Неопределённый интеграл.

Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемые функции

известно $d(uv) = (uv)' dx$

тогда $d(uv) = (u'v + uv') dx$

проинтегрируем $\int d(uv) = \int (u'v + uv') dx$

$$\int d(uv) = \int u'v\, dx + \int uv' dx$$

$m.k.$ $u' dx = du$; $v' dx = dv$

то
$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$uv + C = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Если интеграл, стоящий справа, проще интеграла, стоящего слева, то применение формулы имеет смысл.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x\, e^{x}\, dx$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = e^{x} dx \\ du = dx & v = e^{x} \end{bmatrix}$$

$$\int x\, e^{x} dx = xe^{x} - \int e^{x} dx = \underline{xe^{x} - e^{x} + C}$$

Некоторые типы интегралов, решаемые методом интегрирования по частям.

1^0. $\int P(x)\underbrace{\ln x}_{u}\,dx$ $\quad \int P(x)\underbrace{\arcsin x}_{u}\,dx$ $\quad \int P(x)\underbrace{\arctan x}_{u}\,dx$

$\int P(x)\underbrace{\arccos x}_{u}\,dx$ $\quad \int P(x)\underbrace{arc\cot x}_{u}\,dx$

где P(x)- многочлен

$2^0.$ $\int \underbrace{P(x)}_{u} e^{ax}\,dx$ $\quad \int \underbrace{P(x)}_{u} \sin ax\,dx$ $\quad \int \underbrace{P(x)}_{u} \cos ax\,dx, \quad a \neq 0$

u=P(x) - многочлен

Если *P(x)* выше первой степени, то операцию интегрирования по частям следует применять несколько раз.

$3^0.$ $\int e^{ax} \cos bx\,dx$ $\quad \int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\quad a^2 + b^2 \neq 0$

Формула применяется два раза, причем оба раза за ***u*** выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \ln x\, dx$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{bmatrix}$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int (x-5)x\sin 2x\,dx$

$$\int (x-5)x\sin 2x\,dx = \int \left(x^2-5x\right)\sin 2x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2-5x & dv = \sin 2x\,dx \\ du = (2x-5)dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2-5x\right)\cos 2x - \int (2x-5)\frac{1}{-2}\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 5x\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \left(2x - 5\right)\cos 2x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x - 5 & dv = \cos 2x\,dx \\ du = 2\,dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 5x\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(2x - 5\right)\sin 2x - \frac{2}{2}\int \sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{5x - x^2}{2}\cos 2x + \frac{2x - 5}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C =$$

$$= \frac{1 + 10x - 2x^2}{4}\cos 2x + \frac{2x - 5}{4}\sin 2x + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$

$$\begin{bmatrix} u = e^{3x} & dv = \sin 2x\,dx \\ du = 3e^{3x}dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = e^{3x} & dv = \cos 2x\,dx \\ du = 3e^{3x}dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$$

Пусть $\quad F(x)=\int e^{3x}\sin 2x\,dx$

тогда $\quad F(x)=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}F(x)$

$$\frac{13}{4}F(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x$$

$$F(x) = -\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x + C$$

Ответ:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = -\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}}dx$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$dx = d\left(t^2\right)$

$dx = 2t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int 2te^t dt = 2\int te^t dt =$$

$$\begin{bmatrix} u = t & dv = e^t\,dx \\ du = dt & v = e^t \end{bmatrix}$$

$$= 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2te^t - 2e^t + C = 2e^t(t-1) + C =$$

$$\underline{= 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C}$$