8.5. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая и монотонная функция на промежутке X.

Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то функция $x=\varphi(y)$ является обратной функцией к данной, непрерывной на соответствующем промежутке Y.

ТЕОРЕМА

Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной исходной функции:

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

Доказательство:

По условию функция *y=f(x)* дифференцируема и

$$y'(x) = f'(x) \neq 0$$

Пусть *Δy* - приращение независимой переменной *y*, не равное *0*.

Δx **– соответствующее приращение обратной функции *x=φ(y)*, также неравное *0*.**

Тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$$

Переходим в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$

Учитываем, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$

$$\underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}_{x'_y} = \underbrace{\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}}_{y'_x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

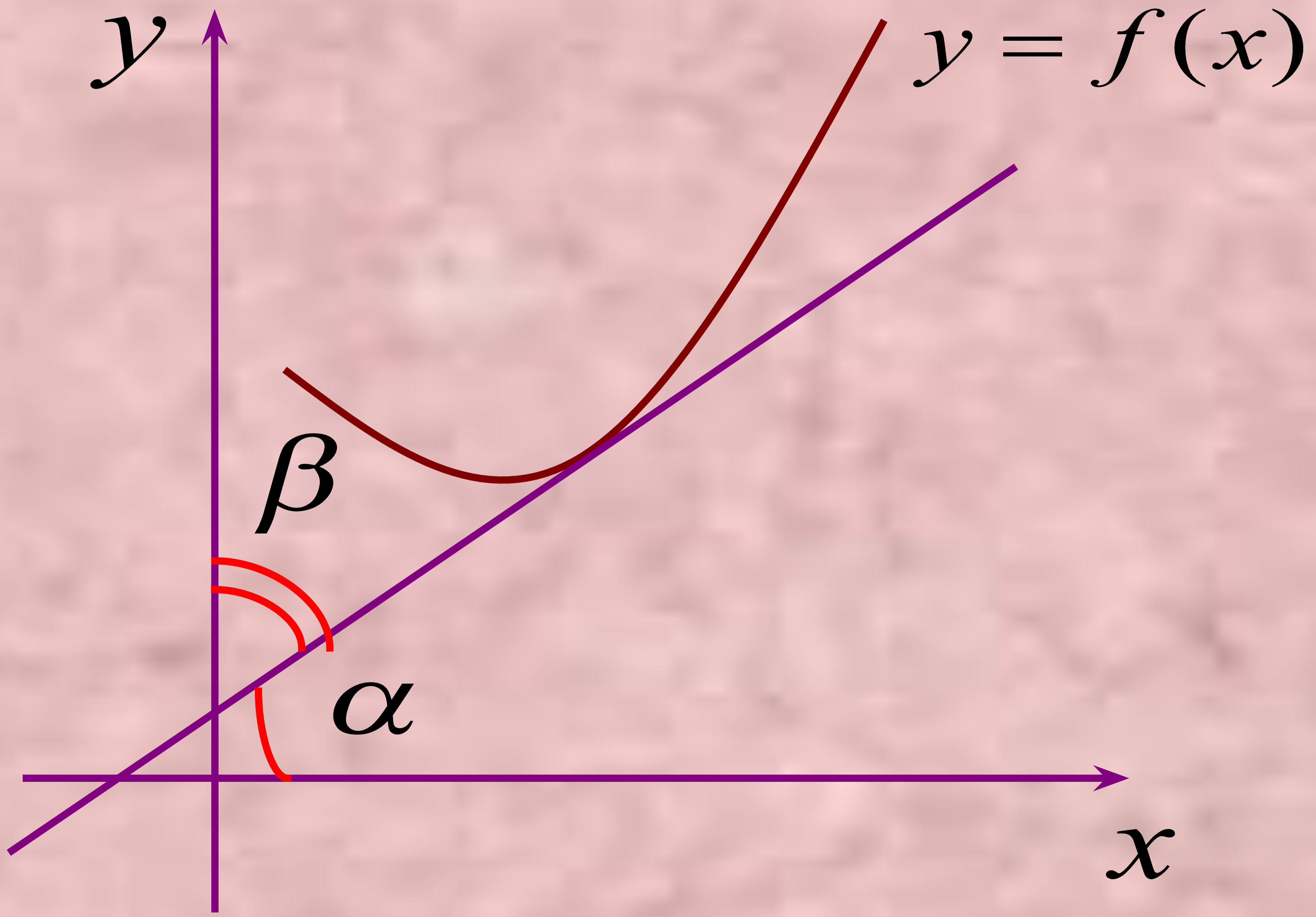
Эта формула имеет простой *геометрический смысл*.

Если y'_x

есть тангенс угла наклона касательной к кривой *y=f(x)* к оси абсцисс, то

$$x'_y$$

есть тангенс угла наклона той же касательной к оси ординат.



y
$y = f(x)$
β
α
x

Причем

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$$

если α и *β* – острые углы

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}}$$

если α и *β* – тупые углы

$$\boxed{tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}} \qquad \boxed{tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}}$$