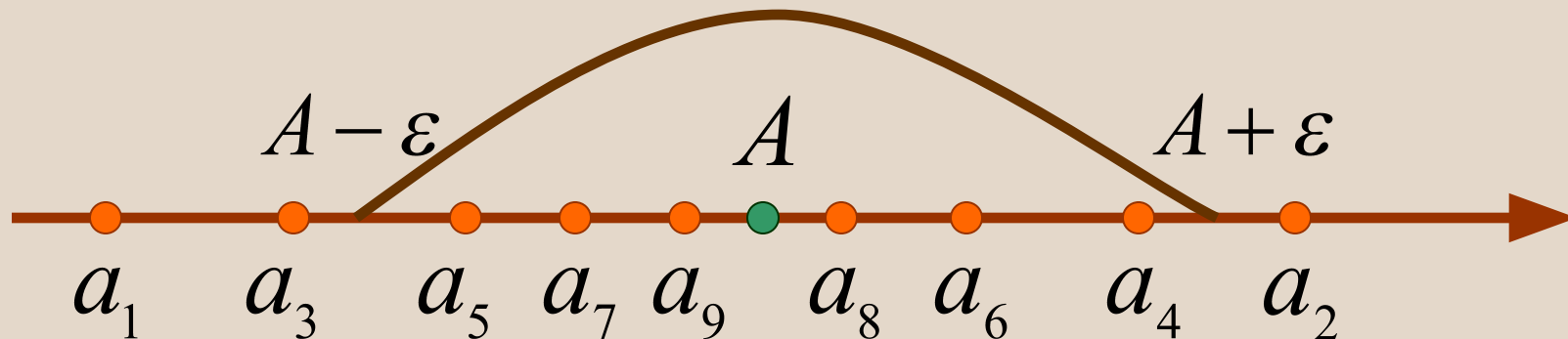


$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Рассмотрим геометрический смысл предела числовой последовательности. Для этого изобразим члены последовательности (3) точками на числовой оси.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad a_5 = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = \frac{7}{6}, \quad a_7 = \frac{6}{7}, \quad a_8 = \frac{9}{8}, \quad a_9 = \frac{8}{9}, \dots$$



Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

**которое соответствует попаданию членов
последовательности в ε – окрестность точки A .**

Т.е. число A есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , начиная с которого все члены последовательности будут заключены в ε – окрестности точки A , какой бы узкой она не была.

Вне этой окрестности может быть только конечное число членов последовательности.