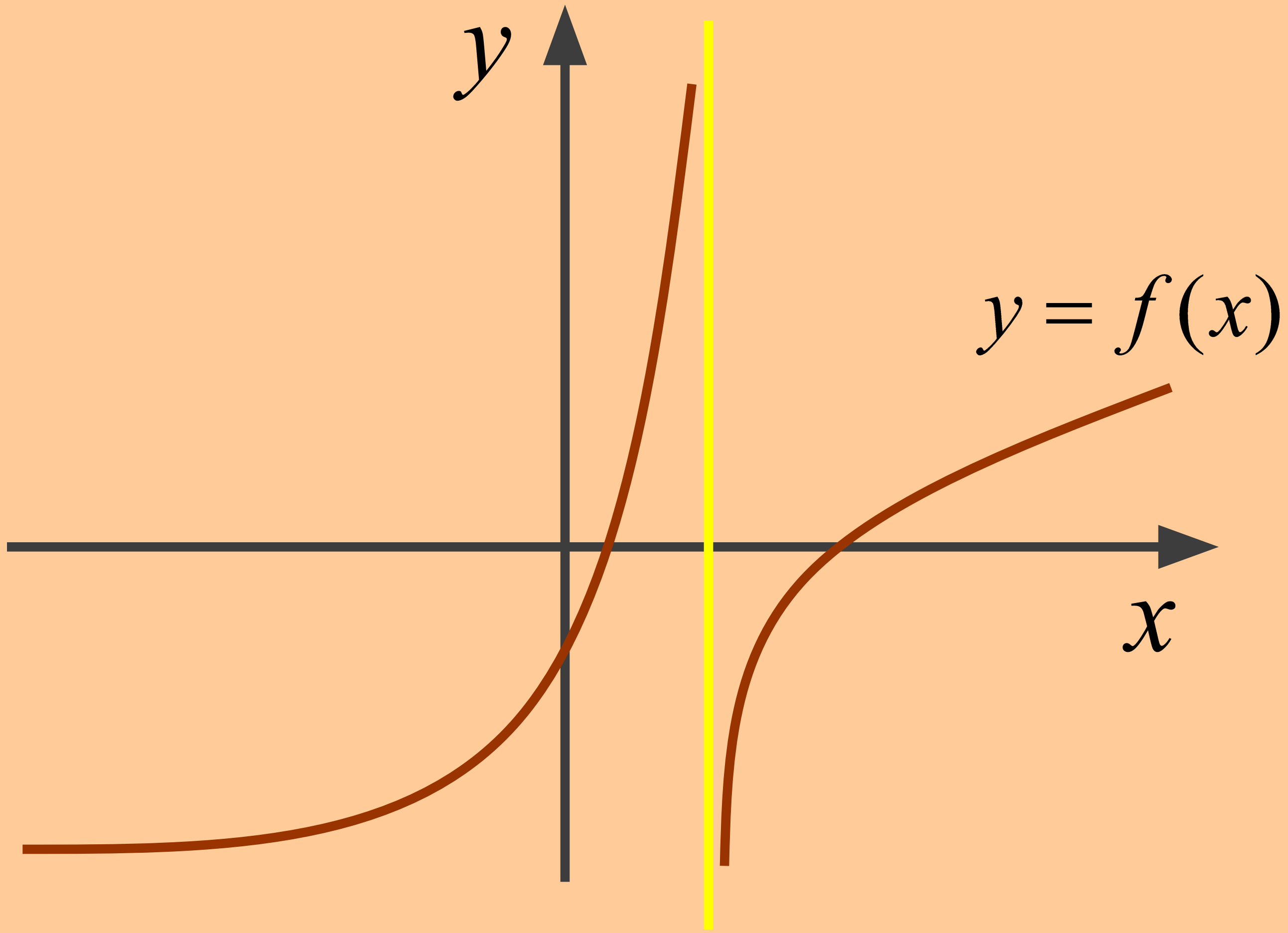
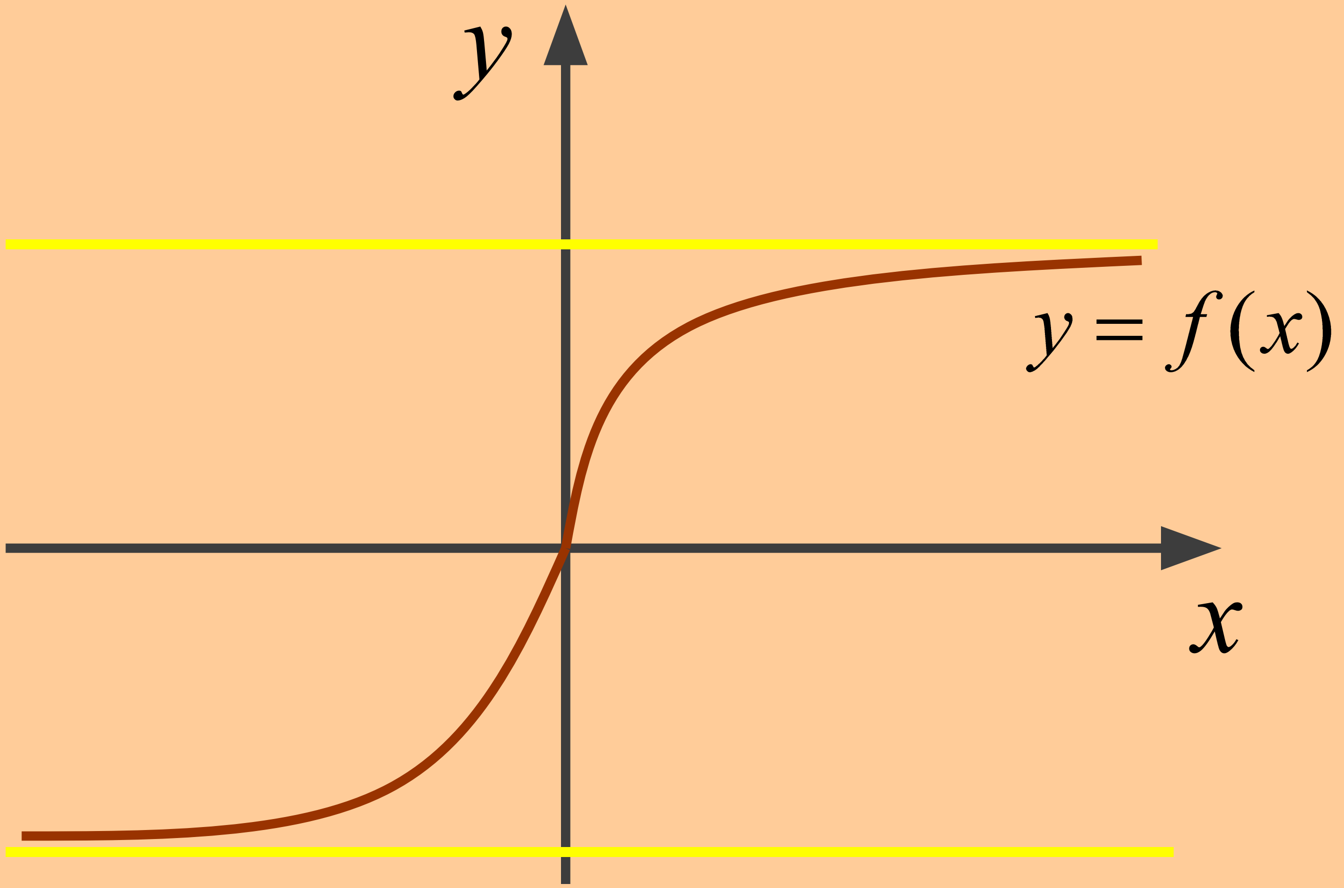
9.5. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

