

9 ПРИЛОЖЕНИЯ
ПРОИЗВОДНОЙ

9.1. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному).

То есть если существует неопределенность вида

$$\frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Рассмотрим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow x_0$

Будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$, и их производные непрерывны в точке x_0 , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) = 0$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Применим теорему Лагранжа на отрезке $[x, x_0]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1) \cdot \cancel{(x - x_0)}}{g'(\xi_2) \cdot \cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

где

$$x < \xi_1 < x_0$$

$$x < \xi_2 < x_0$$

При $x \rightarrow x_0$

в силу непрерывности производных

$$f'(x) \quad \text{и} \quad g'(x)$$

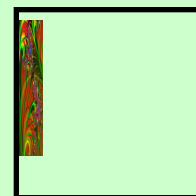
имеем

$$f'(\xi_1) \rightarrow f'(x_0)$$

$$g'(\xi_2) \rightarrow g'(x_0)$$

следовательно

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



ПРИМЕРЫ.

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Peweene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$