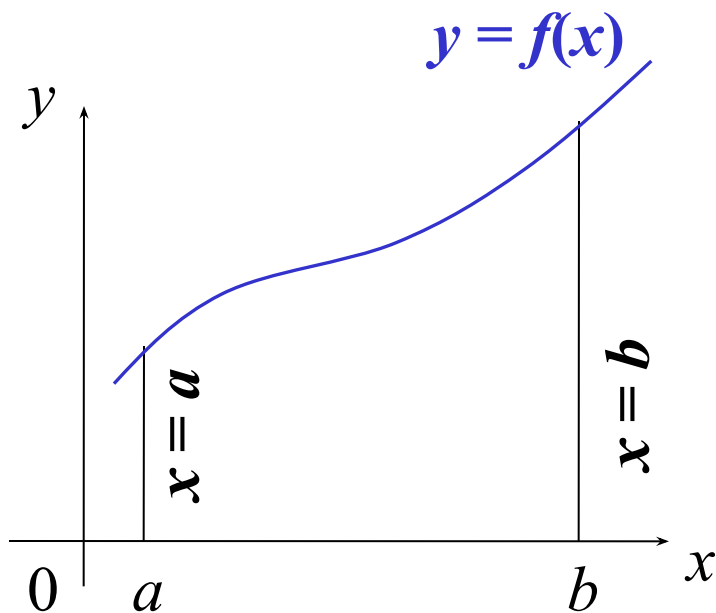






Определённый интеграл.

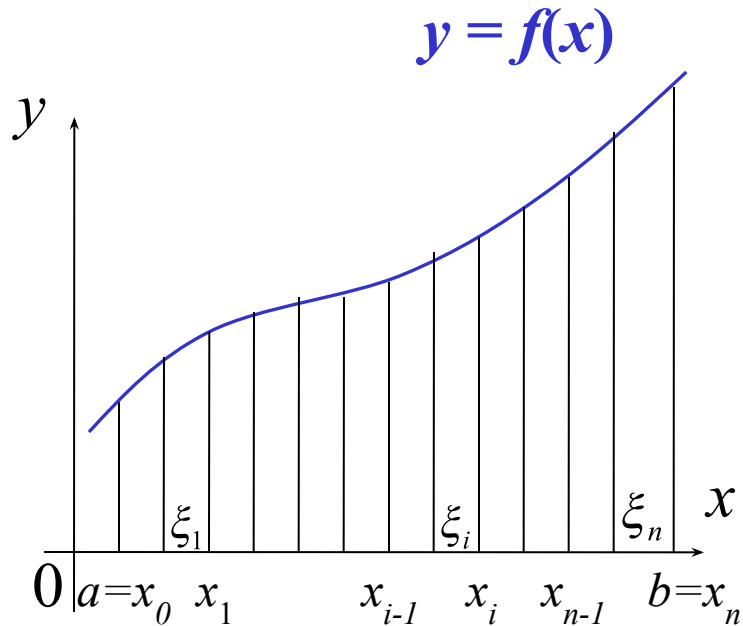
Криволинейная трапеция. Понятие определённого интеграла.



Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a; b]$

Криволинейная трапеция - это фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, параллельными прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси Ox .

Найдём площадь криволинейной трапеции.



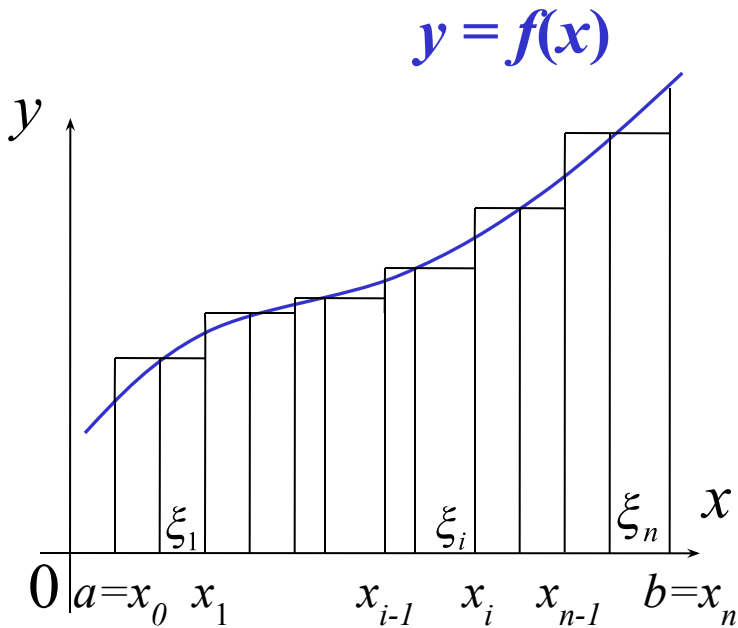
1) Разобьем отрезок $[a; b]$ точками x_i ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$) на n отрезков $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$

