

9.7. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ



Найти область определения функции.



*Исследовать функцию на четность и
периодичность.*



3

Найти вертикальные асимптоты.



4

Исследовать поведение функции на бесконечности и найти горизонтальные или наклонные асимптоты.



5

Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.



*Найти интервалы выпуклости функции
и точки перегиба.*



*Найти точки пересечения графика с осями
координат и некоторые дополнительные
точки, уточняющие график.*

Пример.

*Исследовать функцию и построить
ее график*

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

Решение:

1 Находим область определения функции.

Функция определена при всех значениях x ,
кроме $x = \pm 1$

Следовательно, область определения функции
будет объединение интервалов:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

2 Исследуем функцию на четность и
периодичность:

$$f(-x) = \frac{1 + (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = f(x)$$

Функция является четной, следовательно ее график будет симметричен относительно оси ординат.

Функция не периодична.



Находим вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции $x = 1$ и $x = -1$.

Сначала рассмотрим точку $x = 1$.

Если хотя бы один из пределов при $x \rightarrow 1$

слева и справа равен бесконечности, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

При $x \rightarrow 1$ слева $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$

При $x \rightarrow 1$ справа $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Аналогично можно проанализировать $x=-1$, но так как график функции симметричен относительно оси ординат, то прямая $x=-1$ также будет вертикальной асимптотой.

 4 Исследуем поведение функции на бесконечности и найдем горизонтальные и наклонные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$$

Следовательно, $y=-1$ - горизонтальная асимптота.

Т.к.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \infty$$

то наклонных асимптот нет.



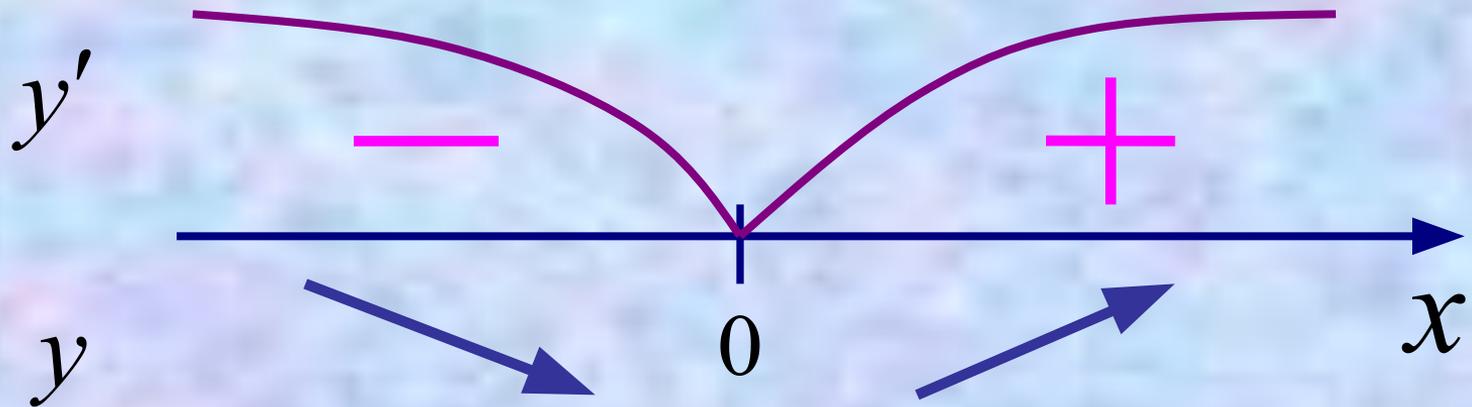
5 Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.

Для этого вычислим первую производную:

$$y' = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)' = \frac{2x(1-x^2) - (-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}$$

Исследуем знак производной при переходе через эту точку:



МИНИМУМ

$$f_{\min}(0) = 1$$

Интервалы монотонности функции:

Функция убывает на: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

Функция возрастает на: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$



6 Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.

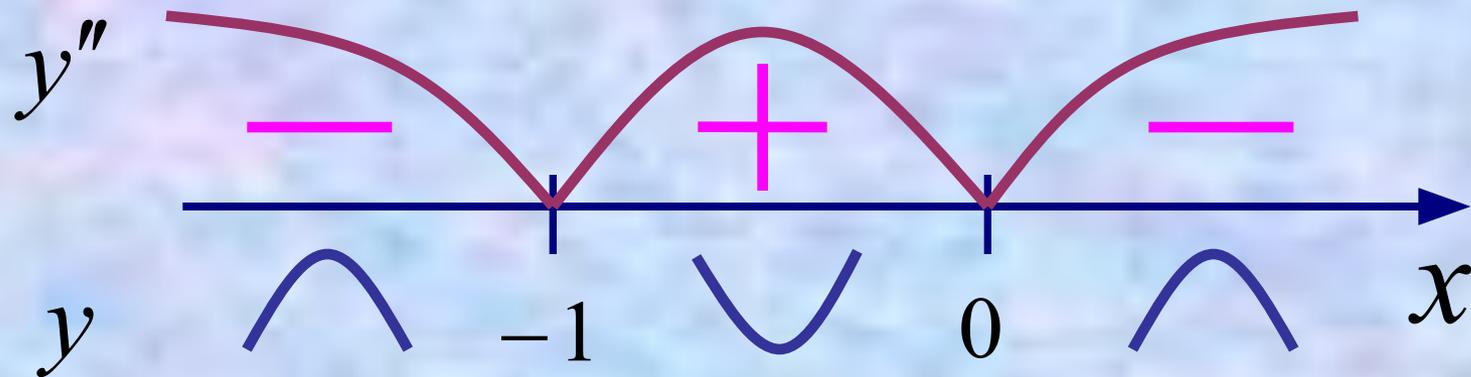
Для этого вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{(4x)' \cdot (1-x^2)^2 - 4x \cdot ((1-x^2)^2)'}{(1-x^2)^4} = \\ &= \frac{4 \cdot (1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4 - 4x^2 + 16x^2}{(1-x^2)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4(1 + 3x^2)}{(1 - x^2)^3}$$

