



8. ПРОИЗВОДНАЯ

8.1. Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о касательной

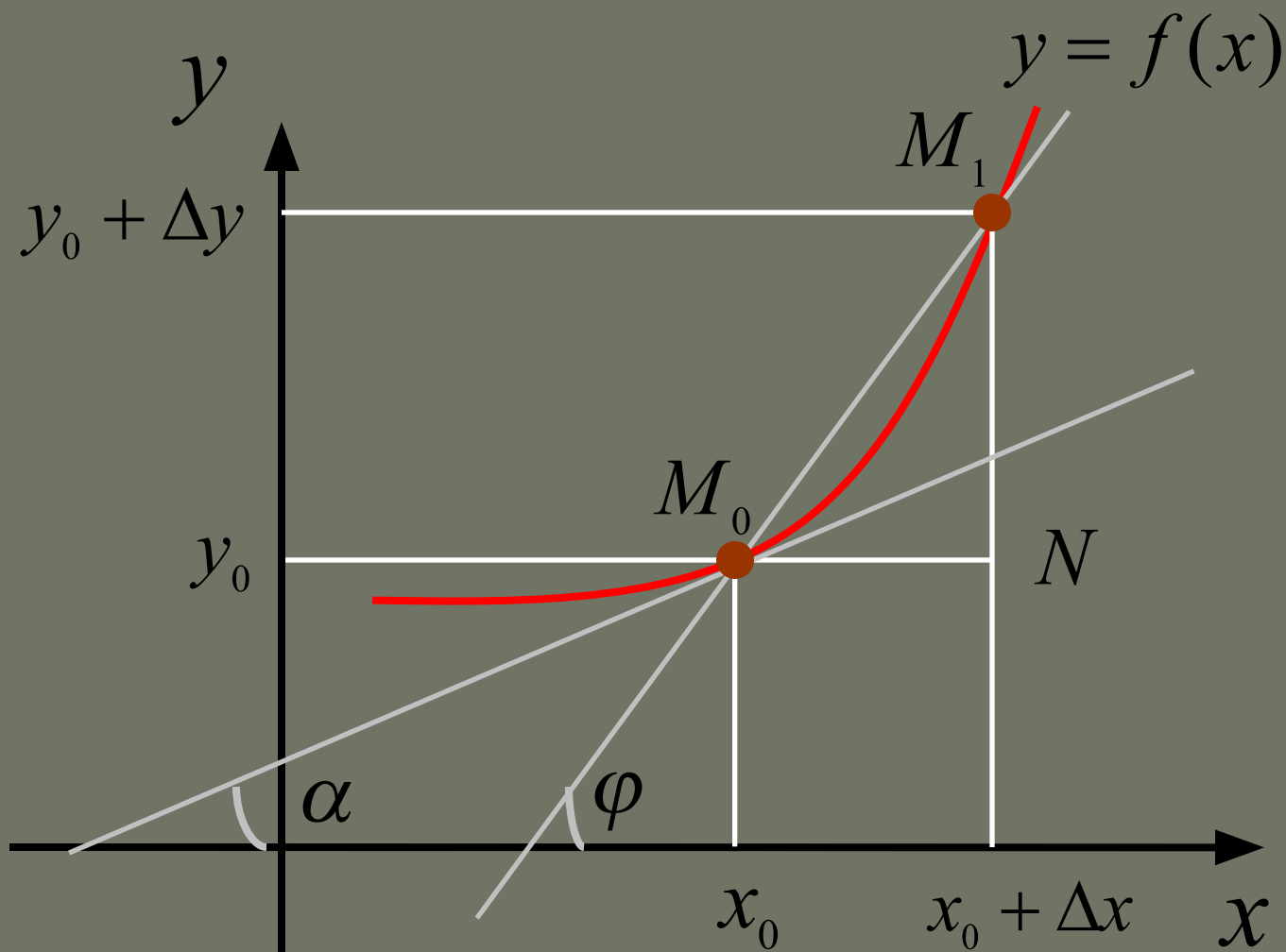
Пусть на плоскости XOY задана непрерывная кривая $y=f(x)$.

Необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой от точки $M_0(x_0, f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Проведем секущую M_0M_1 .

Под касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ понимают предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0 , т.е. при $\Delta x \rightarrow 0$



Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 имеет вид:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0M_1N :

$$k_{M_0M_1} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- угловой коэффициент секущей M_0M_1 .

Тогда угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0 :

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{M_0 M_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Задача о скорости движения

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время движения.

Требуется найти скорость в момент времени t_0 .

На момент времени t_0 пройденный путь составит $S_0 = S(t_0)$, на момент времени $t_0 + \Delta t$ пройденный путь составит $S_0 + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$.

Тогда за промежуток времени Δt средняя скорость составит:

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Чем меньше Δt , тем лучше средняя скорость характеризует движение в момент t_0 .

Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 понимают:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

3. Задача о производительности труда

Пусть функция $u=u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t .

Требуется найти производительность труда в момент времени t_0 .

За период от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$.

Тогда за промежуток времени Δt средняя производительность труда составит:

$$z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Чем меньше Δt , тем лучше средняя производительность труда характеризует производительность в момент t_0 .

Производительность труда в момент t_0 есть предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$