2) Пусть длина отрезка

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3) Проведём через точки x_i прямые, параллельные оси ОУ.

4) В каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ возьмём произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции в ней, т.е. $f(\xi_i)$



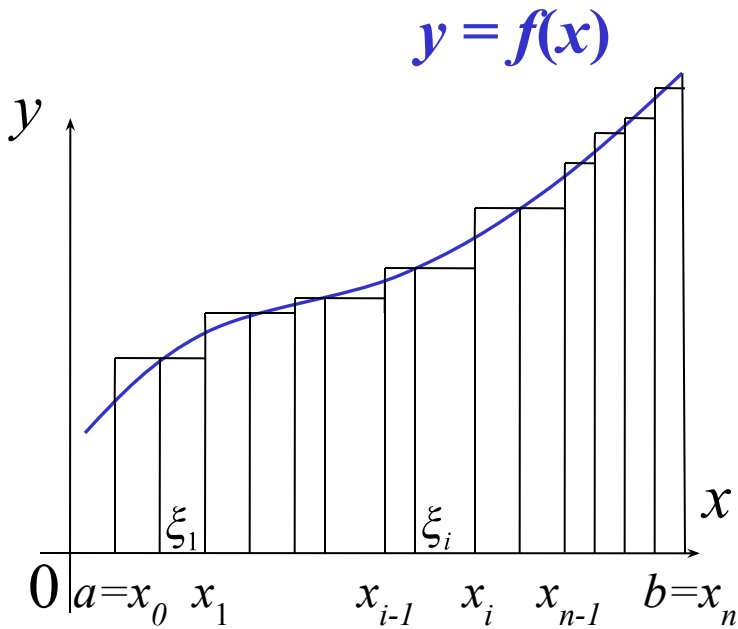
5) Произведение $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$.

6) Составим сумму всех таких произведений (интегральная сумма):

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$$

7) Интегральная сумма приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

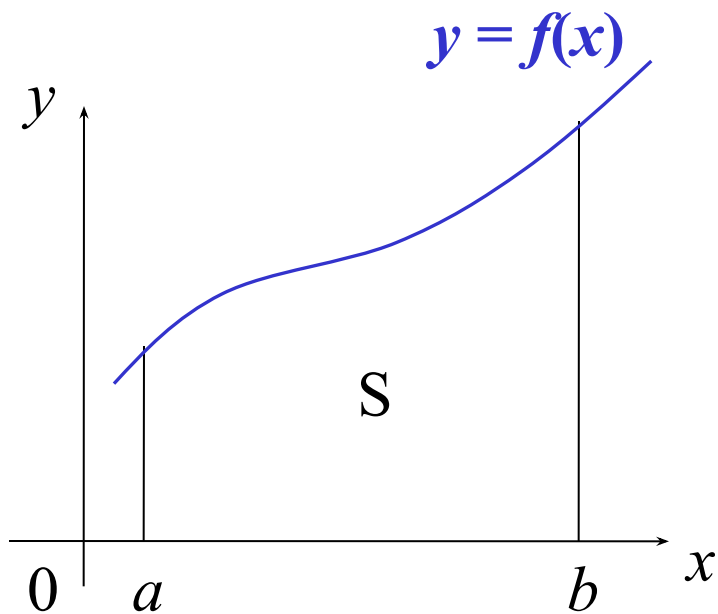


8) Пусть λ — длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$:

$$\lambda = \max \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

9) При $n \rightarrow \infty$ ($\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$) интегральная сумма имеет предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$



$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

определённый интеграл

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определённого интеграла:

определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$ - определённый интеграл

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

} пределы
интегрирования

Свойства определённого интеграла.