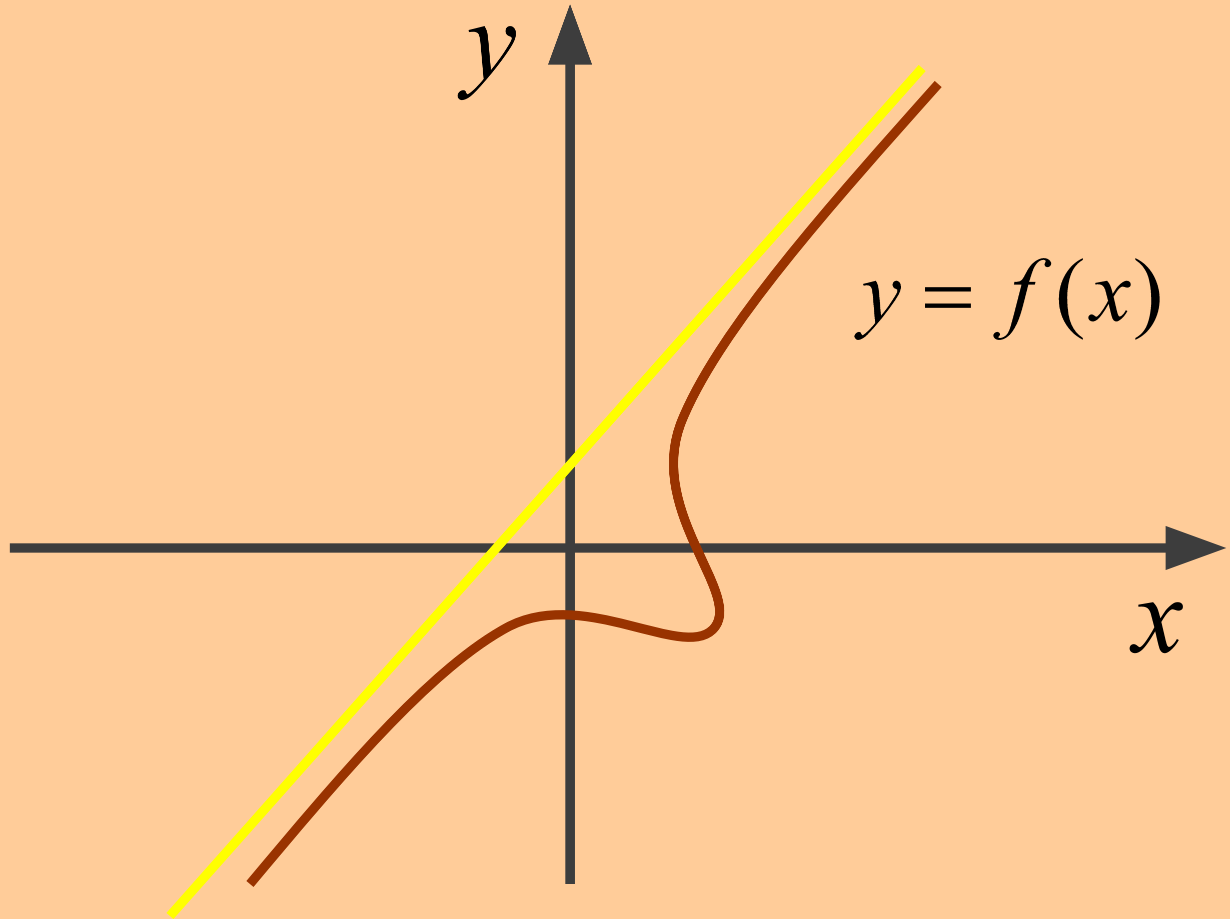
Асимптотой ***графика функции $y=f(x)$ называется прямая, такая что расстояние от точки $(x,f(x))$ до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении точек графика от начала координат.***



вертикальная асимптота



горизонтальные асимптоты



наклонная асимптота

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, может быть, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при

$$x \to x_0 - 0 \qquad (слева)$$

или

$$x \to x_0 + 0 \qquad (справа)$$

равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$$

или

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$$

Тогда прямая $x=x_0$ является <u>вертикальной асимптотой</u> графика функции $y=f(x)$.

Очевидно, что прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0, т.к. в этом случае

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Следовательно, вертикальные асимптоты $x=x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y=f(x)$ или на концах ее области определения (a,b), если a и b – конечные числа.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функция y=f(x) определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

Тогда прямая y=b является <u>горизонтальной асимптотой</u> графика функции y=f(x).

ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция y=f(x) определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - k \cdot x \right) = b$$

Тогда прямая y=kx+b является <u>наклонной асимптотой</u> графика функции y=f(x).

Пример.

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Решение:

1 Функция не имеет точек разрыва, следовательно вертикальных асимптот у нее нет.

2 Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\infty$$

Предел равен бесконечности, следовательно горизонтальных асимптот нет.

3 Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1 \Rightarrow k=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

$$\Rightarrow b=0$$

Следовательно, прямая $y=x$ **является наклонной асимптотой.**