Точек, в которых вторая производная обращается в ноль, нет. Поэтому точек перегиба у графика нет.

Числитель всегда положителен, поэтому знак второй производной будет определяться знаменателем.



Интервалы выпуклости функции:

Функция выпукла вниз на: $(-1; 1)$

Функция выпукла вверх на: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

7 Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

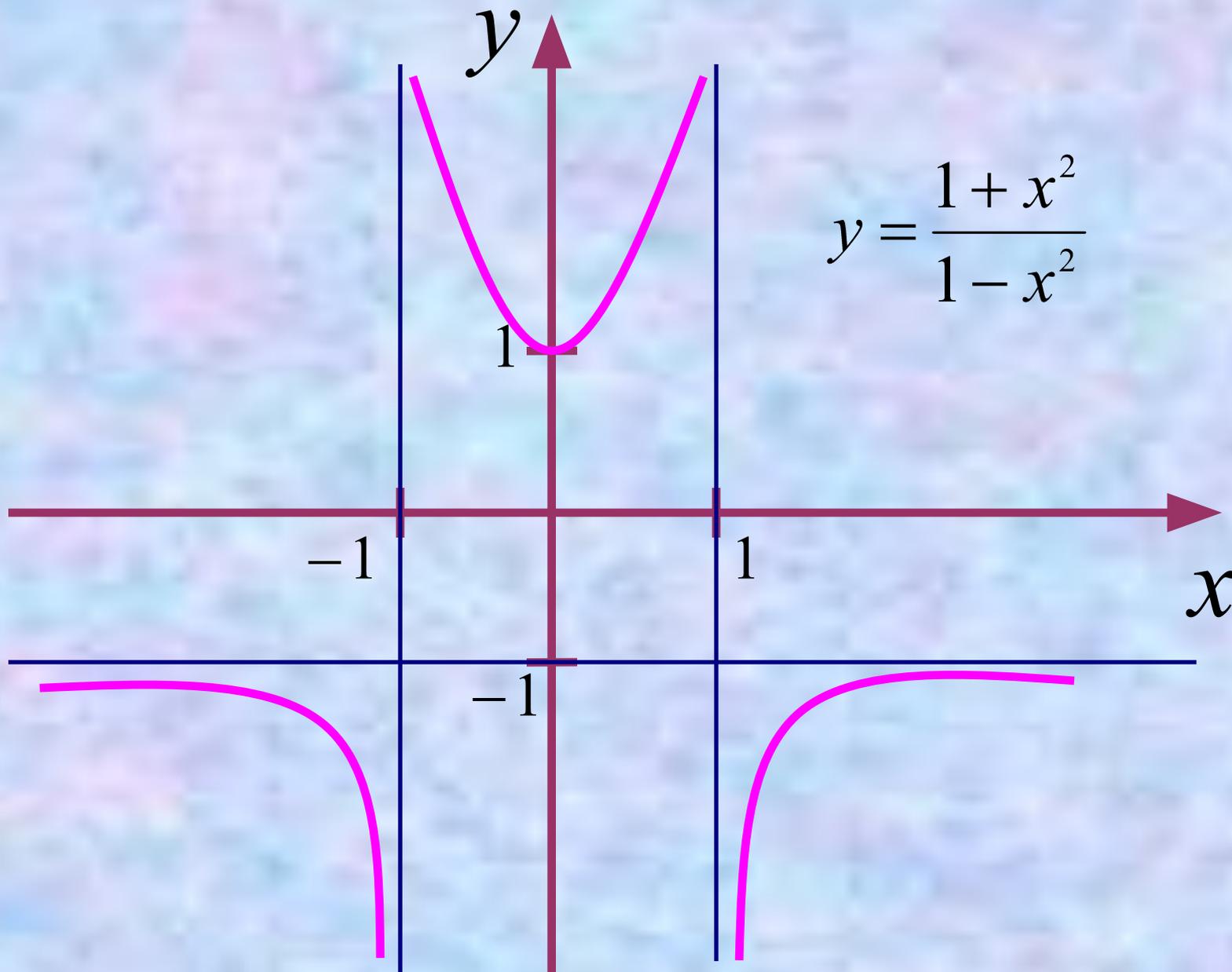
При $x = 0$

$$y = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$(0,1)$ - точка пересечения с осью ординат.

Точек пересечения с осью абсцисс нет.

8 Строим график функции:



$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$