- 1⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad k = \text{const}$$

- 2^0 . Определённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

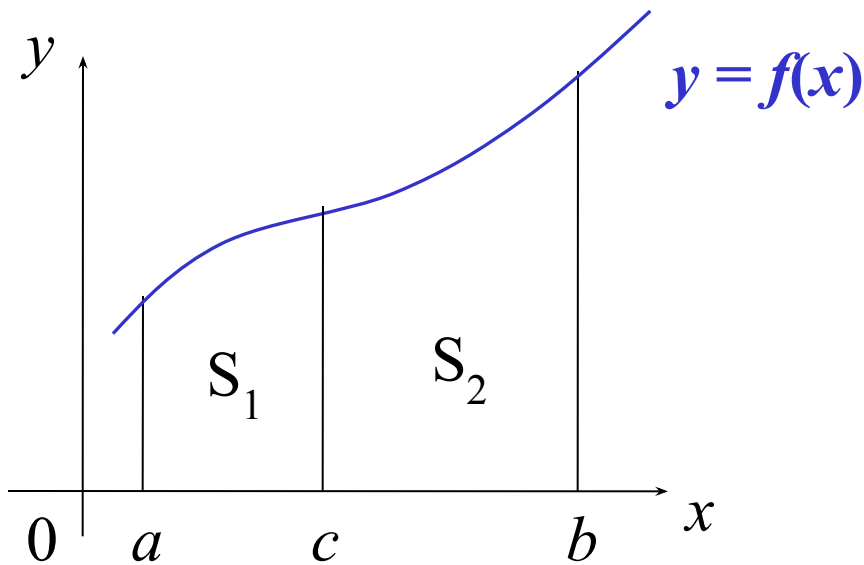
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

- 3^0 . При перестановке пределов интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

- 4⁰. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

знак двойной подстановки

Метод непосредственного интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \cos x \Big|_{\pi}^0 = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

Ответ. 2

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} dx$

$$\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = x \Big|_1^8 - 3 \sqrt[3]{x} \Big|_1^8 =$$

$$= (8 - 1) - 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 7 - 3(2 - 1) = 4$$

Ответ. 4

Метод подстановки (метод замены переменной).

Теорема.

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Введём новую переменную $x = \varphi(t)$

Если

1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t), \quad \varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Замечание.

1) При вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) Часто вместо подстановки $x = f(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$

3) Не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2}$

$$2x^2 + 1 = t$$

$$d(2x^2 + 1) = dt$$

$$4x dx = dt$$

$$2x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\alpha = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3$$

$$\beta = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

$$\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int_3^9 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int_3^9 t^{-2} dt =$$

$$= -\frac{1}{2t} \Big|_3^9 = \frac{1}{2t} \Big|_9^3 = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

Ответ. $\frac{1}{9}$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x (1 - \cos^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cdot \sin^2 x} dx =$$

$$\cos x = t$$

$$d(\cos x) = dt$$

$$-\sin x dx = dt$$

$$\alpha = \cos 0 = 1$$

$$\beta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx = - \int_1^0 \sqrt{t} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{t^3}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ответ $\frac{2}{3}$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_1^5 x \sqrt{x-1} dx$

$$x-1=t \Rightarrow x=t+1$$

$$d(x-1)=dt$$

$$dx=dt$$

$$\alpha=1-1=0$$

$$\beta=5-1=4$$

$$\int_1^5 x \sqrt{x-1} dx = \int_0^4 (t+1) \sqrt{t} dt =$$

$$= \int_0^4 t^{\frac{3}{2}} dt + \int_0^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{5} \sqrt{t^5} \Big|_0^4 + \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} \Big|_0^4 + \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^4 = \frac{2}{5} \cdot 16 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{272}{15}$$

Ответ $\frac{272}{15}$

Метод интегрирования по частям.

Теорема.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_1^e x \ln x dx$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1+e^2}{4}}}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{array} \right]$$

Пусть $F(x) = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

Тогда $F(x) = -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - F(x)$

$$2F(x) = e^x \cos x \Big|_{\pi}^0 + e^x \sin x \Big|_0^{\pi}$$

$$2F(x) = e^0 \cos 0 - e^{\pi} \cos \pi + e^{\pi} \sin \pi - e^0 \sin 0 = 1 + e^{\pi}$$

$$F(x) = \frac{1 + e^{\pi}}{2}$$

ОТВЕТ $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1 + e^{\pi}}{2}$